MSC 39A70

МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Ю. Дуплищева

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: dup_ayu@mail.ru

Аннотация. Вводится понятие состояний линейных операторов. Получена теорема об эквивалентности состояний разностного оператора и матричного оператора специального типа.

Ключевые слова: множество состояний обратимости, ядро, образ, дополняемое подпространство, разностные операторы.

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, End $\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathcal{X}$ с нормой $||A|| = \sup\limits_{||x||\le 1} ||Ax||$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \text{End}\,\mathcal{X}$. Отметим, что оператор A называется обратимым, если его ядро $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{A}x = 0\}$ нулевое и образ $\text{Im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x, x \in \mathcal{X}\}$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств $\mathbb{J}_d$ или $\mathbb{J}_c$, где $\mathbb{J}_d \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$ и $\mathbb{J}_c \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ соответственно, причем $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Символом $l_p = l_p(\mathbb{J}_d, \mathcal{X})$, где $p \in [1, \infty)$, обозначим банахово пространство последовательностей векторов из комплексного банахова пространства $\mathcal{X}$, суммируемых со степенью p для $p \in [1, \infty)$ и ограниченных при $p = \infty$, с нормой

$$||x||_p = \Big(\sum_{k\in\mathbb{J}_d} ||x(k)||^p\Big)^{1/p}, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty), \quad ||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{J}_d} ||x(k)||, \quad x \in l_\infty.$$

Символом $c_0 = c_0(\mathbb{J}_d, \mathcal{X})$ обозначим замкнутое подпространство последовательностей $x \in l_\infty$ со свойством $\lim\limits_{k\to\infty} ||x(k)|| = 0$.

Далее, символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}_c, \mathcal{X})$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}_c$, со значениями в $\mathcal{X}$ и нормой $||x|| = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}_c} ||x(t)||$, символом $C_0 = C_0(\mathbb{J}_c, X)$ — замкнутое подпространство функций $x \in C_{b,u}$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} ||x(t)|| = 0$ (исчезающих на бесконечности).

Наконец, договоримся обозначать сиволом $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ любое из введенных в рассмотрение банаховых пространств (используется запись $\mathfrak{F} \in \{l_p, l_\infty, c_0, C_{b,u}, C_0\}$).

Кроме того, в пространстве $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ рассмотрим изометрический оператор сдвига вида:

$$(Sx)(t) = x(t+1), \quad t \in \mathbb{J}, \quad x \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X}), \quad S \in \text{End}\,\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X}).$$

Замечание 1. Пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ инвариантно относительно сдвига.

2. Основные результаты. Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ разностное уравнение вида:

$$x(t+2) + B_1(t)x(t+1) + B_2(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{J}, \quad x, f \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X}), \tag{1}$$

где

$$B_i \in l_\infty(\mathbb{J}, \mathrm{End}\mathcal{X}), \quad i = 1, 2, \quad \text{если } \mathbb{J} = \mathbb{J}_d\,,$$
$$B_i \in C_b(\mathbb{J}, \mathrm{End}\mathcal{X}), \quad i = 1, 2, \quad \text{если } \mathbb{J} = \mathbb{J}_c\,.$$

Путем замены

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t), \\ x_2(t) &= x(t+1). \end{aligned} \tag{2}$$

разностное уравнение вида (1) сводится к уравнению вида:

$$y(t+1) + \mathbb{B}(t)y(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{J}, \quad x, \tilde{f} \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X} \times \mathcal{X})\,, \tag{3}$$

где функция

$$\mathbb{B} \in l_\infty(\mathbb{J}, \mathrm{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})), \quad \text{если } \mathbb{J} = \mathbb{J}_d,$$
$$\mathbb{B} \in C_b(\mathbb{J}, \mathrm{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})), \quad \text{если } \mathbb{J} = \mathbb{J}_c,$$

имеет вид:

$$\mathbb{B}(t)y(t) = \begin{pmatrix} S(1) & -I \\ B_2(t) & S(1) + B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{J}\,.$$

Теорема 1. *Функция $x \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, X)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $y \in \mathfrak{F}(\mathbb{J}, X \times X)$, построенный по правилу (2), является решением уравнения (3).*

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$\mathcal{D}x = f\,,$$

где оператор $\mathcal{D} \in \mathrm{End}\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D} = S^2 + B_1 S + B_2\,,$$

Точно также запишем в операторной форме уравнение (3):

$$\mathbb{D}x = \tilde{f}\,,$$

где оператор $\mathbb{D} \in \mathrm{End}(\mathbb{J}, \mathrm{End}\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ определяется в виде:

$$\mathbb{D} = \mathbb{S} + \mathbb{B}\,.$$

Отметим, что операторная матрица $\mathbb{S}$ имеет вид:

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Возникает естественным образом вопрос: насколько операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ обладают одинаковыми свойствами в вопросах строения ядра, образа и свойств обратимости.

В дальнейшем используется следующее важное понятие (см. также [1], [2]).

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\mathfrak{X}$. Рассмотрим следующие условия:*

1). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A} = 0$ (*т.е. оператор $\mathcal{A}$ инъективен*);

2). $1 \le n = \dim\ \mathrm{Ker}\ \mathcal{A} < \infty$;

3). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ — *бесконечномерное подпространство из $\mathfrak{X}$* ($\dim\ \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \infty$);

4). $\mathrm{Ker}\ \mathcal{A}$ — *дополняемое подпространство в $\mathfrak{X}$*;

5). $\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ (*образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут*), *что эквивалентно положительности величины* (*минимального модуля оператора $\mathcal{A}$*)

$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \mathrm{Ker}\mathcal{A}} \frac{||\mathcal{A}x||}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\mathcal{A})},$$

где $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \inf_{x_0 \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}} ||x - x_0||$ — *расстояние от вектора x до подпространства* $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

6). *Оператор $\mathcal{A}$ корректен* (*равномерно инъективен*), *т.е.* $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0$ *и* $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;

7). $\mathrm{Im}\ \mathcal{A}$ — *замкнутое подпространство из $\mathfrak{X}$ конечной коразмерности* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = m \ge 1$;

8). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — *замкнутое подпространство из $\mathfrak{X}$ бесконечной коразмерности* ($\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \infty$);

9). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — *замкнутое дополняемое в $\mathfrak{X}$ подпространство;*

10). $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathfrak{X}$ (*$\mathcal{A}$ — сюръективный оператор*);

11). *Оператор $\mathcal{A}$ обратим.*

Если для оператора $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = i_1, \dots, i_k$, где $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k \le 11$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{A}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{A}$ обозначим символом $\mathrm{St}_{inv}(\mathcal{A})$.

Теорема 2. *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{D} \in End(\mathbb{J}, \mathfrak{X})$ и $\mathbb{D} \in End\mathfrak{F}(\mathbb{J}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ совпадает, т.е.*

$$\mathrm{St}_{inv}\mathcal{D} = \mathrm{St}_{inv}\mathbb{D}.$$

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть A, B_1, B_2 — операторы из $\mathrm{End}\mathfrak{X}$. По ним построим оператор вида:

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2. \tag{4}$$

Наряду с оператором $\mathcal{A}$, рассмотрим оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, B_2x_1 + Ax_2 + B_1x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

В дальнейшем, как правило, для задания оператора $\mathbb{A}$ будем использовать запись:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A+B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ B_2x_1 + Ax_2 + B_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемые операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ принадлежат алгебре операторов вида $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ соответственно. Поэтому, справедлива

Теорема 3. *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадает:*

$$\mathrm{St}_{inv}\mathcal{A} = \mathrm{St}_{inv}\mathbb{A}.$$

Для доказательства теоремы используются следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор:*

$$x \mapsto (x, Ax) : X \to X \times X\,.$$

Непосредственно из леммы 1 следует

Следствие 1. dim Ker$\mathcal{A}$ =dim Ker$\mathbb{A}$.

Из следствия 1 немедленно получаем

Замечание 2. Условия 1-3 из совокупности условий S выполнены для оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда они выполнены для оператора $\mathbb{A}$.

Отметим также, что ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ являются замкнутыми подпространствами.

Лемма 2. *Ядро оператора $\mathcal{A}$ дополняемое тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbb{A}$ дополняемое, причем проектор на ядро оператора $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ имеет вид*

$$\mathcal{P} = P_{11} + P_{22}A\,,$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ A\mathcal{P} & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Из леммы 2 немедленно следует выполнение свойства 4 из совокупности условий S.

Лемма 3. *Произвольный элемент $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Лемма 4. *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y_2 + (A + B_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Выполнение свойства 5 немедленно следует из следующих утверждений:

Лемма 5. *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Справедливость свойства 9 немедленно следует из леммы

Лемма 6. *Образ оператора $\mathcal{A}$ дополняемое подпространство тогда и только тогда, когда образ оператора $\mathbb{A}$ дополняемое подпространство, причем проектор на образ оператора $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ имеет вид*

$$\mathcal{P} = P_{22} + (A + B_1)P_{12}\,,$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-\mathcal{P})(A+B_1) & \mathcal{P} \end{pmatrix},$$

соответственно.

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи Математических Наук. – 2013. – 68, №1(409).; – С.77-128.
2. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН. Серия математика. – 2009. – 73, №2. – С.3-68.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж.: ВГУ, 1987.

SECOND ORDER MATRICES AT THE RESEARCHING OF OPERATOR EQUATIONS

A.Yu. Duplishcheva

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia. e-mail: dupl_ayu@mail.ru

Abstract. The concept of linear operators states is introduced. The theorem about the state equivalence of the definite difference operator and the matrix operator of special type is obtained.

Key words: set of invertibility states, kernel, image, complemented space, difference operators.