МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 60G50

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ ДИХОТОМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

М.И. Абрамова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
e-mail: abramova_m@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о распределении вероятностей $Q(t,E)$ для времени достижения $\tilde{\tau}(E)$ заданного уровня E энергетическим функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ в случае, когда «интенсивность» $\tilde{\xi}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})/dt$ является дихотомическим случайным процессом. Для плотности $q(t,E) = dQ(x,t)/dt$ находится интегральное представление, выражаемое в терминах специальных функций.

Ключевые слова: время достижения, дихотомический процесс, марковский процесс, плотность распределения, энергетический функционал.

1. Дихотомический случайный процесс. Математическая модель процесса накопления энергии

Определение 1. *Дихотомическим процессом* $\langle\tilde{\xi}(t); t \geq 0\rangle$ *с неотрицательными значениями будем называть марковский, стационарный случайный процесс, траектории* $\tilde{\xi}(t)$ *которого принимают, с вероятностью единица, два значения* $\{0,\alpha\}$, $\alpha > 0$.

Рассмотрим стандартный дихотомический процесс $\langle\tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, траектории которого принимают значения $\{0,1\}$ и вероятность каждого из них равна $1/2$. Такой процесс называется *телеграфным* [1]. Тогда траектории $\tilde{\xi}(t) = \alpha\tilde{\zeta}(t)$, а функционал $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ от случайных траекторий $\tilde{\zeta}(t)$, представляющий математическую модель процесса накопления энергии, определяется формулой

$$\tilde{\varepsilon}(t;\alpha\tilde{\zeta}) = \alpha\int_0^t \tilde{\zeta}(s)\,ds \tag{1.1}$$

и вероятностью входа в процесс [2] $\Pr\{\tilde{\zeta}(0) = j\}$, $j \in \{0,1\}$. Так как процесс $\langle\tilde{\zeta}(t); t \geq 0\rangle$ – марковский, то он полностью определяется соответствующим ему уравнением Колмогорова для условных вероятностей перехода

$$p_{ij}(t) = \Pr\{\tilde{\zeta}(t) = j|\tilde{\zeta}(s) = i\}\,, \quad i,j \in \{0,1\}\,. \tag{1.2}$$

Эти вероятности представляются 2×2-матрицей, зависящей от параметра t. Следовательно, это уравнение является дифференциальным уравнением для матриц-функции,

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \nu(\mathcal{P}p - p)_{ij}(t)\,, \quad \nu > 0\,, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{P}$ – стохастическая $0,1$-матрица,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.4}$$

Так как, по определению вероятностей $p_{ij}(t)$, имеет место

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} , \tag{1.5}$$

то, на основании (1.4), получаем

$$p_{ij}(t) = \big(\exp(\nu t[\mathcal{P} \ - \mathcal{I}\,])\big)_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^{-2\nu t} & 1 - e^{-2\nu t} \\ 1 - e^{-2\nu t} & 1 + e^{-2\nu t} \end{pmatrix} , \tag{1.6}$$

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Из формулы (1.6), используя условие стационарности процесса $\langle\tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, получаем одноточечное распределение вероятностей $p_i(t) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}(t) = i\}$, $i = 0, 1$ процесса $\langle\tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$,

$$p_i(t) = \lim_{s \to -\infty} p_{ij}(t - s) = \frac{1}{2} . \tag{1.7}$$

Телеграфный процесс $\langle\tilde{\zeta}(t); t \ge 0\rangle$ является частным случаем т.н. *однородной марковской цепи с непрерывным временем*. Точки изменения траекторий таких случайных процессов образуют *пуассоновский поток* [4]. В рассматриваемом случае, этот пуассоновский поток имеет плотность ν.

Поставим задачу о вычислении распределения вероятностей для единственного с вероятностью единица случайного момента времени $\tilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})$, который рассматривается как случайный процесс на $\mathbb{R}_+$ с траекториями (1.1). Это время определяется интегралом

$$\tilde{\tau}(E) = \int\limits_0^\infty \theta\left(E - \alpha\int\limits_0^t \tilde{\zeta}(s)ds\right) dt ,$$

где $\theta(x) = \{1, x \ge 0; 0, x < 0\}$ – функция Хевисайда.

Решение задачи основывается на методе Каца-Фейнмана-Дынкина вычисления математических ожиданий, связанных с однородными аддитивными функционалами от траекторий марковских процессов [4], [5]. Возможность применения этого метода, для решения поставленной задачи, вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1. *Двухкомпонентный случайный процесс* $\langle\langle\tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi})\rangle; t \ge 0\rangle$ *является марковским.*

□ Действительно, для любого фиксированного момента t_0 условное распределение вероятностей $\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t; \tilde{\xi}) < x \,|\, \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s; \tilde{\xi}); s \le t_0\}$ значений двухкомпонентного процесса $\langle\langle\tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})\rangle; t \geq 0\rangle$ при $t > t_0$ при условии фиксации его траектории до момента t_0, совпадает с условной вероятностью $\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) < x \,|\, \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) = \varepsilon_0\}$. Это следует, во-первых, из того, что марковским является процесс $\langle\tilde{\zeta}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, и, следовательно, он обладает указанным свойством,

$$\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i \,|\, \tilde{\zeta}(s), s \leq t_0\} = \Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i \,|\, \tilde{\zeta}(t_0) = i_0\}\,.$$

Во-вторых, ввиду формулы связи значений процесса $\langle\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}); t \geq 0\rangle$ при $t \geq t_0$ с его значениями до момента $t = t_0$, выполняется

$$\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \;=\; \alpha \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}(s)\, ds \;+\; \varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) = \varepsilon_0\,.$$

Тогда, на основании этих формул, имеем

$$\begin{gathered}
\Pr\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) < x \,|\, \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s;\tilde{\xi}); s \leq t_0\} = \\
= \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}(s;\tilde{\xi})\, ds \;+\; \varepsilon_0 < x \,|\, \tilde{\zeta}(s), \tilde{\varepsilon}(s;\tilde{\xi}); s \leq t_0\right\} = \\
= \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}(s)\, ds + \varepsilon_0 < x \,|\, \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\} = \\
= \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \alpha \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}(s)\, ds + \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) < x \,|\, \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\} = \\
= \Pr\left\{\tilde{\zeta}(t) = i, \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) < x \,|\, \tilde{\zeta}(t_0) = i_0, \tilde{\varepsilon}(t_0;\tilde{\xi}) = \varepsilon_0\right\}\,. \quad \blacksquare
\end{gathered}$$

Марковость процесса $\langle\langle\tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})\rangle; t \geq 0\rangle$ даёт возможность построить эволюционное уравнение для его частного распределения первого порядка

$$P_i(x,t) \;\equiv\; \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) < x, \tilde{\zeta}(t) = i\}\,. \tag{1.8}$$

В свою очередь, определив функции $P_i(x,t)$, $i = 0,1$, посредством решения системы уравнений можно найти распределение вероятностей для случайной величины $\tilde{\tau}(E)$, так как, очевидно, что

$$Q(t,E) \;=\; \Pr\{\tilde{\tau}(E) < t\} = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq E\} = 1 - \sum_{i\in\{0,1\}} P_i(t,E)\,,$$

и, следовательно,

$$q(t,E) = -\frac{d}{dt}\sum_{i\in\{0,1\}} P_i(t,E)\,. \tag{1.9}$$

Введём вероятности

$$Q_i(x,t) \equiv \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}. \tag{1.10}$$

Эти вероятности определены при всех $x \in \mathbb{R}_+$. Так как $\tilde{\varepsilon}(0;\tilde{\xi}) = 0$ с вероятностью единица, то, ввиду (1.7), $Q_i(0,t) = p_i(t) = 1/2$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Принимая во внимание то, что функция $Q_i(x,t)$, согласно определению (1.10), является невозрастающей, получим

$$Q_i(x,t) = \frac{1}{2} - \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) < x, \tilde{\zeta}(t) = i\} = \frac{1}{2} - P_i(x,t)\,, \quad i = 0,1\,, \tag{1.11}$$

$$Q(t,x) = \sum_{i=0,1} Q_i(x,t) = 1 - \sum_{i=0,1} P_i(x,t)\,. \tag{1.12}$$

Следовательно,

$$q(t,x) = \frac{d}{dt}\sum_{i=0,1} Q_i(x,t)\,. \tag{1.13}$$

Вывод уравнения для функции $Q_i(x,t)$ основан на стандартном рассуждении, применимом к процессам, построенным на основе пуассоновского потока [6]. Пусть Γ_n – событие, состоящее в том, что на интервале $[t,t+\Delta)$ находится ровно n точек изменения процесса $\langle\tilde{\zeta}(t); t\in\mathbb{R}\rangle$. Тогда, так как эти точки составляют пуассоновский поток, то

$$\Pr\{\Gamma_n\} = \frac{(\nu\Delta)^n}{n!}\, e^{-\nu\Delta}\,.$$

По формуле полной вероятности, на основе исчерпывающей совокупности несовместимых событий Γ_n, имеем разложение

$$\begin{aligned}\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t+\Delta;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t+\Delta) = j\} = e^{-\nu\Delta}\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = j\,|\,\Gamma_0\} +\\ +\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t+\Delta;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t+\Delta) = j\,, \Gamma_1\} \ + \ o(\nu\Delta)\,,\end{aligned} \tag{1.14}$$

где при записи первого слагаемого мы воспользовались тождеством

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t+\Delta;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t+\Delta) = j,\, \Gamma_0\} = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t+\Delta;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t+\Delta) = j\,|\Gamma_0\}\Pr\{\Gamma_0\}\,.$$

Заметим, что

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = j\,|\,\Gamma_0\} = Q_j(x-\alpha j\Delta, t)\,. \tag{1.15}$$

Рассмотрим второе слагаемое. Введём случайную величину $\tilde{s} \in [t,t+\Delta)$, значением которой является та единственная точка изменения процесса $\langle\tilde{\zeta}(s); s\in\mathbb{R}\rangle$, которая находится на полуинтервале $[t,t+\Delta)$ при реализации события Γ_1. Пусть $N\in\mathbb{N}$. Согласно формуле полной вероятности относительно полного набора попарно несовместимых случайных событий $\{\tilde{s} \in [t+(k-1)\Delta/N, t+k\Delta/N), \Gamma_1\}$, $k = 1,...,N$[‡)] таких, что имеет место

$$\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^{N}\{\tilde{s} \in [t+(k-1)\Delta/N, t+k\Delta/N), \Gamma_1\}\,,$$

[‡]Понятие случайной величины $\tilde{s}$ имеет смысл только при реализации события Γ_1

справедливо разложение

$$\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j,\,\Gamma_1\}=\sum_{k=1}^{N}\Pr\{\tilde s\in[t+(k-1)\Delta/N,t+k\Delta/N),\Gamma_1\}\times$$

$$\times\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j|\tilde s\in[t+(k-1)\Delta/N,t+k\Delta/N),\Gamma_1\}\,.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $N\to\infty$, получаем

$$\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j,\,\Gamma_1\}=$$

$$=\int\limits_t^{t+\Delta}\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j|\tilde s=s,\Gamma_1\}d\Pr\{\tilde s<s,\Gamma_1\}\,. \qquad (1.16)$$

Так как условная плотность распределения единственной точки пуассоновского потока, находящейся в $(t,t+\Delta]$, имеет вид $1/\Delta$ [7] и $\Pr\{\Gamma_1\}=\nu\Delta e^{-\nu\Delta}$, то

$$\Pr\{\tilde s<s,\Gamma_1\}=\Pr\{\tilde s<s|\Gamma_1\}\Pr\{\Gamma_1\}=\frac{s-t}{\Delta}\left(\nu\Delta e^{-\nu\Delta}\right)\,.$$

Тогда, из (1.16) следует

$$\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j,\,\Gamma_1\}=$$

$$=\nu e^{-\nu\Delta}\int\limits_t^{t+\Delta}\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j|\tilde s=s,\Gamma_1\}ds\,. \qquad (1.17)$$

Условная вероятность в подинтегральном выражении, ввиду того, что $\tilde\zeta(t)=1-j$ при $\tilde\zeta(t+\Delta)=j$ и

$$\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)=\tilde\varepsilon(t;\tilde\xi)+\alpha\begin{cases}\tilde s-t & ,j=0,\\ \Delta-(\tilde s-t) & ,j=1;\end{cases}=\tilde\varepsilon(t;\tilde\xi)+\alpha[j\Delta+(1-2j)(\tilde s-t)]\,,$$

преобразуется следующим образом

$$\Pr\{\tilde\varepsilon(t+\Delta;\tilde\xi)\geq x,\tilde\zeta(t+\Delta)=j|\tilde s=s,\Gamma_1\}=$$

$$=\Pr\{\tilde\varepsilon(t;\tilde\xi)\geq x-\alpha[j\Delta+(1-2j)(s-t)],\tilde\zeta(t)=1-j|\tilde s=s,\Gamma_1\}=$$

$$=\Pr\{\tilde\varepsilon(t;\tilde\xi)\geq x-\alpha[j\Delta+(1-2j)(s-t)],\tilde\zeta(t)=1-j\}=$$

$$=Q_{1-j}(x-\alpha[j\Delta+(1-2j)(s-t)],s) \qquad (1.18)$$

Мы учли, что, при $\tilde s>t$ с вероятностью единица, условная вероятность становится безусловной. Таким образом, согласно (1.14),(1.15),(1.17),(1.18), вероятность $Q_j(x,t+\Delta)$ с точностью до членов $o(\nu\Delta)$ может быть представлена в виде

$$Q_j(x,t+\Delta)\;=\;e^{-\nu\Delta}Q_j(x-\alpha j\Delta,t)\;+$$

$$+ \ \nu e^{-\nu\Delta} \int\limits_0^\Delta Q_{1-j}(x-\alpha[j\Delta+(1-2j)s], t+s)ds \ + \ o(\nu\Delta)\,. \tag{1.19}$$

Заметим, что вероятность $Q_j(x,t)$, в силу своего определения, является невозрастающей функцией от x, непрерывной слева ($P_j(x,t)$ – непрерывна справа). Следовательно, эта функция наверняка является почти всюду дифференцируемой но x. Представим равенство (1.19) в виде

$$\Delta^{-1}\left[Q_j(x,t+\Delta) \ - \ Q_j(x,t)\right] = \Delta^{-1}\left[Q_j(x-\alpha j\Delta,t) - Q_j(x,t)\right] +$$

$$+\Delta^{-1}(e^{-\nu\Delta}-1)\,Q_j(x-\alpha j\Delta,t) + \nu\Delta^{-1}e^{-\nu\Delta}\int\limits_0^\Delta Q_{1-j}(x-\alpha[j\Delta+(1-2j)s], s+t)ds + o(1)$$

и, в точках дифференцируемости но x функции $Q_j(x,t)$, перейдём к пределу $\Delta \to 0$. Так как

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\int\limits_0^\Delta Q_{1-j}(x-\alpha[j\Delta+(1-2j)s], s+t)ds = Q_{1-j}(x,t)\,,$$

то предел левой части существует при почти всех x. Тогда, мы получаем эволюционное уравнение для вероятности $Q_j(x,t)$, справедливое для почти всех $x \in \mathbb{R}$,

$$\dot{Q}_j(x,t) \ = \ -\alpha j Q_j'(x,t) \ + \ \nu\left[Q_{1-j}(x,t) \ - \ Q_j(x,t)\right]\ , \ j \in \{0,1\}, \tag{1.20}$$

где точкой обозначена производная но t, штрихом – производная но x. Следовательно, вероятности $Q_j(x,t)$, $j=0,1$ являются его слабым решением.

Для того чтобы вычислить вероятности $Q_j(x,t)$, на основе уравнения (1.20), необходимо найти его решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, которые выделяют эти вероятности из всей совокупности решений. Так как мы будем решать уравнение (1.19) на полуоси $\mathbb{R}_+$ но переменной x, то в качестве таких условий выберем граничные значения вероятностей при $x=0$ и их начальные значения при $t=0$. Во-первых, согласно (1.10),

$$Q_i(0,t) = 1/2\,, \quad i=0,1\,, \quad t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{1.21}$$

Во-вторых, так как $\tilde{\varepsilon}(0;\tilde{\xi}) = 0$, то

$$Q_i(x,0) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(0;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(0)=i\} = 0\,, \quad i=0,1\,, \quad x>0\,. \tag{1.22}$$

Таким образом, мы убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. *Частное распределение вероятностей первого порядка $P_i(x,t)$, $i \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$ случайного процесса $\langle\langle\tilde{\zeta}(t), \tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})\rangle;\ t \geq 0\rangle$ определяется вероятностями $Q_i(x,t)$ так, что $P_i(x,t) = 1/2 - Q_i(x,t)$, $i \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$, где функции $Q_i(x,t) = Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}$, $i=0,1$ удовлетворяют уравнению (1.20) и условиям (1.21), (1.22).*

2. Решение эволюционного уравнения

Уравнение (1.20) является двухкомпонентным, т.е. представляет систему двух уравнений при значениях $j = 0, 1$. С целью решения задачи Коши для уравнения (1.20) с начальными условиями (1.21), введём Лаплас-образы функций $Q_j(x,t)$, $j \in \{0,1\}$ по переменной x,

$$\bar{Q}_j(k,t) = \int\limits_0^\infty e^{-kx} Q_j(x,t)dx\,, \quad j \in \{0,1\}\,, \quad \mathrm{Re}\, k > 0\,. \tag{2.1}$$

Так как, согласно (1.21),

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} Q_j'(x,t)dx = -1/2 + k\bar{Q}_j(k,t)\,, \quad j \in \{0,1\}\,, \quad \mathrm{Re}\, k > 0\,, \tag{2.2}$$

то из (1.20) следует

$$\dot{\bar{Q}}_j(k,t) \;=\; -\alpha j[k\bar{Q}_j(k,t) - 1/2] + \nu\left[\bar{Q}_{1-j}(k,t) \;-\; \bar{Q}_j(k,t)\right], j \in \{0,1\}\,. \tag{2.3}$$

Представим это уравнение в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar{Q}_0\\ \bar{Q}_1\end{pmatrix}(k,t) = \mathcal{A}\begin{pmatrix}\bar{Q}_0\\ \bar{Q}_1\end{pmatrix}(k,t) + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где матрица $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}-\nu & \nu\\ \nu & -(\nu+\alpha k)\end{pmatrix} = -(\nu + \alpha k/2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{\alpha k}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Необходимое решение этого уравнения должно удовлетворять, согласно (1.21), нулевому начальному условию.

Матриц-функция $\mathfrak{U}(t) = \exp(t\mathcal{A})$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dot{\mathfrak{U}}(t) = \mathcal{A}\,\mathfrak{U}(t)$ и начальному условию $\mathfrak{U}(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}$, имеет вид

$$\mathfrak{U}(t) = \exp(-t(\nu + \alpha k/2))\left[\mathbf{1}\,\mathrm{ch}\,\omega(k)t + \frac{\mathrm{sh}\,\omega(k)t}{\omega(k)}\begin{pmatrix}\alpha k/2 & \nu\\ \nu & -\alpha k/2\end{pmatrix}\right], \tag{2.6}$$

где

$$\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}\,. \tag{2.7}$$

Это легко устанавливается дифференцированием по t с учётом тождества

$$\begin{pmatrix}\alpha k/2 & \nu\\ \nu & -\alpha k/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha k/2 & \nu\\ \nu & -\alpha k/2\end{pmatrix} = \omega^2(k)\mathbf{1}\,.$$

Решение двухкомпонентного дифференциального уравнения (2.4), удовлетворяющее нулевому начальному условию, представляется в форме

$$\begin{pmatrix}\bar{Q}_0\\ \bar{Q}_1\end{pmatrix}(k,t) = \left[\frac{\alpha}{2}\left(e^{t\mathcal{A}} - \mathbf{1}\right)\mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right](k,t)\,. \tag{2.8}$$

Легко проверить, что $\mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -(\alpha k)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, поэтому, на основании (2.8) и (2.6),

$$\begin{pmatrix}\bar{Q}_0\\ \bar{Q}_1\end{pmatrix}(k,t) = -\left[(2k)^{-1}(\mathfrak{U}(t)-\mathbf{1})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right](k,t) =$$

$$= (2k)^{-1}\begin{pmatrix} 1 - e^{-t(\nu+\alpha k/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu+\alpha k/2)\dfrac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right] \\ \\ 1 - e^{-t(\nu+\alpha k/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu-\alpha k/2)\dfrac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right]\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

В результате, находим, что

$$\bar{Q}(t,k) = \bar{Q}_0(k,t) + \bar{Q}_1(k,t) = k^{-1}\left(1 - e^{-t(\nu+\alpha k/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)}\operatorname{sh}\omega(k)t\right]\right). \tag{2.10}$$

С другой стороны, из определения (2.1), следует, что $\bar{Q}(t,k) = \int\limits_0^\infty e^{-kx}Q(t,x)dx\,,\quad \operatorname{Re}k > 0$ и, поэтому, на основании формулы Меллина для восстановления прообраза преобразования Лапласа, имеем

$$Q(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}\bar{Q}(t,k)e^{kx}dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}\left(1 - e^{-t(\nu+\alpha k/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)}\operatorname{sh}\omega(k)t\right]\right)\frac{e^{kx}}{k}dk \tag{2.11}$$

при сколь угодно малом $\delta > 0$. В подинтегральном выражении нет точек ветвления по k, так как эта функция чётна по $\omega(k)$, т.е. зависит от $\omega^2(k) = \nu^2 + (\alpha k/2)^2$. Ввиду интегрального представления θ-функции Хевисайда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}\frac{e^{kx}}{k}dk = \theta(x)\,,$$

формула (2.10) записывается в виде

$$Q(t,x) = \theta(x) - \frac{e^{-\nu t}}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta}\exp\left[k\left(x-\alpha t/2\right)\right]\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + \frac{\nu}{\omega(k)}\operatorname{sh}\omega(k)t\right]\frac{dk}{k}\,. \tag{2.12}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Вероятность* $Q(t,x) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x\}$ *достижения за время* t *уровня* x *функционалом* $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ *от траекторий дихотомического процесса* $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ *определяется формулой* (2.11), *где* $\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}$.

Замечание 1. Согласно (2.9), имеет место

$$\bar{Q}_1(k,t) = (2k)^{-1}\left(1 - e^{-t(\nu+\alpha k/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu - \alpha k/2)\frac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right]\right)$$

и, поэтому,

$$Q_1(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\nu t}}{4\pi i}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} e^{-t\alpha k/2}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu - \alpha k/2)\frac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right]\frac{dk}{k}\,. \qquad (2.13)$$

3. Вычисление плотности распределения

Найдём, используя формулу (2.12), интегральное представление для плотности распределения $q(t,E)$. Эта плотность, согласно веденным обозначениям, определяется производной

$$q(t,E) \;=\; \frac{d}{dt}Q(t,E) = \frac{d}{dt}\sum_j Q_j(t,E)\,. \qquad (3.1)$$

Для получения искомого интегрального представления, изменим выражение в правой части формулы (3.1) так, чтобы она содержала только вероятность $Q_1(x,t)$. Это достигается сложением обоих уравнений (1.20) при $j = 0, 1$,

$$\dot{Q}_1(x,t) + \dot{Q}_0(x,t) = -\alpha Q_1'(x,t)\,,$$

$$q(t,x) \;=\; -\alpha\frac{\partial}{\partial x}Q_1(x,t)\,. \qquad (3.2)$$

Подставляя в правую часть этого равенства интегральное представление (2.13) при $x = E$, находим требуемое интегральное представление для плотности распределения

$$q(t,E) = \alpha\frac{e^{-\nu t}}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} e^{k(E-t\alpha/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu - \alpha k/2)\frac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right]\frac{dk}{k}\,. \qquad (3.3)$$

Так как интеграл сходится условно, то в этой формуле, после вычисления производной но E под интегралом, получающийся при этом интеграл имеет смысл только как обобщённая функция.

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Плотность распределения* $q(t,E)$ *случайного времени достижения уровня* E *функционалом* $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$, *от траекторий дихотомического процесса* $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ *определяется формулой* (3.3).

Очевидно, что время E/α является минимальным временем, за которое может быть достигнут уровень E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$. Для этого нужно, чтобы в момент времени $t=0$ имело место $\tilde{\zeta}(0)=1$ и у траекторий процесса $\langle\tilde{\zeta}(t);t\in\mathbb{R}\rangle$ на отрезке $[0,E/\alpha]$ не имелось точек изменения. Вероятность такого события равна $[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$. Поэтому, вероятность $Q(t,E)$ должна содержать слагаемое $\theta(t-E/\alpha)[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$. Тогда, плотность $q(t,E)$ распределения случайного времени $\tilde{\tau}(E)$ содержит δ - функционную особенность $\delta(t-E/\alpha)[\exp(-\nu E/\alpha)]/2$. Наличие этой особенности осложняет вычисление плотности $q(t,E)$, так как, в этом случае, интеграл, который получается при формальном выполнении операции дифференцирования в формуле (3.3), не существует, а его зависимость от параметра t должна пониматься как обобщённая функция. Таким образом, при вычислении этого интеграла, возникает задача выделения указанной δ-функционной особенности. Следующие леммы решают эту задачу.

Введём в рассмотрение модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков

$$\mathrm{I}_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},\quad z\in\mathbb{C}; \tag{3.5}$$

$$\mathrm{I}_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{3.6}$$

Очевидно, что $\mathrm{I}_0'(z)=\mathrm{I}_1(z)$, что следует непосредственно из рядов (3.5) и (3.6), определяющих эти функции. Кроме того, функции $\mathrm{I}_0(z)$ и $\mathrm{I}_1(z)$ связаны тождеством [8]

$$\mathrm{I}_1'(z)+z^{-1}\mathrm{I}_1(z)=\mathrm{I}_0(z),\quad z\in\mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Лемма 2. *Обобщённая функция*

$$q_*(u,s)=\frac{1}{2}e^{-u/2}\left(\delta(s)+\theta(s)e^{-s}\left(\mathrm{I}_0(\sqrt{2us})+\sqrt{\frac{u}{2s}}\,\mathrm{I}_1(\sqrt{2us})\right)\right) \tag{3.8}$$

по $s\in\mathbb{R}$ над основным пространством ограниченных непрерывиых функций на $\mathbb{R}$ ($\delta(s)$ – обобщённая функция Дирака) является плотностью распределения вероятностей при любом значении параметра $u>0$.

□ Функции $\mathrm{I}_0(z)$, $\mathrm{I}_1(z)$ положительны при $z>0$, то

$$\frac{1}{2}e^{-u/2}\left(\mathrm{I}_0(\sqrt{2us})+\sqrt{\frac{u}{2s}}\,\mathrm{I}_1(\sqrt{2us})\right)>0$$

при $u,s>0$. Коэффициент $e^{-u/2}>0$ при $\delta(s)$ также положителен. Следовательно, обобщённая функция $q_*(u,s)$ неотрицательна (неотрицательным является интеграл от произведения её на любую неотрицательную ограниченную непрерывную функцию). Проверим, что она нормирована на единицу. Проинтегрируем функцию $q_*(u,s)$ по s от 0 до ∞. Используя (3.5), имеем

$$\int_0^{\infty}e^{-s}\mathrm{I}_0(\sqrt{2us})ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\int_0^{\infty}e^{-s}\left(\sqrt{\frac{us}{2}}\right)^{2n}ds=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n = e^{u/2}.$$

Точно также получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-s} \sqrt{\frac{u}{2s}} \, \mathrm{I}_1(\sqrt{2us}) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-s} \sqrt{\frac{u}{2s}} \left(\sqrt{\frac{us}{2}}\right)^{2n+1} ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+1} = e^{u/2} - 1.$$

Интегрируя плотность (3.8) от 0 до ∞, с использованием полученных формул, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_*(u,s) ds = \frac{1}{2} \left[1 + \int_0^{\infty} e^{-s} \left(\mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\frac{us}{2}} \right) + \sqrt{\frac{u}{2s}} \, \mathrm{I}_1 \left(\sqrt{\frac{us}{2}} \right) \right) ds \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-u/2} \left[1 + e^{u/2} + e^{u/2} - 1 \right] = 1,$$

что указывает на нормированность плотности $q_*(u,s)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_*(u,s) ds = 1. \quad \blacksquare \tag{3.9}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$D_*(u,s) = \mathrm{Re} \int_{-i, z \in \mathrm{C}_+}^{i} \exp[i \left(\frac{u}{z} - sz \right)] dz, \tag{3.10}$$

где $\mathrm{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \mathrm{Re} z \geq 0 \}$. Тогда справедлива

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$D_*(u,s) = -\pi \sqrt{\frac{u}{s}} \, \mathrm{I}_1(2\sqrt{us}). \tag{3.11}$$

□ Дважды дифференцируя функцию $D_*(u,s)$ но u получим

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u,s) = -\mathrm{Re} \int_{-i, z \in \mathrm{C}_+}^{i} z^{-2} \exp[-isz] \exp[iuz^{-1}] dz.$$

Выполняя интегрирование по частям, находим, согласно (3.10),

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u,s) = \mathrm{Re}(iu)^{-1} \int\limits_{-i, z\in \mathrm{C}_+}^{i} \exp[-isz] d\left(\exp[iuz^{-1}]\right) =$$

$$= \mathrm{Re}(iu)^{-1}(e^{s-u} - e^{u-s}) + \frac{s}{u}\mathrm{Re} \int\limits_{-i, z\in \mathrm{C}_+}^{i} \exp[-isz]\exp[iuz^{-1}]dz = \frac{s}{u} D_*(u,s)\,.$$

Таким образом, функция $D_*(u,s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} D_*(u,s) - \frac{s}{u} D_*(u,s) = 0\,. \qquad (3.12)$$

Кроме того,

$$D_*(0,s) = \mathrm{Re} \int\limits_{-i, z\in \mathrm{C}_+}^{i} \exp[-isz]dz = \mathrm{Re}\frac{i}{s}(e^{s} - e^{-s}) = 0\,, \qquad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} D_*(u,s)\right)_{u=0} = -\mathrm{Im} \int\limits_{-i, z\in \mathrm{C}_+}^{i} z^{-1}\exp[-isz]dz = -\mathrm{Re} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-ise^{i\varphi}\right) d\varphi = -\pi\,. \qquad (3.14)$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться следующим образом. Дифференцирование $(\partial D_*(u,s)/\partial u)_{u=0}$ по параметру s даёт

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial u} D_*(u,s)\right)_{u=0} = \mathrm{Re}\, i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi}\exp\left(-ise^{i\varphi}\right) d\varphi = \mathrm{Re}\int\limits_{-i}^{i} \exp(-isz)\, dz = 0\,.$$

Тогда, ввиду независимости $(\partial D_*(u,s)/\partial u)_{u=0}$ от s, вычисление этой постоянной сводится к нахождению значения интеграла в (3.14) при $s=0$.

Итак, вычисление функции $D_*(u,s)$ сводится к решению дифференциального уравнения (3.12) второго порядка с начальным условием (3.14) при учёте её ограниченности по u. Замена аргумента $z = \sqrt{4us}$ в дифференциальном уравнении и введение новой функции $X(z)$ по формуле $D_*(u,s) = zX(z)$ сводит это уравнение к модифицированному уравнению Бесселя,

$$\frac{d^2}{dz^2}X(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}X(z) - \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)X(z) = 0\,, \qquad (3.15)$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, имеющих порядок единица. Эти функции обозначаются соответственно $\mathrm{I}_1(z)$ и $\mathrm{K}_1(z)$ (функция Макдональда), где функция $\mathrm{I}_1(z)$ определяется формулой (3.5). Тогда,

$$X(z) = A\mathrm{I}_1(z) + B\mathrm{K}_1(z), \tag{3.16}$$

где A, B – произвольные постоянные. Для нахождения нужного решения уравнения (3.12), существенно только то, что для функции $\mathrm{K}_1(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathrm{K}_1(z) = \mathrm{I}_1(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} + O(z), \quad z \to 0. \tag{3.17}$$

Функция $D_*(u,s)$, на основании (3.16), может быть представлена в виде

$$D_*(u,s) = z\left(A\mathrm{I}_1(z) + B\mathrm{K}_1(z)\right).$$

Из условия (3.13) и свойства (3.17) заключаем, что $B = 0$, так как $z = 0$ при $u = 0$ и $\mathrm{I}_1(0) = 0$,

$$D_*(0,s) = B\lim_{z\to 0} z\mathrm{K}_1(z) = B.$$

В связи с тем, что $\partial z^2/\partial u = 4s$ и $\mathrm{I}_1(z) = z/2 + o(z^2)$ при $z \to 0$, из (3.14) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}D_*(u,s)\right)_{u=0} = \frac{A}{2}\left(\frac{\partial z^2}{\partial u}\right)_{u=0} = 2As,$$

и, поэтому, $A = -\pi/2s$. Тогда

$$D_*(u,s) = -\left(\frac{\pi}{2s}\right) z\mathrm{I}_1(z) = -\pi\sqrt{\frac{u}{s}}\,\mathrm{I}_1\left(2\sqrt{us}\right). \quad \blacksquare$$

Следствие. Имеет место следующее представление для плотности $q_*(u,s)$,

$$q_*(u,s) = \frac{1}{2}e^{-u/2}\left(\delta(s) - \frac{\theta(s)}{\pi}e^{-s}\left(1 + 2\frac{\partial}{\partial u}\right)D_*(u/2,s)\right). \tag{3.18}$$

□ Для вычисления действия оператора

$$\mathsf{Q}D_*(u,s) = \left(1 + 2\frac{\partial}{\partial u}\right)D_*(u/2,s)$$

положим $z = \sqrt{2us}$ и представим, на основании (3.11),

$$D_*(u/2,s) = -\frac{\pi}{2s}z\mathrm{I}_1(z).$$

Так как $\partial/\partial u = (s/z)\partial/\partial z$, то

$$2\frac{\partial D_*(u/2,s)}{\partial u} = -\frac{\pi}{z}\frac{\partial}{\partial z}[z\mathrm{I}_1(z)] = -\pi\mathrm{I}_0(z),$$

где мы воспользовались тождеством (3.7). Следовательно,

$$\mathsf{Q}D_*(u,s) = -\pi\left[\sqrt{\frac{u}{2s}}\,\mathrm{I}_1\left(\sqrt{2us}\right) + \mathrm{I}_0\left(\sqrt{2us}\right)\right].$$

Подстановка этого выражения в определение (3.8) плотности $q_*(u,s)$ даёт нам формулу (3.18). ■

Определим функцию

$$U_{\lambda,\mu}(u,s,z) \;=\; z^{-1}\left(i\mu + z^{\lambda}\right)\exp[-is\mu z^{\lambda}]\exp[i\mu(u/2)z^{-\lambda}]\,, \tag{3.19}$$

Следующая лемма является ключевой при выделении δ-особенности из плотности $q(t,x)$.

Лемма 4. *Функция*

$$D_{**}(u,s) = \lim_{M\to\infty}\mathrm{Re}\sum_{\lambda=\pm1}\lambda\int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M} U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)dz\,,\quad u>0\,, \tag{3.20}$$

$\mathrm{C}_+(M) = \{z\in\mathbb{C}: |z| = M\}$, *является обобщённой функцией над основным пространством, состоящим из непрерывных ограниченных функций на* $\mathbb{R}$. *Она равна*

$$D_{**}(u,s) = \pi\delta(s)\,, \tag{3.21}$$

где $\delta(s)$ *– обобщённая функция Дирака.*

□ Выражение (3.20) состоит из предельных значений интегралов

$$D_{m,\lambda}(u,s) = \int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M} z^{-m}\exp\left[is\lambda z^{\lambda}\right]\exp\left[-i\lambda u z^{-\lambda}/2\right]dz$$

четырёх типов, представляемых значениями $m=0,\lambda=1$; $m=1,\lambda=\pm1$; $m=2,\lambda=-1$. Рассмотрим вклады каждого из них при $M\to\infty$. Для интеграла при $m=2$ при переходе к интегрированию в полярных координатах $z=Me^{i\varphi}$, где φ изменяется от $\pi/2$ до 0, получаем оценку

$$\left|\int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M} z^{-2}\exp[-is/z]\exp[iuz/2]dz\right| \;\le\; M^{-1}\int\limits_0^{\pi/2}\exp[(s/M-uM/2)\sin\varphi]d\varphi \;<\; \frac{\pi}{2M}\,, \tag{3.22}$$

и, следовательно, этот интеграл не даёт вклад в $D_{**}(u,s)$ при $M\to\infty$, так как $u>0$.

Для оценки вклада интегралов $D_{1,\lambda}(u,s)$, $\lambda=\pm1$ при $M\to\infty$, выделим произвольный сектор с $\arg z\in[0,\epsilon], 0<\epsilon<\pi/2$. Интеграл по дуге $\mathrm{C}_+(M)$ вне этого сектора равномерно стремится к нулю при $\lambda = \pm 1$, ввиду оценки, аналогичной той, что приведена выше,

$$\left| \int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{Me^{i\epsilon}} z^{-1} \exp\left[is\lambda z^\lambda\right] \exp\left[-i\lambda u/2z^\lambda\right] dz \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\epsilon}^{\pi/2} \exp\left[-\lambda(sM^\lambda - u/2M^\lambda)\sin\varphi\right] d\varphi < \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \exp\left[-\lambda\left(sM^\lambda - u/2M^\lambda\right)\right]$$

при $\lambda = \pm 1$. Последнее выражение стремится к нулю при $M \to \infty$, так как $u, s \ge 0$. Оставшийся интеграл по дуге с $\arg z \in [0, \epsilon]$ оценивается следующим образом

$$\left| \int\limits_{Me^{i\epsilon}, z\in C_+(M)}^{M} z^{-1} \exp\left[is\lambda z^\lambda\right] \exp\left[-i\lambda u/2z^\lambda\right] dz \right| \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{\epsilon} \exp\left[-\lambda(sM^\lambda - u/2M^\lambda)\sin\varphi\right] d\varphi \ < \ \epsilon \exp[\epsilon \max\{s, u/2\}/M] ,$$

и, ввиду произвольности $\epsilon > 0$, получаем, что, действительно, интегралы с $m = 1$ не дают вклада в $D_{**}(u,s)$ при $M \to \infty$ и обоих значениях $\lambda = \pm 1$.

Рассмотрим, наконец, интеграл с $m = 0$, который преобразуем следующим образом

$$\int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{M} \exp[i(sz - u/2z)]dz = \int\limits_{iM}^{M} \exp[isz]dz + \int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{M} \exp[isz]\left(\exp[-iu/2z] - 1\right) dz =$$

$$= (is)^{-1}\left(e^{isM} - e^{-sM}\right) + (is)^{-1}\left(e^{isM}\left[\exp(-iu/2M) - 1\right] - e^{-sM}\left[\exp(-u/2M) - 1\right]\right) -$$

$$- (iu/2) \int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{M} \exp[i(sz - u/2z)] \frac{dz}{z^2} , \qquad (3.23)$$

где в первой строке, ввиду аналитичности подинтегральной функции, мы не указываем путь интегрирования в первом интеграле справа, а второй интеграл, стоящий справа, преобразуется по частям. Так как последний интеграл в правой части формулы (3.23), согласно (3.22), оценивается сверху числом $\pi/2M$, то формула (3.23) приводит к следующему асимптотическому при $M \to \infty$ значению рассматриваемого интеграла

$$\int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{M} \exp[i(sz - u/2z)]dz \ \sim \ (is)^{-1} e^{isM} , \quad M \to \infty . \qquad (3.24)$$

Заметим, что в терминах обобщённых функций над основным пространством, которое состоит из непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, имеют место равенства

$$\frac{1}{\pi s}\lim_{M\to\infty}\sin sM = \frac{1}{\pi}\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M \cos sy\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos sy\,dy = \delta(s)\,.$$

Поэтому, из определения (3.20) и (3.24) следует (3.21), так как

$$D_{**}(u,s) \;=\; 2\lim_{M\to\infty}\mathrm{Re}(is)^{-1}e^{isM} \;=\; 2\lim_{M\to\infty}s^{-1}\sin sM \;=\; 2\pi\delta(s)\,. \quad \blacksquare$$

Введём функцию

$$D(u,s;M) \;=\; \sum_{\lambda,\mu=\pm1}\lambda\int\limits_{\mathrm{C}(M)}\left(i\mu+z^{\lambda}\right)\exp\left[-is\mu z^{\lambda}\right]\exp\left[iu\mu z^{-\lambda}/2\right]\frac{dz}{z}\,, \qquad (3.25)$$

где $\mathrm{C}(M)$ – контур в комплексной плоскости z, состоящий из дуги единичной окружности при изменении угла от $\pi/2$ до 0 и луча $[1,M], \mathrm{Im}\,(z)=0$.

Лемма 5. *Для функции* $D(u,s)=\lim\limits_{M\to\infty}\mathrm{Re}\,D(u,s;M)$ *справедлива формула*

$$D(u,s)=2\left(\pi\delta(s)-\mathrm{Q}D_*(u,s)\right)\,. \qquad (3.26)$$

$\square$ Выполним следующее преобразование входящих в (3.25) интегралов, используя независимость их значений от таких деформаций контура $\mathrm{C}(M)$, при которых путь интегрирования не пересекает точку $z=0$, в которой подынтегральные выражения имеют существенную особенность. При $\lambda\mu=-1$ интегрирование по контуру $\mathrm{C}(M)$ заменим на интегрирование по отрезку на оси $\mathrm{Re}\,(z)=0$, $M>0$ от точки i до точки iM и, далее, по дуге окружности радиуса M с изменением $\arg z$ от $\pi/2$ до 0. Для интегралов в (3.24) с $\lambda\mu=1$ аналогичное преобразование состоит в деформации контура интегрирования $\mathrm{C}(M)$ в контур, состоящий из дуги единичной окружности с изменением $\arg z$ от $\pi/2$ до $-\pi/2$, затем, из отрезка на оси $\mathrm{Re}\,(z)=0$ от точки $-i$ до точки $-iM$ и, наконец, из дуги окружности радиуса M с изменением $\arg z$ от $-\pi/2$ до 0.[§)] Описанное преобразование интегралов в формуле (3.25) выражается следующим образом,

$$D(u,s;M) \;=\; \sum_{\lambda=\pm1}\lambda\left(\int\limits_{i,z\in\mathrm{C}_+}^{-i}+\int\limits_{-i,\mathrm{Re}\,(z)=0}^{-iM}+\int\limits_{-iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}\right)U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)\,dz\,+$$

[§]Такой выбор деформации контура $\mathrm{C}(M)$ продиктован тем, что подынтегральное выражение, при $|z|\to\infty$, экспоненциально стремится к нулю в нижней полуплоскости при совпадающих значениях λ,μ, а при несовпадающих их значениях стремится к нулю в верхней полуплоскости комплексного z. Это обеспечивает выполнение, для этих интегралов условия Жордана и, поэтому, интегралы по дугам полуокружности $\mathrm{C}_+(M)$ исчезают при $M\to\infty$.

$$+\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\left(\int\limits_{i,\mathrm{Re}\,(z)=0}^{iM}+\int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}\right)U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)\,dz\,, \tag{3.27}$$

Сгруппируем интегралы в формуле (3.27) иным образом

$$\begin{gathered}
D(u,s;M)\;=\;\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\int\limits_{i,z\in\mathrm{C}_+}^{-i}U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)dz\;+\\
+\;\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\left(\int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)dz\;+\int\limits_{-iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)dz\right)\;+\\
+\;\left(\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\int\limits_{i,\mathrm{Re}\,(z)=0}^{iM}U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)dz+\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\int\limits_{-i,\mathrm{Re}\,(z)=0}^{-iM}U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)dz\right)\;\equiv\\
\equiv\;D^{(1)}(u,s)\;+\;D^{(2)}(u,s;M)\;+\;D^{(3)}(u,s;M)\,,
\end{gathered}\tag{3.28}$$

где в последней строке введены обозначения для выражений в соответствующих строках, согласно порядку их записи. Рассмотрим вклады этих групп слагаемых по отдельности.

Начнём с последней группы. Сделаем замену переменной $z\to -z$ в интегралах второй суммы этой группы. Ввиду $(-z)^\lambda=-z^\lambda$ при $\lambda=\pm 1$, выполняется

$$\begin{gathered}
U_{\lambda,-\lambda}(u,s,-z)=-z^{-1}\left(-i\lambda+(-z)^\lambda\right)\exp[is\lambda(-z)^\lambda]\exp[-i\lambda(u/2)(-z)^{-\lambda}]=\\
=-z^{-1}\left(-i\lambda-z^\lambda\right)\exp[-is\lambda z^\lambda]\exp[i\lambda(u/2)z^{-\lambda}]=\\
=z^{-1}\left(i\lambda+z^\lambda\right)\exp[-is\lambda z^\lambda]\exp[i\lambda(u/2)z^{-\lambda}]=U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)\,.
\end{gathered}$$

Следовательно, при таком преобразовании, вторая сумма преобразуется в первую сумму выражения $D^{(3)}(u,s;M)$, взятую с обратным знаком. Поэтому последняя группа интегралов в (3.28) даёт нулевой вклад, $D^{(3)}(u,s;M)=0$.

Рассмотрим далее интегралы второй группы. Пары интегралов при каждом фиксированном λ в этой группе представляют комплексно сопряжённые друг к другу значения. В самом деле, в этом убеждаемся, сделав замену переменной интегрирования $z\Rightarrow z'=z^*$ во втором интеграле, заключённом в скобки и приняв во внимание, что

$$\begin{gathered}
U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z^*)\;=\;(z^*)^{-1}\left(-i\lambda+(z^*)^\lambda\right)\exp\left[is\lambda(z^*)^\lambda\right]\exp\left[-i\lambda u(z^*)^{-\lambda}/2\right]\;=\\
=\;\left(z^{-1}\left(i\lambda+z^\lambda\right)\exp\left[-is\lambda z^\lambda\right]\exp\left[i\lambda uz^{-\lambda}/2\right]\right)^*\;=\;[U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)]^*\;,
\end{gathered}$$

и, поэтому,

$$\int\limits_{iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)dz=\int\limits_{-iM,z\in\mathrm{C}_+(M)}^{M}U_{\lambda,-\lambda}(u,s,(z')^*)(dz')^*=$$

$$= \int\limits_{-iM, z\in C_+(M)}^{M} [U_{\lambda,\lambda}(u,s,z')]^*(dz')^* = \left[\int\limits_{-iM, z\in C_+(M)}^{M} U_{\lambda,\lambda}(u,s,z')dz' \right]^* .$$

Следовательно, группу интегралов $D^{(2)}(u,s;M)$ можно представить в виде

$$D^{(2)}(u,s;M) \; = \; 2\sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \,\mathrm{Re} \int\limits_{iM, z\in C_+(M)}^{M} U_{\lambda,-\lambda}(u,s,z)dz\,.$$

Переходя к пределу $M\to\infty$, получаем

$$D^{(2)}(u,s) = \lim_{M\to\infty} D_2(u,s;M) = 2D_{**}(u,s)\,. \tag{3.29}$$

Тогда, на основании Леммы 4,

$$D^{(2)}(u,s) = 2\pi\delta(s)\,. \tag{3.30}$$

Первая группа интегралов в (3.28) преобразуется следующим образом. Введём функцию

$$D_\lambda(u,s) \; = \int\limits_{-i, z\in C_+}^{i} z^\lambda \exp[-is\lambda z^\lambda]\exp[iu\lambda z^{-\lambda}/2]\frac{dz}{z}\,. \tag{3.31}$$

Выразим рассматриваемую группу интегралов в терминах этой функции

$$D^{(1)}(u,s) = \sum_{\lambda=\pm 1}\lambda \int\limits_{i, z\in C_+}^{-i} U_{\lambda,\lambda}(u,s,z)dz = \sum_{\lambda=\pm 1}\lambda \int\limits_{i, z\in C_+}^{-i} (i\lambda + z^\lambda)\exp\left(-is\lambda z^\lambda + i\lambda u z^{-\lambda}/2\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= -\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda\left(D_\lambda(u,s) + 2\frac{\partial}{\partial u}D_\lambda(u,s)\right)\,. \tag{3.32}$$

Интеграл $D_\lambda(u,s)$ обладает свойством

$$D^*_{-\lambda}(u,s) \; = \; -D_\lambda(u,s)\,,$$

в котором легко убедиться, переходя к интегрированию по $\varphi = \arg z, z = e^{i\varphi}$,

$$D_\lambda(u,s) \; = \; i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\lambda\varphi}\exp[-is\lambda e^{i\lambda\varphi}]\exp[iu\lambda e^{-i\lambda\varphi}/2]d\varphi\,.$$

Указанное свойство позволяет избавиться от суммирования по λ в (3.31) и написать

$$\sum_{\lambda=\pm 1}\lambda D_\lambda(u,s) = 2\mathrm{Re}D_1(u,s)\,,$$

$$D^{(1)}(u,s) = -2\mathrm{Re}\left(D_1(u,s) + 2\frac{\partial}{\partial u}D_1(u,s)\right) =$$

$$= -2\left(D_*(u/2,s) + 2\frac{\partial}{\partial u}D_*(u/2,s)\right) = -2\mathsf{Q}D_*(u,s)\,.$$

где мы воспользовались определением (3.10). Отсюда и из формул (3.28),(3.30) вместе с равенством $D^{(3)}(u,s) = 0$, мы приходим к выводу о справедливости формулы (3.26). ■

Теорема 4. *Плотность распределения $q(x,t)$ определяется формулой*

$$q(t+x/\alpha,x) = \frac{1}{2}e^{-\nu x/\alpha}\Big[\delta(t) +$$

$$+e^{-\nu t}\theta(t)\left(\mathrm{I}_0\left(2\nu\sqrt{xt/\alpha}\right) + \sqrt{x/\alpha t}\;\mathrm{I}_1\left(2\nu\sqrt{xt/\alpha}\right)\right)\Big]\,. \tag{3.33}$$

□ Заметим, что вероятность $Q(t,x) = \Pr\{\tilde\varepsilon(t;\tilde\xi) \geq x\}$ равна нулю при $t < x/\alpha$, так как не существует траекторий случайного процесса $\langle\tilde\zeta(t); t\in\mathbb{R}\rangle$, для которых реализуется случайное время $\tilde\tau(x) < x/\alpha$. Кроме того, для $t > x/\alpha$, вероятность $Q(t,x) \geq e^{-\nu x/\alpha}/2 > 0$. Поэтому, функция распределения $Q(t,x)$ и, следовательно, её плотность $q(t,x)$ пропорциональны $\theta(t - x/\alpha)$.

На основании Леммы 5 и Следствия Леммы 3, используя формулы (3.18) и (3.26), находим, что справедлива формула

$$q_*(u,s) = \frac{1}{4\pi}e^{-(s+u/2)}D(u,s) \tag{3.34}$$

для любого $\delta > 0$, где функция $D(u,s)$ определяется (3.25). Рассмотрим сумму интегралов

$$\sum_{\lambda,\mu=\pm1}\lambda\int\limits_0^M\left(\lambda + \frac{(i\mu+v)}{\sqrt{v^2-1+i0}}\right)\exp\left[-is\mu\left(v + \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\mu(u/2)\left(v - \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right]dv\,. \tag{3.35}$$

Малые смещения $+i0$ переменной интегрирования v в подкоренных выражениях в комплексной плоскости производятся с целью однозначного выбора ветви квадратного корня в подинтегральном выражении. Эта ветвь выбирается таким образом, чтобы значения квадратного корня $\sqrt{v^2-1}$ было положительным при $v^2 > 1$. При этом разрез на комплексной плоскости v проходит по отрезку $[-1,1]$ действительной оси.

Произведём замену переменной интегрирования $z = v + \sqrt{v^2-1+i0}$, для которой $z^{-1} = v - \sqrt{v^2-1+i0}$, $v = (z^2+1)/2z$, $dv = [(z^2-1)/2z^2]\,dz$ в интегралах этой суммы так, что интегралы по v от точки 1 до M перейдут в интегралы по z по тому же отрезку, а интегралы по v от 0 до 1, когда $z = v + \sqrt{-|1-v^2|+i0} = v + i\sqrt{|v^2-1|}$, $\quad |z|^2 = 1$, перейдут в интегралы по z по дуге C_+ от точки i до точки 1. В результате такой замены, рассматриваемая сумма интегралов превращается в сумму интегралов, стоящую в правой части формулы (3.25), которая определяет функцию $D(u,s;M)$. Поэтому, сумма (3.35) равна указанной функции,

$$D(u,s;M) = \sum_{\lambda,\mu=\pm 1} \int\limits_0^M \left(1 + \frac{\lambda(i\mu + v)}{\sqrt{v^2-1+i0}}\right) \exp\left[-is\mu\left(v + \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[i\mu(u/2)\left(v - \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] dv\,. \qquad (3.36)$$

Заменим переменные суммирования в правой части равенства $\lambda\mu \Rightarrow \lambda$,

$$D(u,s;M) = \sum_{\lambda,\mu=\pm 1} \int\limits_0^M \left(1 + \frac{\lambda(i + \mu v)}{\sqrt{v^2-1+i0}}\right) \exp\left[-is\left(\mu v + \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[i(u/2)\left(\mu v - \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] dv \qquad (3.37)$$

и выполним суммирование по μ. Это достигается заменой переменной интегрирования $v \Rightarrow -v$ в интеграле со значением $\mu = -1$. [¶] При этом интеграл с указанным значением μ переходит в интеграл со значением $\mu = 1$, но по полуоси $v \in (-\infty, 0]$. Сумма по μ получается сложением обоих интегралов и, поэтому, [‖]

$$D(u,s;M) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int\limits_{-M}^M \left(1 + \frac{\lambda(i + v)}{\sqrt{v^2-1+i0}}\right) \exp\left[-is\left(v + \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[i(u/2)\left(v - \lambda\sqrt{v^2-1+i0}\right)\right] dv \qquad (3.38)$$

или, после преобразования подинтегрального выражения,

$$D(u,s;M) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int\limits_{-M}^M \exp[iv(u/2-s)] \left(1 + \frac{\lambda(i + v)}{\sqrt{v^2-1+i0}}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-i\lambda(u/2+s)\sqrt{v^2-1+i0}\right] dv =$$

[¶]Заметим, что в интеграле по отрезку $[1, M]$ смещение пути интегрирования на $i0$ можно опустить, так как разрез нами проведен по положительной полуоси и на отрицательной оси квадратный корень определён однозначно.

[‖]Заметим, что каждое из слагаемых в подынтегральном выражении в (3.38) ведёт себя различным образом при $v \to \infty$ и $v \to -\infty$. В одном случае стремится к нулю и, тем самым, даёт сходящееся выражение на соответствующем пределе интегрирования, а в другом случае – приводит к расходимости интеграла. Поэтому, при исследовании характера этой расходимости, удобно представить его в виде суммы $\int\limits_{-M}^{M} = \int\limits_{0}^{M} + \int\limits_{-M}^{0}$.

$$= 2\int\limits_{-M}^{M} \exp[iv(u/2-s)]\left(\cos\left[(u/2+s)\sqrt{v^2-1+i0}\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{iv-1}{\sqrt{v^2-1+i0}}\sin\left[(u/2+s)\sqrt{v^2-1+i0}\right]\right)dv\,,$$

Используя это интегральное представление, на основании формулы (3.34), получаем

$$q_*(u,s-u/2) = \frac{e^{-s}}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}\exp[iv(u-s)]\left(\cos\left[s\sqrt{v^2-1+i0}\right] + \right.$$

$$\left. +\frac{1-iv}{\sqrt{v^2-1+i0}}\sin\left[s\sqrt{v^2-1+i0}\right]\right)dv \qquad (3.39)$$

для $s\in(-\delta,\infty)$. Здесь предел понимается в слабом смысле. Он определяет обобщённую функцию над пространством ограниченных непрерывных функций, которая содержит δ-функционную особенность. Заметим, что в этой формуле смещение $i0$ можно опустить, так как оба слагаемых в подинтегральном представлении являются чётными функциями относительно $\sqrt{v^2-1+i0}$ и, поэтому, на самом деле, точки ветвления в подинтегральном выражении отсутствуют. Опустив эти смещения, перейдём в интегральном представлении (3.39) к интегрированию по оси $\{y=iv+0; v\in\mathbb{R}\}$,

$$q_*(u,s-u/2) = \frac{e^{-s}}{2\pi i}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-iM+0}^{iM+0}\exp[y(u-s)]\left(\mathrm{ch}\left[s\sqrt{y^2+1}\right] + \frac{1-y}{\sqrt{y^2+1}}\mathrm{sh}\left[s\sqrt{y^2+1}\right]\right)dy =$$

$$= \frac{e^{-s}}{2\pi i}\lim_{M\to\infty}\frac{\partial}{\partial u}\int\limits_{-iM+0}^{iM+0}\exp[y(u-s)]\left(\mathrm{ch}\left[s\sqrt{y^2+1}\right] + \frac{1-y}{\sqrt{y^2+1}}\mathrm{sh}\left[s\sqrt{y^2+1}\right]\right)\frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{e^{-s}}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial u}\int\limits_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\exp[y(u-s)]\left(\mathrm{ch}\left[s\sqrt{y^2+1}\right] + \frac{1-y}{\sqrt{y^2+1}}\mathrm{sh}\left[s\sqrt{y^2+1}\right]\right)\frac{dy}{y}\,, \qquad (3.40)$$

где производная от интеграла в бесконечных пределах, понимаемого как слабый предел при $M\to\infty$, является производной от обобщённой функции, которая определяется этим пределом. Выразим плотность распределения в переменных $s=\nu t$ и $u=2x\nu/\alpha$, $\partial(\cdot)/\partial u = (\alpha/2\nu)\partial(\cdot)/\partial x$. В результате, после замены переменной интегрирования $2\nu y/\alpha \Rightarrow y$, представим плотность $q(x,t)$ в следующем виде

$$\nu q_*\left(2\nu x/\alpha, \nu\left(t-x/\alpha\right)\right) = \alpha\frac{e^{-\nu t}}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\exp[y(x-\alpha t/2)]\left(\mathrm{ch}\left[t\,\omega(y)\right] + \right.$$

$$\left. +\frac{\nu-\alpha y/2}{\omega(y)}\mathrm{sh}\left[t\,\omega(y)\right]\right)\frac{dy}{y}\,, \qquad (3.41)$$

где мы воспользовались формулой (2.7),

$$\omega(y) = \left(\nu^2 + (\alpha y/2)^2\right)^{1/2} .$$

Сравнивая правую часть формулы (3.41) с правой частью формулы (3.3) при $x = E$ и $t > -0$, где плотность $q(x,t)$ отлична от нуля, находим, что

$$q(t,x) = \nu q_* \left(2\nu x/\alpha, \nu\left(t - x/\alpha\right)\right) .$$

Подставив явное выражение (3.8) плотности $q_*(u,s)$ и учитывая $\nu\delta(\nu t) = \delta(t)$, получаем, при указанных выражениях u и s, формулу (3.33). ■

Литература

1. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / М.: Наука, 1980.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.I / М.: Наука, 1971.– 664 с.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надёжности / М.: Наука, 1965.
4. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике / М.: Мир, 1965.
5. Дынкин Е.Б. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл.АН СССР. –1955. – Вып.104, №5. – С.691-694.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.2 / М.: Мир, 1984. – 715 с.
7. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей / М.: Наука, 1969.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / М.: Наука, 1971.

PROBABILITY DISTRIBUTION OF FIST PASSAGE TIME OF ENERGY FUNCTIONAL ON DICHOTOMIC RANDOM PROCESS TRAJECTORIES

M.I. Abramova, Yu.P. Virchenko

Belgorod National Research University,
e-mail: abramova_m@bsu.edu.ru

Abstract. Probability distribution $Q(t,E)$ of random first passage time $\tilde{\tau}(E)$ of level E attainment of energy functional $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ is studied. Specified problem is investigated when the intensity $\tilde{\xi}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})/dt$ is the dichotomic random process. For the density $q(t,E) = dQ(x,t)/dt$, the integral representation is found in terms of special functions.

Key words: instant of level attainment, dichotomic process, first passage time problem, integral approximation, markovian process, probability distribution density, energy functional.