MSC 35L55

К ТЕОРИИ СПЕКТРА 2×2- ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: v_v_kornien@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$, порождённых задачей Дирихле для гиперболических систем второго порядка изучены спектры: $C\sigma L = R\sigma L$ – пустое множество; точечный спектр $P\sigma L$ располагается на вещественной прямой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В случае гиперболической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае гиперболической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$.

Ключевые слова: гиперболические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, ортогональный базис, базис Рисса.

Работа авторов посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для гиперболической системы (1) без «младших членов» вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} & = & \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} & = & \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{1}$$

и для гиперболической системы (2) с «младшими членами», но независимым переменным t и x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial u^1}{\partial t} & = & \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} + \dfrac{\partial u^1}{\partial t} & = & \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{2}$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x} = (0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0 \tag{3}$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для гиперболических систем [1] и более общих, так называемых симметричных [2] и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [3].

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [4].

Исследованию свойств разрешимости задачи Коши для простейшей гиперболической системы первого порядка в «линзообразной области», посвящена работа [3]. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены. Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [5], [6] [7]. Спектральные свойства задачи Дирихле для гиперболических систем первого порядка и систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [8], [9], [10]. Также, как и в работах [9], [10] системы дифференциальных уравнений (2) и (3) для удобства будем называть гиперболическими системами первого типа с младшими членами. Гиперболической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u^2}{\partial x} & = \lambda u^1 + f^1\,, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} & = \lambda u^2 + f^2\,, \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (2) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (4). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае гиперболических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [12], а также при изучении гиперболических систем в [8].

Обозначим символами $e_i = (\delta_i^1\ \delta_i^2)^{\mathrm{T}}$, $i = 1,\,2$; ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_2^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}_2^2$— унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$; со скалярным произведением $(u, v;\, \mathcal{U}_2^2) = u^1\overline{v^1} + u^2\overline{v^2}$.

Пусть $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{L}_2^2(V_{t,x})$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \to \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$\left|u; \mathcal{H}_{t,x}^2\right|^2 = \iint\limits_{V_{t,x}} \left|u(\tau,\,\xi);\, \mathcal{U}_2^2\right|^2\, d\tau\, d\xi.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(t,x)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\left(\overline{\Omega_{t,x}}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega_{t,x}\right)$ и удовлетворяющих условиям (3).

Опишем вначале спектральные свойства гиперболической системы первого типа без младших членов.

Гиперболическая система без младших членов. Обозначая символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [5, с. 25], [7, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно. Точно также, как и в работе [11] доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (1), (3), *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + (-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), *представима в виде*

$$u_{m,k,s}(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(e_1 + (-1)^{m+1} e_2\right) \sin(kt)\sin(sx)\,.$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) \;:\; m = 1, 2;\; k \in \mathbb{N};\; s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность

$$u_{m,k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt)(e_1 + (-1)^m e_2)$$

является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$ и воспользоваться доказанном в [9] представлением $\mathcal{H}_{t,x}$ в виде тензорного произведения произведения пространств гильбертовых пространств $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

Гиперболическая система с младшими членами. Также, как и в случае гиперболической системы без младших членов обозначим символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (2), (3) *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество*

$C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = -\frac{1}{4} + (-1)^m \lambda_s - 4k^2; \quad \lambda_s = -\frac{1}{4} - \frac{s^2}{2}; \quad m = 1,2; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad s \in \mathbb{Z}\,. \tag{6}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде:

$$u_{m,k,s}(t,x) = e^{\frac{x}{2}} \sin x \Big(e_1 - (-1)^m e_2\Big) e^{-\frac{t}{2}} e^{i2kt}\,. \tag{7}$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N}\}$ вектор-функций

$$u_{m,k}(t) = e^{\frac{t}{2}} e^{i2kt}(e_1 + (-1)^m e_2) \tag{8}$$

является базисом Рисса в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t\,,$$

$\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением гильбертова пространства $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

Литература

1. Дезин А.А. Смешанные задачи для некоторых симметрических гиперболических систем // ДАН СССР. – 1956. – 107, №1. – С.13-16.
2. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Матем. сборник. – 1959. – 49(91), №4. – С.459-484.
3. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV, вып. 3(87). – С.21-73.
4. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286, №1. – С.47-50.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач /- М.: Наука, 1980. – 207 с.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов / М.: Гос.из-во физ.-мат. литературы, 1958. – 508 с.
7. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
8. Корниенко Д.В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина. – Вып. 5: Серия «Математика, физика». – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – С.71-78.
9. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №1. – С.91-100.
10. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №8. – С.1063-1071.

11. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика Физика. – 2010. – №17(88). – Вып.20. С.5-9.
12. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17,№10. – С.1851-1858.

TO THEORY OF 2×2-HYPERBOLIC SYSTEM SPECTRUM

V.V. Kornienko, D.V. Kornienko

Eletz State University I.A. Bunin,
Kommunarov St., 28, Eletz, 399770, Russia, e-mail: v_v_kornien@mail.ru, dmkornienko@mail.ru

Abstract. For closed differential operators $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$, generated by the Dirichlet problem connected with hyperbolic systems of second-order, following spectra are studied: $C\sigma L = R\sigma L$ is empty set; point spectrum of $P\sigma L$ is located on the real line in the complex plane $\mathbb{C}$. In the case of a hyperbolic system without the minor terms eigenvector-function of the operator L form an orthogonal basis. In the case of a hyperbolic system with minor terms of the vector-valued function of the operator L form the Riesz basis, being non-orthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$.

Key words: hyperbolic systems, boundary-value problems, closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, basis Riesz.