



MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА НА СВЕРХСИНГУЛЯРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Б. Расулов, М.А. Расулзода

Москва, Россия, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается эллиптическое уравнение произвольного порядка на плоскости, определяемое оператором Коши-Римана, с особенностью высокого порядка в начале координат. Устанавливаются наличие решений и явные выражения.

Ключевые слова: оператор Коши-Римана, сверхсингулярное многообразие, интегральное представление, граничные задачи.

Пусть G – односвязная конечная область, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром $\partial G \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, содержащая внутри точку $z = 0$.

В области G рассмотрим уравнения произвольного порядка с особенностью высокого порядка в начале координат

$$\prod_{j=1}^m \left(\partial_{\bar{z}} - A_j(z) \right) U + B(z) \bar{U} = F(z), \quad A_j(z) = \frac{z a_j(z)}{r^{n+1}}, \quad (1)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $n \geq 1$, $a_j(z)$, $j = \overline{1, m}$, $U(z)$ – искомая функция, $B(z)$, $F(z)$ – фиксированные заданные функции.

Из уравнения (1) при $m = 1$ получим неоднородную систему Коши-Римана, которая в классе эллиптических систем первого порядка занимает особое место. Основопологающей работой в этом направлении является монография И.Н. Векуа [2]. Теория Векуа построена в предположении, что коэффициенты и правая часть принадлежат пространству $L^p(G)$, $p > 2$. Поэтому даже уравнение с такими коэффициентами, как $A_1(z) = 1/z$, $B_1(z) = 1/\bar{z}$ не вписывается в эту теорию. Разработки по проблеме дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами были начаты еще в 1957-1963 годах Л.Г. Михайловым, о чем можно судить по его монографии [4]. Исследованию задач для уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной особой точке, посвящены работы З.Д. Усманова [7], Н.Р. Раджабова [5], А. Тунгатарова, А.Ю. Тимофеева, Г.Т. Макачария, М. Райссега и др. ученых. Впервые основательная работа по исследованию дифференциальных и интегральных уравнений с сверхсингулярными коэффициентами была проведена Н.Р. Раджабовым (см., например, [5]).

Из уравнения (1) при $m = 2$ получим уравнение второго порядка с оператором Коши-Римана и со сверхсингулярными коэффициентами. Классическим примером дифференциальных уравнений второго порядка (случай $m = 2$) с оператором $\partial_{\bar{z}}$ является уравнение $U_{\bar{z}^2} = 0$, для которого еще в 1948г. А.В. Бицадзе доказана некорректность



постановки задачи Дирихле [1]. Существенный вклад в развитие таких и общих эллиптических систем с регулярными коэффициентами внес А.П. Солдатов (см., например, [6]). Модифицированное уравнение Бицадзе с добавленными младшими производными в случае регулярных коэффициентов было исследовано также Р.С. Саксом, Н.Е. Товмасыном и другими.

Объектом нашего исследования является уравнение произвольного порядка с оператором Коши-Римана в случае с сверхсингулярными коэффициентами, т.е. уравнение (1).

Под обобщенным решением мы понимаем функцию $U \in C(\overline{G} \setminus 0)$ непрерывно дифференцируемую по \bar{z} до $m - 1$ -го порядка, а обобщенная производная m -го порядка по \bar{z} принадлежит классу $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, где $G_\varepsilon = G \cap \{|z| > \varepsilon\}$.

Введем следующие обозначения:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad A_j(z) = \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}, \quad (2)$$

$$A_{j0}(z) = \frac{\tilde{z}}{r^{n+1}} [a_{j0}(z) - a_{j0}(0)], \quad j = \overline{1, m}, \quad \omega(z) = \frac{2}{(n-1)r^{n-1}}.$$

Лемма 1. Пусть $n > 1$ и, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ так, что

$$h_j(z) = (TA_{j0})(z) + \frac{a_j(0)}{(n-1)\pi i} \int_{\partial G} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H(\overline{G}).$$

Тогда при $n > 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = -a_j(0)\omega(z) + h_j(z). \quad (3)$$

Пусть при $n = 1$, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ и круг $\{|z| \leq \rho\}$ содержится в G так, что

$$h_j^0(z) = (TA_{j0})(z) + (TA_{j0}^0)(z) \in H(\overline{G}),$$

где

$$A_{j0}^0(z) = \begin{cases} 0, & |z| < \rho, \\ \bar{z}^{-1}, & |z| \geq \rho. \end{cases}$$

Тогда при $n = 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = 2a_j(0) \ln \frac{|z|}{\rho} + h_j^0(z).$$

Теорема 1. Пусть $n > 1, m = 1, B(z) = 0, \forall z \in \overline{G}$ функция $A_{10} \in L^p(G)$, $p > 2$ и правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{a_1(0)\omega(z)} F \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\overline{G} \setminus 0)$ уравнения (1) представимо в виде

$$U = e^{-a_1(0)\omega + h_1} [\phi_1 - T(e^{a_1(0)\omega - h_1} F)], \quad (4)$$



где $\phi_1 \in C(\overline{G} \setminus 0)$ аналитична в области $G \setminus 0$.

Пусть $n > 1$. Если решение уравнения (1) имеет поведение

$$U(z) = O(1)e^{a_1(0)\omega} \quad \text{при } z \rightarrow 0, \tag{5}$$

то по теореме 1 аналитическая в $G \setminus 0$ функция $\phi_1(z)$ ограничена в окрестности $z = 0$ и, следовательно, аналитична во всей области G . Этот факт ниже используем в постановке задачи Римана-Гильберта.

Задача типа Римана-Гильберта. Пусть $n > 1$. Задача Римана-Гильберта состоит в том, что требуется найти решение $U(z) \in C(\overline{G} \setminus 0)$ уравнения

$$\partial_{\bar{z}}U - A_1(z)U(z) = f(z), \quad A_1(z) = \frac{za_1(z)}{r^{n+1}}. \tag{6}$$

удовлетворяющее (5) и краевому условию

$$\text{Re} [\lambda e^{i\text{Im}a_1(0)\omega} U]_{\partial G} = g(t), \tag{7}$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Теорема 2. Пусть $n > 1, m = 1, B(z) = 0, \forall z \in \overline{G}$, функция $A_0 \in L^p(G), p > 2$, правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{a_1(0)\omega} F \in L^p(G)$ и

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi} \arg \lambda|_{\partial G}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1). При $\varkappa \geq 0$ однородное задача (6),(7) имеет $\varkappa + 1$ линейно-независимых решений $U_1, \dots, U_{\varkappa+1} \in H_{loc}(G \setminus 0)$, а неоднородная задача всегда разрешима.

2). Если $\varkappa < 0$, то однородная задача имеет только нулевое решение, а неоднородная разрешима при выполнении $-\varkappa - 1$ условий разрешимости вида

$$\int_{\partial G} g_0(e^{i\theta})e^{-ki\theta} d\theta = 0, \quad (k = 1, \dots, -\varkappa - 1).$$

Теорема 3. Пусть $m = 2, n > 1, B(z) = 0, a_1(z) \neq a_2(z), a_1(z) = r^n \varphi(z), \forall z \in \overline{G}$, где аналитическая функция $\varphi(z) \in C(\overline{G})$. Кроме того,

$$a_2(z) \in C^1(\overline{G}), \text{Re } a_2(0) > 0; \quad A_{02}(z), |z|^{-2n} f(z) \in L^p(G), p > 2. \tag{8}$$

Тогда функции $K_0(z) = e^{-a_2(0)\omega + h_2(z) - (T(\varphi))(z)} \in C(\overline{G})$, и для любых функций $\phi_2 \in C(\overline{G} \setminus 0), \phi_1 \in C(\overline{G})$, аналитических в области G формула

$$U(z) = e^{(T\varphi)(z)} \times \left[\phi_2(z) + T(K_0(\zeta)\phi_1(\zeta))(z) + T((K_{a_2}(z) - K_{a_2}(t))f_0(t))(z) \right], \tag{9}$$



определяет решение уравнения (1) из класса $C(\overline{G} \setminus 0)$, где

$$K_{a_2}(z) = T(K_0(\zeta))(z), \quad f_0(z) = |z|^{-2n} e^{a_2(0)\omega(z)+h_2(z)} f(z).$$

Поведение этих решений в окрестности начала координат описывает следующая

Теорема 4. Пусть для уравнения (1) выполнены условия теоремы 3. Тогда поведение решений однородного уравнения (1) из класса $C(\overline{G} \setminus 0)$ в окрестности сверхсингулярной точки определяется формулой:

$$\begin{aligned} U(z) &= e^{(T\varphi)(z)} \left[\phi_2(z) - \frac{1}{\pi} \int_G \frac{K_0(\zeta)\phi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right] = \\ &= \left(R^2 \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z} + \bar{z}\varphi(z) \right) \phi_2(z) + \\ &+ \frac{\beta_0 E_0(a(0), n, 0)}{(n-1)\pi i} \frac{1}{z} + \frac{1}{(n-1)\pi i} (\phi_1(z) - \beta_0) E_1(a(0), n, z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_0(a(0), n, 0) &= \int_{R^{1-n}} e^{-c\eta} \eta^{-1-\frac{2}{n-1}} d\eta, \\ E_1(a(0), n, z) &= \int_{R^{1-n}} e^{-c\eta} \eta^{-1-\frac{2}{n-1}} c_1(\eta, z) d\eta, \\ c_1(\eta, z) &= \exp \left\{ \sum_{k \geq m \geq 1} \frac{a_{km}}{m+1} (\eta^{-\frac{2(m+1)}{n-1}-1}) z^{k-m} \right\}, \quad c = \frac{2a(0)}{(n-1)}. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть в уравнении (1), функции

$$a_j(z) \in C^m(\overline{G}), \quad \operatorname{Re} a_j(0) \leq 0, \quad A_{j0}(z) \in L^p(G), \quad p > 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad B(z) = 0$$

и правая часть $e^{-TA_1} F(z) \in L^p(G), p > 2$. Тогда любое решение уравнения (1) из класса $(G \setminus 0)$ представимо в виде

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}), \quad (10)$$

где

$$S_k(U_{k+1}) \equiv e^{TA_{m-k}(z)} \left(\phi_{m-k}(z) + \left(T(e^{-TA_{m-k}(\zeta)} U_{k+1}) \right)(z) \right), \quad (11)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, где $U_0 \equiv U$, $U_m = F$, $\phi_{m-k}(z)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ – произвольные аналитические функции комплексного переменного z , причем, если известно, U в G , то соответствующие аналитические функции $\phi_j(z)$, $j = \overline{1, m}$ через значения функции $U(z)$ и ее производных до $m-1$ -го порядка включительно, находятся единственным образом.



Замечание. Случай $B(z) \neq 0$ сводится к интегральному уравнению

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}),$$

где: $B(z), e^{-TA_1 r^{-n-1}} f(z) \in L_p(G), p > 2$, причем $U_m = B(z)\bar{U} + F$, которое решается методом последовательных приближений.

Аналогичные результаты получены для уравнения

$$\partial_{\bar{z}} U - A(z)U + B(z)U^m = 0, \quad A(z) = \frac{za_1(z)}{|z|^{n+1}}. \quad (12)$$

Теорема 6. Пусть $n > 1, m > 0, B(z) \in L^p(G)$ и $\forall z \in \bar{G}$, функция $A_{10} \in L^p(G), p > 2$, а также правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{(m-1)a_1(0)\omega(z)} b \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\bar{G} \setminus 0)$ уравнения (12) представимо в виде

$$U = e^{-a_1(0)\omega+h_1} [\phi_1 + (m-1)T(e^{(m-1)(a_1(0)\omega-h_1)} b)]^{\frac{1}{m-1}}, \quad (13)$$

где $\phi_1 \in C(\bar{G} \setminus 0)$ аналитична в области $G \setminus 0$.

Задача типа Римана-Гильберта. Пусть $n > 1$. Требуется найти решение $U(z) \in C(\bar{G} \setminus 0)$ уравнения (12) удовлетворяющее (5) и краевому условию

$$\operatorname{Re} [\lambda e^{i \operatorname{Im} a_1(0)\omega} U^{m-1}]_{\partial G} = g(t), \quad (14)$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G), \lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Применяя к последней при $m = 1 - 1/k, k \in N$ классические результаты о разрешимости [3] сформулированной задачи, приходим к решению задачи Римана-Гильберта в классе однозначных аналитических функций.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИ-НТТИ, 1963. – 184 с.
5. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с.
6. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. – 2006. – .70, №6. – С.161-192.
7. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой / Душанбе: Изд. АН Тадж. ССР, 1993. – 244с.
8. Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой // ДАН России. – 2009. – 429, №6. – С.735-737.



9. Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / Дифференциальные уравнения. Минск. – 2011. – 47, №2. – С.287-290.

**INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROBLEMS
FOR THE EQUATION OF ARBITRARY ORDER WITH THE
CAUCHY-RIEMANN OPERATOR ON SUPERSINGULAR MANIFOLDS**

A.B. Rasulov, M.A. Rasulzoda

Moscow, Russia, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. Elliptic equation of arbitrary order on complex plane, defined by cauchy-Riemann's operator with the singularity of a high order at the origin is under consideration. It is found the solution existence and their explicit expressions.

Key words: Cauchy-Riemann's operator, supersingular manifolds, integral representation, boundary problems.