MSC 81P20

ГАУССОВСКИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются случайные гауссовские векторные поля в $\mathbb{R}^3$ с нулевым средним значением, реализации которых с вероятностью единица являются почти-периодическими в среднем квадратичном. Находится общий вид корреляционной функции таких случайных полей в том случае, когда они с вероятностью единица являются гладкими и обладают свойством соленоидальности.

Ключевые слова: соленоидальное поле, функции почти периодические в среднем квадратичном, гауссовское случайное поле, корреляционная функция.

Пусть $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ — гауссовское случайное векторное поле с нулевым средним, $\langle \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0$. Оно полностью характеризуется корреляционной функцией

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \tilde{A}_j(\mathbf{y}) \rangle , \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 ; \ i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть это поле является гладким с вероятностью единица и с той же вероятностью обладает свойством соленоидальности, то есть для почти каждой его реализации выполняется

$$\nabla_i \tilde{A}_i(\mathbf{x}) = 0 . \tag{1}$$

Это приводит к тому, что корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = \frac{\partial K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0 .$$

Будем, далее, считать, что поле $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ таково, что с вероятностью единица его реализации представляются почти-периодическими в среднем квадратичном функциями. Это означает, что почти каждая случайная реализация представима в виде ряда

$$\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) , \tag{2}$$

где суммирование производится по случайному не более чем счетному множеству $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$ из $\mathbb{R}^3$, однозначно определяемому реализацией $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, а набор случайных коэффициентов $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $i = 1, 2, 3$ квадратично суммируем

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} |\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty , \tag{3}$$

где множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$ определяется условием

$$\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \exp(-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa})) d\mathbf{x} \neq 0 \,. \tag{4}$$

Заметим, во избежание возможного ошибочного представления, что наличие разложений (2) случайных реализаций гауссовского поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ не означает, что это ноле обязательно обладает дискретным спектром. Это связано с тем, что множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ векторов $\boldsymbol{\kappa}$, по которому производится суммирование в (2), не является фиксированным, как это было бы при наличии только дискретного спектра у поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$, а это эффективно может приводить к появлению непрерывного спектра у поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$.

Формулу (2) можно представить в следующем виде

$$\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) \tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k}) d\boldsymbol{k} \,, \tag{5}$$

где $\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k})$ — обобщенная случайная функция

$$\tilde{\tilde{A}}_i(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}' \in \tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}') \delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \,, \tag{6}$$

Целью настоящего сообщения является доказательство общего представления для корреляционных функций случайных гауссовских векторных полей описанного выше типа.

1. Основная теорема. *Пусть гауссовское случайное векторное иоле $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ является с вероятностью единица почти-периодическим в среднем квадратичном и с той же вероятностью все его частные производные $\nabla_i \tilde{A}_j(\mathbf{x})$ реализаций поля $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ локально квадратично интегрируемы и являются почти периодическими функциями в среднем квадратичном, для которых выполнено условие $\nabla_i \tilde{A}_i(\mathbf{x}) = 0$.*

Тогда для корреляционной функции поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$ справедливо следующее представление

$$K_{i_1 i_2}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x}_2) = -\varepsilon_{i_1 j_1 k_1} \varepsilon_{i_2 j_2 k_2} \nabla^{(\mathbf{x}_1)}_{j_1} \nabla^{(\mathbf{x}_2)}_{j_2} R_{k_1 k_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \,, \tag{7}$$

где $R_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ — корреляционная функция некоторого гладкого с вероятностью единица гауссовского поля с нулевым средним.

(Операторы $\nabla^{(\mathbf{x}_1)}$, $\nabla^{(\mathbf{x}_2)}$ обозначают градиенты, соответственно, но переменным $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.)

☐ Ввиду наличия соленоидальности у реализаций $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ с вероятностью единица, подставив разложение (2) в (1), получим

$$\nabla_i \tilde{A}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} \kappa_i \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})) = 0 \,,$$

где в левой части, ввиду гладкости случайных реализаций $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ в среднем квадратичном, стоит ряд, квадратично суммируемый с вероятностью 1,

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \,. \tag{8}$$

Вследствие однозначности разложения почти-периодической в среднем квадратичном в ряд вида (2), получаем бесконечный набор условий для коэффициентов разложения

$$\boldsymbol{\kappa}_i \tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) = 0\,, \quad \boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}\,. \tag{9}$$

Рассмотрим набор случайных коэффициентов $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}$, занумерованных случайным счетным множеством $\tilde{\mathfrak{A}}\subset\mathbb{R}^3$, который представляет ненулевые значения линейного преобразования (4) некоторой реализации $\tilde{A}_i(\mathbf{x})$ исходного случайного поля. Этот набор можно рассматривать как реализацию случайного поля $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa});\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3\}$, которое получается линейным преобразованием (4) случайного поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x});\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\}$ и которая обращается в нуль при $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3\setminus\tilde{\mathfrak{A}}$ (по этой причине такое случайное поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa});\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3\}$ несепарабельно). Такой подход позволяет избавиться от явного учета случайного множества $\tilde{\mathfrak{A}}$. Кроме того, при таком рассмотрении поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa});\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^3\}$ является гауссовским, так как оно получается посредством линейного преобразования гауссовского случайного поля $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x});\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\}$. Оно имеет нулевое среднее значение,

$$\langle\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\rangle = \lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\Lambda|}\int\limits_{\Lambda}\langle\tilde{A}_i(\mathbf{x})\rangle\exp(-i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa}))d\mathbf{x} = 0\,,$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ может (после усреднения) принимать любые значения из $\mathbb{R}^3$.

На основании (5) и (6) имеет место

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\exp(-i[(\boldsymbol{\kappa}_1,\mathbf{x}_1)-(\boldsymbol{\kappa}_2,\mathbf{x}_2)])d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \langle\tilde{A}_{i_1}(\mathbf{x}_1)\tilde{A}_{i_2}(\mathbf{x}_2)\rangle\exp(-i[(\boldsymbol{\kappa}_1,\mathbf{x}_1)-(\boldsymbol{\kappa}_2,\mathbf{x}_2)])d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \langle\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{\tilde{A}}^*(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\,, \tag{10}$$

$$K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\exp(i[(\boldsymbol{\kappa}_1,\mathbf{x}_1)-(\boldsymbol{\kappa}_2,\mathbf{x}_2)])d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2\,. \tag{11}$$

Поэтому обобщенная случайная функция $\tilde{\tilde{A}}(\boldsymbol{k})$ полностью характеризуется корреляционной функцией $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ и эта обобщенная тензор-функция однозначно характеризует корреляционную функцию $K_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ для случайных полей, реализации которых принадлежат пространству почти-периодических в среднем квадратичном случайных полей.

Свернув тензор $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$ с вектором $\boldsymbol{\kappa}_1$ или вектором $\boldsymbol{\kappa}_2$ и применив формулу (9) и (6) для усредняемых реализаций $\tilde{a}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)$, $\tilde{a}_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)$, получим необходимое и достаточное условие для корреляционной функции $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$ для того, чтобы поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ соответствовало соленоидальному полю $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$,

$$(\boldsymbol{\kappa_1})_{i_1} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = (\boldsymbol{\kappa_2})_{i_2} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = 0 \,. \tag{12}$$

Проанализируем это условие. Для этого представим общее решение уравнения (9) в следующем виде, рассматривая его при фиксированном значении вектора $\boldsymbol{\kappa}$,

$$\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa}) = \varepsilon_{ijk} \kappa_j \tilde{b}_k(\boldsymbol{\kappa}) \,, \tag{13}$$

где ε_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивитта, $\tilde{b}_k(\boldsymbol{\kappa})$ — некоторый случайный вектор. Такое представление связано с тем, что весь класс векторов $\mathbf{a}$, ортогональных вектору $\boldsymbol{\kappa}$, описывается формулой $\mathbf{a} = [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{b}]$, где $\mathbf{b}$ – произвольный вектор, неколлинеарный вектору $\boldsymbol{\kappa}$. Общее решение вырожденного линейного уравнения (13) относительно вектора $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ при фиксированном значении вектора $\tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa})$ имеет вид (если $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$)

$$\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa}) = \lambda(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_i - \boldsymbol{\kappa}^{-2} \varepsilon_{ijk} \kappa_j \tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa}) \,, \tag{14}$$

где $\lambda(\boldsymbol{\kappa})$ – произвольная функция от $\boldsymbol{\kappa}$. Если рассматривать это решение для всей совокупности случайных реализаций $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, то совокупность всех функций $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$ будет составлять случайное поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ при условии, что, дополнительно, определено случайное скалярное поле с реализациями $\lambda(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$.

С другой стороны, из формул (13) и (14) видно, что скалярное поле $\{\lambda(\boldsymbol{\kappa})\}$ не дает в клада в поле $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$ и поэтому его можно выбрать произвольно. Положим его равным нулю. Тогда $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa}) = -\boldsymbol{\kappa}^{-2} \varepsilon_{ijk} \kappa_j \tilde{a}_k(\boldsymbol{\kappa})$ и поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$, как линейное преобразование гауссовского поля является тоже гауссовским и обладает вслед за полем $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ нулевым средним значением. Его реализации обращаются в нуль в тех же точках, что и порождающие их реализации $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$, то есть семейством векторов $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$, в которых реализация $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ не обращается в нуль, является семейство $\mathfrak{A}$, соответствующее порождающей реализации. Тогда распределение вероятностей поля $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ порождается распределением вероятностей поля $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$. При этом в силу выполнимости свойства (8) для реализаций $\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})$ с вероятностью 1, для реализаций $\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})$ выполняется с той же вероятностью

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\mathfrak{A}}} \boldsymbol{\kappa}^4 |\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty \tag{15}$$

с тем же семейством $\tilde{\mathfrak{A}}$. И обратно, если выполняется (14), то поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$, определяемое формулой (13), является гауссовским поле с нулевым средним, для которого выполняется условие (8). Тогда определив произвольное гауссовское поле $\{\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ с нулевым средним и с реализациями, удовлетворяющими с вероятностью 1 условию (15), мы, тем самым, определим однозначным образом случайное поле $\{\tilde{a}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$.

Введем обобщенное случайное поле $\{\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ с реализациями

$$\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}' \in \mathfrak{A}} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa}') \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \,.$$

Оно является гауссовским полем с нулевым средним, так как получается из поля $\tilde{\tilde{A}}_i(\boldsymbol{\kappa})$ на основе его линейного преобразования. Поэтому поле $\{\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ полностью определяется своей обобщенной корреляционной функцией

$$C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \langle \tilde{\tilde{B}}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{\tilde{B}}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\,.$$

Определив фурье-преобразование

$$\tilde{B}_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\exp(i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa}))d\boldsymbol{\kappa} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa})}\,,$$

которое является линейным преобразованием поля $\{\tilde{\tilde{B}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ и которое, таким образом является гауссовским случайным полем с нулевым средним, выразим, аналогично формуле (11), корреляционную функцию $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \langle\tilde{B}_{i_1}(\mathbf{x}_1)\tilde{B}_{i_2}(\mathbf{x}_2)\rangle$, следующим образом его полностью определяющую через корреляционную функцию $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$,

$$R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\exp(i[(\boldsymbol{\kappa}_1,\mathbf{x}_1)-(\boldsymbol{\kappa}_2,\mathbf{x}_2)])d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2 \qquad (16)$$

так, что имеет место обратная связь

$$C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\exp\big(i[(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\kappa}_2)-(\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\kappa}_1])\big)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\,.$$

Корреляционные функции $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ являются положительно определенными, то есть имеют место неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)u_{i_1}(\mathbf{x}_1)u^*_{i_2}(\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \ge 0\,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\bar{u}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)\bar{u}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2 \ge 0$$

для любых финитных измеримых вектор-функций $u_i(\cdot)$. Кроме положительной определенности, корреляционная функция $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, дополнительно, должна быть дифференцируемой как по переменной $\mathbf{x}_1$, так и по переменной $\mathbf{x}_2$. Она должна быть подчинена дополнительному условию, которое является следствием (15). Такое условие формулируется в терминах корреляционной функции $R_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ случайного поля $\{\tilde{B}_i(\mathbf{x})\}$ для которого, в силу выполнимости условия (15), существуют все вторые частные производные

$$\nabla_k\nabla_l\tilde{B}_i(\mathbf{x}) = -\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\tilde{\mathfrak{A}}}\kappa_k\kappa_l\tilde{b}_i(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa})}\,,$$

как интегрируемые и почти-периодические в среднем квадратичном функции.

Из формулы (13) вытекает следующая связь между корреляционными функциями $C_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ и $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$,

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \varepsilon_{i_1 j_1 k_1}\varepsilon_{i_2 j_2 k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1)_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}_2)_{j_2} C_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,. \tag{17}$$

Воспользовавшись определениями корреляционных функций $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ и $R_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, получим формулу (7) формулировки теоремы. ■

Заметим, что корреляционная функция (7) удовлетворяет условию

$$\nabla^{(\mathbf{x}_1)}_{i_1} K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \nabla^{(\mathbf{x}_2)}_{i_2} K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,.$$

2. Пример гауссовского соленоидального поля. Пусть s_j, $j = 1,2,3$ — псевдовектор в $\mathbb{R}^3$ и $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j$, $j = 1,2,3$ — два гауссовских случайных эквивалентных вектора с нулевым средним значением $\langle\tilde{a}_j\rangle = \langle\tilde{b}_j\rangle = 0$ и ковариационной матрицей $\langle\tilde{a}_i\tilde{a}_j\rangle = \langle\tilde{b}_i\tilde{b}_j\rangle = \sigma^2\delta_{ij}$. Эти векторы статистически зависимы так, что $\langle a_i b_j\rangle = r^2\varepsilon_{ijk}s_k$ и шестимерный случайный вектор $\langle\tilde{a}_j, j = 1,2,3; \tilde{b}_j, j = 1,2,3\rangle$ является гауссовским с ковариационной матрицей

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \sigma^2\mathbf{1} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F}^{\mathrm{T}} & \sigma^2\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad F_{ij} = r^2\varepsilon_{ijk}s_k\,.$$

Эта матрица симметрична и неотрицательна при $|\mathbf{s}|r^2 \le \sigma^2$,

$$\Big(\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle, \mathcal{G}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\Big) = \sigma^2(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2) + r^2\Big((\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{s}]) - (\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{s}])\Big) \ge 0\,,$$

как это необходимо для того, чтобы представлять ковариационную матрицу случайного вектора. Последнее неравенство следует непосредственно из неравенств $(\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{s}]) \ge -|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$, $(\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{s}]) \le |\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Ковариационная матрица каждого из векторов $\varepsilon_{ikl}s_k\tilde{a}_l$, $\varepsilon_{jmn}s_m\tilde{b}_n$ равна $\sigma^2 S_{ij}$, $S_{ij} = \mathbf{s}^2\delta_{ij} - s_i s_j$. Так как среднее

$$\varepsilon_{ikl}s_k\varepsilon_{jmn}s_m\langle\tilde{a}_l\tilde{b}_n\rangle = -r^2 S_{in}\varepsilon_{jmn}s_m\,,$$

то ковариационная матрица соответствующего шестимерного вектора равна

$$\begin{pmatrix} \sigma^2\mathcal{S} & -\mathcal{S}\mathcal{F} \\ -(\mathcal{S}\mathcal{F})^{\mathrm{T}} & \sigma^2\mathcal{S} \end{pmatrix}.$$

Определим стохастически трансляционно инвариантное случайное поле

$$\tilde{B}_j(\mathbf{x}) = \tilde{a}_j\cos(\mathbf{s},\mathbf{x}) + \tilde{b}_j\sin(\mathbf{s},\mathbf{x})$$

с дискретным спектром, сосредоточенном на векторах $\mathbf{s}$, -$\mathbf{s}$, с корреляционной функцией

$$R_{j_1,j_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \sigma^2\delta_{j_1 j_2}\cos(\mathbf{s},\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) + r^2\varepsilon_{j_1 j_2 l}s_l\sin(\mathbf{s},\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$$

и поле $A_j(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk}s_jB_k(\mathbf{x})$ с корреляционной функцией $\varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{i_2j_2k_2}s_{j_1}s_{j_2}R_{k_1k_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. Отметим появление в корреляционной функции $R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ слагаемого, пропорционального $\varepsilon_{j_1j_2l}s_l$, па возможность существования гауссовских нолей такого типа указывалось в работах [4-7], однако, вопреки примененной в этой работе но отношению к нолям такого типа терминологии, реализации рассматриваемого нами ноля не обладают какой-либо топологической нетривиальностью. Соответствующее обобщенное случайное ноле $\tilde{\tilde{B}}_j(\boldsymbol{\kappa})$ определяется формулой

$$\tilde{\tilde{B}}_j(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\tilde{a}_j\big(\delta(\boldsymbol{\kappa}-\mathrm{s})+\delta(\boldsymbol{\kappa}+\mathrm{s})\big) - \frac{i}{2}\tilde{b}_j\big(\delta(\boldsymbol{\kappa}-\mathrm{s})-\delta(\boldsymbol{\kappa}+\mathrm{s})\big)\,.$$

Вычисление его корреляционной функции дает

$$C_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \langle\tilde{\tilde{B}}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{\tilde{B}}^*(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_2)\big[\sigma^2\delta_{ij}(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\mathrm{s})+\delta(\boldsymbol{\kappa}_1+\mathrm{s})) + ir^2\varepsilon_{ijl}s_l(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\mathrm{s})-\delta(\boldsymbol{\kappa}_1+\mathrm{s}))\big]\,.$$

Соответственно, корреляционная же функция $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ ноля $\tilde{\tilde{A}}_j(\boldsymbol{\kappa})$ равна

$$D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_2)\big[\sigma^2S_{ij}(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\mathrm{s})+\delta(\boldsymbol{\kappa}_1+\mathrm{s})) + ir^2S_{ik}\varepsilon_{jkl}s_l(\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\mathrm{s})-\delta(\boldsymbol{\kappa}_1+\mathrm{s}))\big].$$

3. Стохастически симметричные гауссовские поля. Если почти-периодическое в среднем квадратичном случайное поле $\{\tilde{A}_i(\mathbf{x})\}$ – стохастически трансляционно инвариантно (однородно), то его корреляционная функция $K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ зависит только от разности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. В этом случае соответствующее обобщенное случайное ноле $\{\tilde{\tilde{A}}_i(\boldsymbol{\kappa})\}$ обладает корреляционной функцией $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$, которая пропорциональна $\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_2)$, как это имело место в примере, приведенном выше. Тогда, вследствие (17), таким же свойством обладает корреляционная функция $C_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$, то есть корреляционная функция $R_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \equiv R_{i_1i_2}(\mathbf{x})$ — также зависит от разности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. В этом случае формула (7) принимает вид

$$K_{i_1i_2}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{i_2j_2k_2}\nabla_{j_1}\nabla_{j_2}R_{k_1k_2}(\mathbf{x})\,, \tag{18}$$

где градиенты вычисляются по переменной $\mathbf{x}$.

Так как корреляционная функция $D_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ обладает свойством $D_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)(\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1} = D_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)(\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2} = 0$, то соленоидальные случайные поля вырождены — корреляционный оператор имеет собственные функции с нулевым собственным значением. Это, в частности, приводит к тому, что эти ноля не могут быть *стохастически сферически симметричными*, то есть для них в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ поле не может быть стохастически эквивалентно полю $U_{ij}\tilde{A}_j(\mathbf{x})$ (радиус-вектор не поворачивается). Это означает, что корреляционная функция $K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ не может обладать свойством

$$U_{i_1j_1}U_{i_2j_2}K_{j_1j_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = K_{i_1i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,,$$

так как в противном случае должно иметь место равенство

$$U_{i_1j_1}U_{i_2j_2}D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,,$$

то есть $D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\delta_{j_1j_2}$, что противоречит существованию собственного вектора с нулевым собственным значением. Напротив, поле с локальной аксиальной стохастической симметрией возможно, у которого корреляционная функция имеет вид

$$D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) = D_1(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\Big(\delta_{j_1j_2}\mathbf{s}^2 - s_{j_1}s_{j_2}\Big) + \varepsilon_{j_1j_2l}s_lD_2(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)\,,$$

где $D_1(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2) > 0$ и функция $D_2(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)$ такова, что имеет место неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} D(\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2)u_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}_1)u_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}_2)d\boldsymbol{\kappa}_1d\boldsymbol{\kappa}_2 \ge 0$$

для любой вектор-функции $u_j(\boldsymbol{\kappa})$.

Литература

1. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 19(162);32. – С.176-183.
2. Скороход Теория случайных процессов.
3. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, Физматлит, 1966. – 544 с.
4. Slezova Zh.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Effect of Topologically Non-trivial Magnetic Fields on the Magnetic Moment Evolution / Functional Materials. – 2000. – 7; №3. – P.384-389.
5. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Anomalous Flow of Passive Admixture in Helical Turbulence / Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. – 1998. – 88. – P.187-213.
6. Тур А.В., Чечкин А.В., Яновский В.В. Аномалии переноса в отражательно неинвариантной теории турбулентности / Электромагнитные явления. – 1998. – 1,№2. – С.233-238.
7. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Kinetic effects stochastic topological nontrivial fields // Physica A. – 1994. – 208. – P.501-522.

GAUSSIAN ALMOST-PERIODIC IN QUADRATIC AVERAGE SENSE SOLENOIDAL VECTOR FIELDS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Gaussian random vector fields in $\mathbb{R}^3$ with zero average value are under consideration. Their realizations are almost-periodic in the quadratic average sense with the probability one. The general form of the correlation function of such random fields are found when they are smooth and solenoidal with the probability one.

Key words: solenoidal field, almost periodic functions in the quadratic average sense, gaussian random field, correlation function.