МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 70F99

О ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЛИУВИЛЛЯ КАК УРАВНЕНИИ ДИНАМИКИ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Учайкин

Ульяновский государственный университет,
Ульяновск, Россия, e-mail: vuchaikin@gmail.com

Аннотация. Показано, что переход от описания эволюции замкнутой гамильтоновой системы к эволюции открытой системы как её подсистемы сопровождается преобразованием уравнения Лиувилля к его дробно-дифференциальному (по времени) аналогу.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, гамильтонова система, дробное дифференцирование, открытая система.

Последние десять лет отмечены рождением специфического направления математической физики, представленного серией выполненных разными авторами работ, построенных по одной и той же схеме: берётся известное уравнение (Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Лиувилля, ББГКИ, Больцмана, Максвелла, Ланжевена, Фоккера-Планка, Навье-Стокса, Власова, Гинзбурга-Ландау, Бюргерса, Кортевега де Вриза, Шредингера, Гейзенберга и др. – см библиографию в [1,2]) и первая (или вторая) производная по времени (или координате) в нём заменяется производной нецелого (дробного) порядка, после чего решается какая-нибудь несложная задача. Если с классическим уравнением связаны некоторые преобразования (например, вывод законов сохранения импульса и энергии из кинетического уравнения Больцмана), они повторяются и для дробно-дифференциального уравнения. Однако в большинстве случаев всё этим и кончается, до серьёзных расчётов дело редко доходит[1]. И проблема состоит, на мой взгляд, в том, что отсутствует общепринятая интерпретация дробной производной. То есть, не то, чтобы совсем отсутствует, но часто производная дробного порядка выскакивает как «чёрт из табакерки» со ссылкой на фракталы, на сложность, неупорядоченность, (мне приходилось встречать фразу о том, что дробные производные используются авторами из-за чрезвычайной запутанности траекторий! – этого им показалось достаточно для оправдания дробного порядка), на нелинейность (что уж совсем неправильно: дробные степени линейных операторов остаются линейными операторами!) и т.п. Недостаточная ясность интерпретации – не только моё личное мнение. Этот вопрос является постоянной темой круглых столов, завершающих конференции по развитию и применению дробно-дифференциального аппарата.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России 2014/296, при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проекта 13-01-00585.

[1] Я говорю здесь о типичных работах. Есть, разумеется, и замечательные работы, содержащие новые и интересные результаты, но их относительно немного, гораздо меньше, чем можно было бы ожидать от применения такого мощного математического аппарата.

Простейшая форма производной дробного порядка $\nu \in (0,1]$ даётся сочетанием интегрального оператора дробного порядка $\mu = 1-\nu$

$$ {}_a\mathrm{I}_t^{\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_a^t (t-t')^{\mu-1} f(t')dt' $$

(продолжающего известную формулу Коши для многократного повторного интеграла в область нецелых порядков) с обычным оператором дифференцирования. В зависимости от порядка следования этих операторов получается производная Римана-Лиувилля

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu} f(t) = \frac{d}{dt}\, {}_a\mathrm{I}_t^{1-\nu} f(t) $$

или Герасимова-Капуто

$$ {}_a^{\nu}\mathrm{D}_t f(t) = {}_a\mathrm{I}_t^{1-\nu} \frac{d}{dt} f(t) $$

порядка $\nu \in (0,1)$. Поскольку порядки интегральных и дифференциальных операторов теперь образуют непрерывные множества, по ним можно интегрировать и даже дифференцировать. Кроме того, они (порядки) могут быть и комплексными. В конце работы нам понадобится интегральный оператор распределённого комплексного порядка со спектральной функцией $w(\mu)$, определяемый формулой

$$ {}_0\mathrm{I}_t^{\{w(\cdot)\}} f(t) \equiv \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} w(\mu)\; {}_0\mathrm{I}_t^{\mu} f(t) d\mu\,. $$

Вот несколько примеров применения дробных производных к решению простейших задач механики.

В работе [3] на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона решается задача о падении тел в атмосфере. Не затрудняя себя обоснованием постановки такой задачи, автор ссылается на использование дробных производных для описания процессов с диссипацией и далее просто сопоставляет получаемые решения с классическими. Начав с простейшего случая – падения тела в отсутствия силы сопротивления,

$$ m_\nu\; {}_0^{\nu}\mathrm{D}_t V = mg\,, \qquad (1) $$

он приходит к решению

$$ V(t) = V_0 + \frac{mgt^{\nu}}{m_\nu \Gamma(1+\nu)}\,, $$

из которого следует

$$ x(t) = \int\limits_0^t V(\tau)d\tau = x_0 + V_0 t + \frac{mgt^{\nu+1}}{m_\nu \Gamma(2+\nu)} $$

(здесь и выше V_0 – начальная скорость, x_0 – начальная координата вдоль оси, направленной вниз). Заметим, что при малых временах наблюдается б'ольшая скорость, чем в случае обычного падения ($t^\nu > t$ при $\nu < 1$), тогда как при больших временах ситуация обратная, и этот факт как-то трудно согласуется с влиянием диссипации. Очевидна также проблема размерности коэффициента m_ν: она не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. Чтобы обеспечить согласие с размерностью энергии, в [4, 5] было предложено выражать импульс в виде

$$p_\nu = m_\nu \, {}_0^\alpha\mathrm{D}_t x(t), \quad \alpha = (1+\nu)/2\,.$$

В результате выражение для полной энергии принимает вид

$$E = \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} + U(x) = \frac{m_\nu}{2}\left[{}_0^\alpha\mathrm{D}_t x(t)\right]^2 - mgx\,.$$

Каких-либо дополнительных аргументов в оправдание этих конструкций в работе не приводится, сказано только, что при $\nu \to 1$ все эти формулы принимают обычный для классической механики вид. Кроме того, приведено решение этой задачи с учётом сопротивления среды,

$$m_\nu \, {}_0^\nu\mathrm{D}_t V + bV = mg\,, \tag{2}$$

и дана даже (не очень, впрочем внятная) ссылка на эксперимент: свободное падение шести тел (в оригинале «men») в атмосфере со средним весом одного тела 261,2 фунта с высоты от 31 400 до 2 100 футов удовлетворительно описывается дробно-дифференциальным решением с $\nu = 0,998$ и $m/m_\nu = 1,457$. Беда лишь в том, что и классическое решение хорошо описывает этот процесс.

Приведённая выше формулировка дробной динамики не единственна. Так, Балеану с соавторами [6] построил иную версию такого обобщения, введя *дробную скорость* and *дробный импульс* на интервале $[a,b]$ соотношениями

$$V(t) = (1/2)(A\, {}_a^\alpha\mathrm{D}_t + B\, {}_t^\beta\mathrm{D}_b)x(t)\,,$$

и

$$p(t) = (m/2)(A\, {}_a^\alpha\mathrm{D}_t + B\, {}_t^\beta\mathrm{D}_b)x(t) = p_\alpha + p_\beta\,,$$

соответственно, где $0 < \alpha,\ \beta \le 1$, а A и B – постоянные с размерностями $T^{\alpha-1}$ и $T^{\beta-1}$. В результате дробный аналог второго закона Ньютона получился в виде уравнения

$$(1/2)(\kappa_\alpha\, {}_t\mathrm{D}_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta\, {}_a\mathrm{D}_b^\beta p_\beta) = F\,, \tag{3}$$

дополненного *трансверсальным условием*

$$\Big[\, {}_t\mathrm{D}_b^{\alpha-1} p_\alpha - {}_a\mathrm{D}_t^{\beta-1} p_\beta \Big]_a^b = 0\,. \tag{4}$$

Авторы отмечают, что при $\alpha = 1,\ \beta = 1$

$${}_a\mathrm{D}_t^\alpha = {}_a^\alpha\mathrm{D}_t = {}_t\mathrm{D}_b^\alpha = {}_t^\alpha\mathrm{D}_b = \frac{d}{dt}\,,$$

и уравнения (3)-(4) сводятся к стандартному ньютонову уравнению. Это действительно так. Но последующее замечание: «Если обобщённая сила в уравнении (3) равна нулю, то обобщённый закон Ньютона запишется в виде:$\kappa_\alpha\ {}_t\mathrm{D}_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta\ {}_a\mathrm{D}_t^\beta p_\beta = 0$» вызывает некоторое недоумение. Первый закон Ньютона не является просто следствием второго (иначе он не входил бы в систему ньютоновых аксиом). Первый закон выделяет из всех возможных систем отсчёта семейство инерциальных систем, в которых и «работает» второй закон. Используемые в предыдущих формулировках *нелокальные во времени* определения импульсов не могут удовлетворить галилеевым преобразованиям и могли бы иметь смысл для частиц, находящихся в некоторой среде, обеспечивающей нарушения трансляционных свойств лагранжиана системы во времени и пространстве.

Поучительно в этом смысле напомнить задачу о движении движении тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости. На горизонтальной поверхности $z = 0$ (ось z направлена вверх) бесконечно глубокого слоя ($-\infty < z < 0$) такой жидкости находится больших размеров тонкая пластина, к которой приложена горизонтальная же сила $F(t)$, увлекающая её вместе с прилегающими слоями жидкости в движение вдоль оси x. Движение пластины описывается уравнением Ньютона

$$m\frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t)\,, \tag{5}$$

где $Q(t) = -S\eta\partial v(z,t)/\partial z|_{z=0}$ – сила сопротивления, действующая на пластину со стороны жидкости, $v(z,t)$ – x-компонента скорости жидкости на глубине z (остальные компоненты её равны нулю). По условию прилипания $V(t) = v(0,t)$, а поле скоростей $v(z,t)$ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,. \tag{6}$$

В системе уравнений (5)-(6), описывающей механическую систему тело+жидкость, все производные целого порядка и все операторы дифференциальные. Инфинитезимальная эволюция в любой момент времени t зависит только от состояния $(V(t), v(z,t))$ в этот же момент, и по этой причине дальнейшая эволюция системы при заданном состоянии не зависит от предыстории (по вероятностной терминологии процесс марковский).

Но вот, выполняя известные процедуры [7], мы исключаем из этой системы переменную $v(z,t)$ и получаем уравнение для оставшейся переменной – скорости пластины. Если при $t < 0$ жидкость вместе с пластиной находились с покое, а приложенная затем сила ограничена по величине, остающееся уравнение вид

$$m\frac{dV}{dt} = F - S\sqrt{\eta\rho}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{dV(\tau)}{d\tau}d\tau\right]\,.$$

Теперь это – интегро-дифференциальное уравнение вольтерровского типа с запаздывающим аргументом неизвестной функции под интегралом. Более того, заключённый в квадратные скобки член представляет собой дробную производную порядка $\nu = 1/2$ (при указанных условиях различие между обоими типами производных исчезает).

Перепишем это уравнение в виде

$$m\frac{dV}{dt} + S\sqrt{\eta\rho}\ {}_0^{\nu}\mathrm{D}_t V = F(t)\,. \tag{7}$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени t в точке (x, z) напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя (x', z), где они находились, скажем, в момент $t' < t$. В силу трансляционной инвариантности решения относительно x, такое же распределение скоростей в этот момент (t') имело место и в точке наблюдения (x, z). Это и есть простейший механизм эредитарности – «механическая» память.

Аналогичное уравнение для движения шара массой m и радиуса a в вязкой среде имеет вид

$$m\frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t)\,,$$

где сила сопротивления $Q(t)$ дается формулой

$$Q(t) = -6\pi\eta a V(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3\frac{dV(t)}{dt} - 6\pi\eta a^2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{dV(\tau)}{d\tau}d\tau\,,$$

выведенной в работах Буссинеска [8] и Бассэ [9]. Первый член здесь представляет силу Стокса, второй – инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию присоединенной массы шара, третий пропорционален дробной производной порядка $\nu = 1/2$ [7]. Если до начального момента $t = 0$ тело покоилось, нижний предел в последнем интеграле можно заменить нулем:

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right)\frac{dV(t)}{dt} + 6\pi a^2\sqrt{\rho\eta}\ \ {}_0^{\nu}\mathrm{D}_t V + 6\pi\eta a V(t) = F(t)\,. \tag{8}$$

Как следует из тауберовой теоремы, главная асимптотическая (при $t \to \infty$) часть $V^{\mathrm{as}}(t)$ решений уравнений (7) и (8) удовлетворяет укороченным уравнениям дробного порядка $\nu = 1/2$

$$S\sqrt{\eta\rho}\ \ {}_0^{\nu}\mathrm{D}_t V^{\mathrm{as}}(t) = F(t) \tag{9}$$

и

$$6\pi a^2\sqrt{\rho\eta}\ \ {}_0^{\nu}\mathrm{D}_t V^{\mathrm{as}}(t) + 6\pi\eta a V^{\mathrm{as}}(t) = F(t) \tag{10}$$

соответственно. И теперь ясно видно заблуждение авторов цитированных выше работ относительно интерпретации дробных производных в уравнениях (1)-(2): это не аналоги ускорительных членов уравнения Ньютона, это влияние внешней среды, определяющей асимптотическое поведение тела, когда действие инерциальной силы истощилось. По этой причине и начальные условия приложить к этим остаткам ньютоновых уравнений нельзя, и размерность коэффициентов при дробных производных не надо «натягивать» на размерность массы. Не имеет физического смысла уравнение для скорости (координаты), старшая производная в котором имеет дробный порядок, меньший единицы (двойки), иначе как остаток ньютонова уравнения для асимптотического (при $t \to \infty$) члена его решения.

Рассмотрим ещё один пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой m_1 с коэффициентом трения о её стенки η, соединённый пружинкой длиной l и жесткостью $k > (\eta/2)^2$ с шариком массы m_2, движущимся в трубке без трения. К шарику с момента $t = 0$ приложена ограниченная по абсолютной величине сила $F(t)$. Мы имеем дело с динамической системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$m_1\ddot{x}_1 = -\eta\dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l)\,,$$

$$m_2\ddot{x}_2 = F(t) - k(x_2 - x_1 - l)\,.$$

Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = l\,, \quad \dot{x}_2(0) = 0\,,$$

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Решение первого уравнения относительно x_1 (в предположении, что $x_2(t)$ известно) при заданных условиях выражается через его функцию Грина

$$G(t) = \frac{1}{m_1\omega_1}\exp\left(-\frac{\eta t}{2m_1}\right)\sin(\omega_1 t)\,, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2}$$

соотношением

$$x_1(t) = \int\limits_0^t G(t-\tau)k[x_2(\tau) - l]d\tau\,.$$

Подставив это решение во второе уравнение системы, получаем замкнутое уравнение для части 1 рассматриваемой системы, имеющее теперь интегро-дифференциальный вид:

$$m_2\ddot{x}_2 + kx_2 = k^2\int\limits_0^t G(t-\tau)x_2(\tau)d\tau + F_2(t)\,, \tag{11}$$

со свободным членом

$$F_2(t) = F(t) + kl\left[1 - k\int\limits_0^t G(\tau)d\tau\right]\,.$$

Заметим, что мы опять получили тот же результат: исключая из рассмотрения одну из взаимодействующих между собой частей системы, описываемой уравнениями Ньютона (иными словами, марковской системы), мы обнаруживаем, что оставшаяся часть управляется интегро-дифференциальным уравнением. Теперь это – немарковский процесс, процесс с памятью.

Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружинкой и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (11). Влияние предыстории $x_2(t-\tau)$ движения шарика на его поведение в момент времени t осуществляется через невидимую (скрытую) переменную $x_1(t)$. Не наталкивает ли это на мысль, что наличие таких интегралов с запаздыванием может свидетельствовать о наличии скрытых переменных? Естественно, наталкивает. Еще Зенер, комментируя интегральный (эредитарный, но вольтерровой терминологии) член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру [10]. А между тем, эредитарность – это явный шаг в сторону дробно-интегрального оператора. Достаточно найти аргумент в пользу специфического вида ядра интегрального оператора $K(t,t')$: предположить, скажем, его инвариантность относительно сдвига во времени

$$K(t,t') = K_0(t-t')$$

(что в двух приведённых выше примерах получалось как бы само собой), а затем потребовать и однородности в эйлеровом смысле:

$$K_0(a\tau) = a^{\alpha} K_0(\tau)\,.$$

Последнее требование, конечно, ни из каких «первых принципов» не проистекает и может быть введено лишь под давлением каких-нибудь очевидных, например, экспериментальных фактов. Такой подход был использован нами в обосновании дробно-дифференциальной кинетики дисперсионного переноса [11] (см. также развёрнутое изложение этого подхода в книге [12]). В принципе, эйлерова однородность связана с самоподобием системы [13]. Самоподобные системы составляют особый класс открытых систем, не являющихся подсистемами замкнутых систем (назовём его классом A). Рассмотренные выше примеры относились к другому классу открытых систем, которые являются подсистемами замкнутых систем (обозначим этот класс символом B). Обсуждением системы класса B я и хочу закончить эту заметку.

Согласно Линдбладу [14], замкнутая гамильтонова система, управляемая не зависящим от времени гамильтонианом H, разбивается на две подсистемы – основную (S) и её окружение (E), так что сам гамильтониан принимает вид

$$H_{S+E} = H_S \otimes 1_E + 1_S \otimes H_E + \alpha H_{SE}\,,$$

где 1_S и 1_E – тождественные операторы на гильбертовых пространствах состояний соответствующих подсистем, H_{SE} – гамильтониан взаимодействия, действующий на прямом произведении этих пространств. Статистический оператор полной системы удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{d\rho_{S+E}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[H_{S+E}, \rho_{S+E}(t)\right]\,,$$

представляемому в виде

$$\frac{d\rho_{S+E}(t)}{dt} = \mathcal{L}_{S+E}\rho_{S+E}(t) \equiv (\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{SE})\rho_{S+E}(t)\,. \tag{12}$$

В предположении, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ подсистемы S и E некоррелированы,

$$\rho_{S+E}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)\,,$$

применение проекционных супероператоров P (подробности см., напр., в [15]) позволяет записать уравнение для основной подсистемы в виде

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int\limits_0^t G(t-\tau)\rho_S(\tau)d\tau\,, \tag{13}$$

где

$$G(t) = \mathrm{Tr}_E\{\mathcal{L}_{SE}e^{t(1-P)\mathcal{L}_{SE}}\mathcal{L}_{SE}\rho_E(0)\}$$

– ядро памяти системы S.

Очевидно, мы имеем два способа предсказания эволюции открытых систем типа B. Первый способ: решив дифференциальное уравнение (12) эволюции *замкнутой системы* $S+E$ при заданных начальных условиях, выбрать из полученного решения всю информацию, касающуюся подсистемы S. Второй способ: решив интегро-дифференциальное уравнение (13) при заданных начальных условиях, получить информацию сразу об открытой системе данного типа, не вовлекая в процесс решения подсистему E. Последнее не означает, что мы игнорируем её влияние на S: интегральный член как раз и описывает передачу информации от подсистемы S в ранние времена t' через её окружение в неё же в более поздние времена t. Сюда же «вплетается» информация о начальном состоянии окружения (последний сомножитель в правой части $F(t)$.

Если речь идёт о пространственно разделённых подсистемах, а не о совмещённых в пространстве, как, например, электронная и ионная компоненты в кристалле, передача этой динамической информации осуществляется через поверхность подсистемы S. Результат зависит от отношения поверхность/объём. Для макроскопических образцов это отношение мало и таким обменом можно пренебречь (микроканонический ансамбль, представляющий открытую подсистему S как замкнутую), или ограничиться обменом некоррелированными малыми порциями (канонический и большой канонический ансамбли). В обоих этих случаях интеграл исчезает, и мы получаем традиционную механическую основу термодинамики.

С уменьшением размеров образца мы вступаем в область мезо- и далее – наномеханики. Число «действующих лиц» здесь резко сокращается (с 10^{23} атомов до сотен тысяч или даже вообще просто до сотен атомов). Роль поверхностных эффектов при этом во многом становится определяющей, и связанный с ними интеграл в уравнении (13) превращается в равноправного партнёра среди остальных членов уравнения.

Однако, причём здесь дробные операторы? Для ответа па этот вопрос представим функцию $F(t)$ с помощью её трансформанты Меллипа

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \bar{F}(s) ds\,, \;\; \sigma = \Re s$$

и подставим это выражение в интегральный член уравнения (13):

$$\int_0^t F(t-t')\rho_S(t')dt' = \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} W(s)\; {}_0\mathrm{I}_t^{1-s}\rho_S(t) ds\,.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\bar{F}(s)\,,$$

а

$${}_0\mathrm{I}_t^{1-s}\rho_S(t) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int\limits_0^t \frac{\rho_S(t')dt'}{(t-t')^s}$$

– интеграл комплексного порядка $\mu = 1 - s$. Переход от интеграла к дробной производной можно осуществить, скажем, регуляризацией но Адамару (выделением конечной части при $\mu < 0$). В совокупности с операцией умножения на весовой множитель и последующего интегрирования но s этот член уравнения образует дробную производную распределённого порядка со спектральной функцией $W(s)$. В результате уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \; {}_0\mathrm{D}_t^{\{w(\cdot)\}}\rho_S(t)\,. \tag{14}$$

Здесь $w(\nu)$ – спектральная функция для для показателей производной $\nu = s - 1$. Заметим, что уравнения в приведённых выше двух примерах систем (пластина+жидкость и демпфер+пружина) имеют, в принципе, вид уравнения (14). В первом из них спектр значений ν состоит из одной точки $\nu = 1/2$, во втором спектральная функция представляется в элементарных функциях:

$$w(\nu) = \frac{k^2}{m_1\omega_1} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau)\tau^\nu d\tau = k^2 \frac{\Gamma(\nu+1)\sin[(\nu+1)\mathrm{arctg}(\omega_1/\alpha)]}{m_1\omega_1(\alpha^2+\omega_1^2)^{(\nu+1)/2}}\,.$$

Подводя итоги, можно сказать следующее. Уравнение Лиувилля для матрицы плотности открытой системы класса B (то есть, являющейся частью замкнутой гамильтоновой системы) имеет вид (14), включающий в себя производную но времени первого порядка и дробную производную распределённого порядка. Именно спектральная функция и определяет специфику кинетики открытой системы этого класса, и задача теории мезоскопической кинетики заключается в развитии математического аппарата, удобного для вычисления или аппроксимации спектральной функции. Этот вывод и отличает данную работу от работы [17], посвящённой в принципе этой же тематике, но основанной па переходе к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Лиувилля путём прямого введения дробных операторов. При этом теряется производная первого порядка но времени, дробная производная содержит единственный показатель, исчезает спектральная функция и разрывается связь между классической и модифицированной схемами.

Литература

1. В.В. Учайкин, Метод дробных производных / Ульяновск: изд-во Артишок, 2008.
2. V.V.Uchaikin, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Vol's I-II / Berlin: Springer, HEP Beijing, 2013.
3. Kwok Sau Fa / Physica A. – 2005. – 350. – P.199.
4. B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke / Physica A. – 2001. – 297. – P.361.
5. Ya.E. Ryabov, A. Puzenko / Phys.Rev.B. – 2002. – 66. – 184201.
6. D. Baleanu, A.K. Golmankhaneh, R. Nigmatullin, Ali K. Golmankhaneh / Cent.Eur. J.Phys. – 2010. – 8, (1). – P.120.
7. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / М.: ГИТТЛ, 1955.
8. V.J. Boussinesq / Compt. Rend. de l'Academ. des Sci. – 1885. – 100. – P.935.
9. A.B. Basset / Phil.Trans.Roy.Soc.London A. – 1888. – 179. – P.43.
10. C.M. Zener / Suppl. Nuovo Cimento. – 1958. – 7. – P.544.
11. В.В. Учайкин, Р.Т. Сибатов / Письма в ЖЭТФ. – 2007. – 86. – С.584.
12. V.V. Uchaikin, R.T. Sibatov, Fractional Kinetics in Solids / World Scientific, 2013.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика / М.: Наука, 1965.
14. G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semi-groups / Commun. Math. Phys. – 1976. – 48. – P.119.
15. M. Di Ventra, Electrical Transport in Nanoscale Systems / New York: Cambridge University Press, 2008.
16. V.E. Tarasov, Fractional Liouville and BBGKI Equations / Journal of Physics: Conference Series. – 2005. – 7. – P.17.
17. S.Yu. Lukashchuk, Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation / Cent. Eur. J. Phys. – 2013. – 11(6). – P.740.

ON FRACTIONAL DIFFERENTIAL LIUVILLE EQUATION DESCRIBING OPEN SYSTEMS DYNAMICS

V.V. Uchaikin

Ul'anovsk State University,
Ul'anovsk, Russia, e-mail: vuchaikin@gmail.com

Abstract. It is shown that the transition from evolution description of a closed hamiltonian system to the open one as its subsystem is led the transformation of Liuville's equation to its temporally fractional differential analog.

Key words: Luiville's equation, hamiltonian system, fractional differentiation, открытая system.