MSC 65R20

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvin@gmail.com

Аннотация. Построены алгоритмы численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами, содержащими постоянные и переменные пределы интегрирования. Алгоритмы основаны на применении метода механических квадратур. Приведены теоремы о сходимости этого метода для рассматриваемых классов уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения, уравнения с частными интегралами, интегро-дифференциальные уравнения Барбашина, метод механических квадратур.

1. Введение. К линейным интегральным уравнениям с частными интегралами

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+ \\ +\int_a^t\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s) \tag{1}$$

и их частным случаям приводятся задачи интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, механики сплошных сред и ряда других прикладных задач [1–5].

К нелинейным интегральным уравнениям с частными интегралами вида

$$x(t,s)=\int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int_a^t\int_c^d k(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma+f(t,s) \tag{2}$$

приводится задача Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина [2].

В общем случае найти явное решение интегральных уравнений (1) и (2) не представляется возможным. Поэтому важное значение имеет разработка приближенных и численных методов решения этих уравнений.

Применение хорошо известных численных методов решения линейных интегральных уравнений второго рода к интегральным уравнениям (1) требует осторожности, так как известные обоснования этих методов часто связаны с предположением о компактности интегральных операторов, содержашихся в таких уравнениях, которой не обладают частично интегральные операторы, определяемые первым и вторым слагаемыми в правой части уравнения (1), даже в случае ненулевых непрерывных ядер $l(t,s,\tau)$

Работа поддержана Минобрнауки России (проект №1.4407.2011)

и $m(t, s, \sigma)$. В частности, при обосновании метода механических квадратур для решения линейных интегральных уравнений второго рода [6-8] используется компактность линейных интегральных операторов, содержащихся в этих уравнениях.

Аналогичные проблемы возникают при обосновании численных методов решения нелинейного интегрального уравнения (2).

В связи с этими обстоятельствами в работе строятся алгоритмы численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами, основанные на применении метода механических квадратур, и приводятся теоремы о сходимости этого метода для уравнений рассматриваемых классов.

2. Численное решение линейного интегрального уравнения с частными интегралами. Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t,s) = \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t\int_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \tag{3}$$

с частными интегралами, где $t \in [a,b], s \in [c,d]$, заданные функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Уравнение (3) есть частный случай линейного уравнения (1) с частными интегралами.

Пусть $D = \{(\tau,s) : a \le \tau \le t \le b, s \in [c,d]\}$. Через $C(D)$ обозначим множество непрерывных на треугольнике D функций с супремум нормой, а через X — множество функций из $C(D)$, имеющих непрерывную частную производную по t. $C(D)$ и X — банаховы пространства относительно норм $\|x\|_{C(D)} = \max_D |x(t,s)|$ и $\|x\|_X = \max_D(|x(t,s)| + |x'_t(t,s)|)$ соответственно.

Под решением уравнения (3) будем понимать непрерывную функцию $x(t,s)$, подстановка которой в уравнение (3) обращает это уравнение в тождество.

В силу [4,5] уравнение (3) имеет единственное решение $x \in C(D)$. Тогда справедливо тождество

$$x(t,s) \equiv \int_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t\int_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s). \tag{4}$$

Так как подынтегральные функции в правой части тождества (4) непрерывны, то она дифференцируема но t. Дифференцируя но t тождество (4), получим тождество

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} \equiv c(t,s)x(t,s) + \int_c^d k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f'_t(t,s)\,. \tag{5}$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (3) является решением интегро-дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_c^d k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f'_t(t,s)\,. \tag{6}$$

с начальным условием

$$x(a,s) = f(a,s)\,. \tag{7}$$

Как и выше, под решением ИДУБ (6) здесь и далее понимается функция $x \in X$, подстановка которой в уравнение (6) обращает его в тождество.

Если функция x является решением задачи Коши (6)/(7), то имеют место тождество (5) и равенство (7). Интегрируя обе части тождества (5) по отрезку $[a, t]$ и учитывая условие (7), получим тождество (4), которое показывает, что решение задачи Коши (6)/(7) является решением интегрального уравнения (3). Таким образом, интегральное уравнение (3) и задача Коши (6)/(7) эквивалентны.

Задача Коши (6)/(7), очевидно, эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению:

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g(t,s)\,, \tag{8}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = k(\tau,s,\sigma)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}\,,$$

$$g(t,s) = \int\limits_a^t f'_t(\tau,s)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}d\tau + f(a,s)\exp\Big\{\int_a^t c(\xi,s)d\xi\Big\}\,.$$

Уравнение (8) является линейным интегральным уравнением с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$. Оно имеет единственное решение в $C(D)$, так как спектральный радиус компактного в $C(D)$ интегрального оператора R равен нулю [1,4,5], и это решение можно найти методом последовательных приближений.

Для численного решения уравнения (8) могут быть использованы многочисленные методы решения линейных интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур.

При применении метода механических квадратур к уравнению (8) отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разбиваются на части точками

$$t_p = a + ph(p = 0,1,\ldots,P, a + Ph \le b < (P+1)h)\,,$$

$$s_q = c + qg(q = 0,1,\ldots,Q, c + Qg \le d < (Q+1)g)\,,$$

в уравнении (8) заменим t и s на t_p и s_q соответственно, а интеграл вычислим но формуле

$$\int_a^{t_p}\int_c^d r(t_p,s_q,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}x(t_i,s_j) + r_{pq}\,, \tag{9}$$

где $r_{pqij} = r(t_p,s_q,t_i,s_j)$, а r_{pq} — остаток в формуле (9). В результате, интегральное уравнение (8) заменяется системой уравнений относительно неизвестных

$$x(t_i,s_j) \quad (i = 0,1,\ldots,P; j = 0,1,\ldots,Q)\,.$$

Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q)

$$x_{pq} = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}x_{ij} + g_{pq} + \delta_{pq} \quad (p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)\,, \tag{10}$$

где $g_{pq} = g(t_p, s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (9) с x_{pq}.

Аналогично в [9] доказывается

Теорема 1. *Пусть в формуле (9) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, $|\gamma_{pqij}| \le A < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} $(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$ может быть найдено из системы (10), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ $(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$.*

Таким образом, при численном решении линейного интегрального уравнения (3) с частными интегралами целесообразно перейти к эквивалентному линейному двумерному интегральному уравнению (8) и численно решать это уравнение с применением методов численного решения линейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур.

Отметим, что при сделанных выше предположениях описанный процесс численного решения линейного интегрального уравнения (3) непосредственно применяется и к численному решению задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина.

3. Численное решение нелинейного интегрального уравнения с частными интегралами. Результаты раздела 1 естественным образом распространяются на нелинейные интегральные уравнения с частными интегралами (2), где $t \in [a, b], s \in [c, d]$, $u \in (-\infty, +\infty)$, заданные функции $c(\tau, s), k(\tau, s, \sigma, u)$, $f(t, s)$ и функция $f'_t(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau, s, \sigma, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|k(\tau, s, \sigma, u) - k(\tau, s, \sigma, v)| \le N|u - v|\,,$$

а интегралы понимаются в смысле Лебега. Линейное интегральное уравнение (3) с частными интегралами есть частный случай уравнения (2). Оно получается из (2) при $k(\tau, s, \sigma, u) \equiv k(\tau, s, \sigma)u$.

Под решением уравнения (2) будем понимать непрерывную функцию $x(t, s)$, подстановка которой в уравнение (2) обращает это уравнение в тождество.

В силу [4] уравнение (2) имеет единственное решение $x \in C(D)$. Также как в разделе 1 показывается, что уравнение (2) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению Барбашина

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_c^d k(t, s, \sigma, x(t, \sigma))d\sigma + f'_t(t, s) \tag{11}$$

с начальным условием (7), где под решением ИДУБ (11) здесь и далее понимается функция $x \in X$, подстановка которой в уравнение (11) обращает это уравнение в тождество.

Задача Коши (11)/(7), очевидно, эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению:

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g(t,s)\,, \qquad (12)$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma,u) = \exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}k(\tau,s,\sigma,u)\,,$$

$$g(t,s) = \int\limits_a^t f_t'(\tau,s)\exp\Big\{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi\Big\}d\tau + f(a,s)\exp\Big\{\int_a^t c(\xi,s)d\xi\Big\}.$$

Уравнение (12) является интегральным уравнением Урысона с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma,u)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$, оно имеет единственное решение в $C(D)$ и это решение можно найти методом последовательных приближений [4].

Для численного решения интегрального уравнения Урысона (12) могут быть использованы различные методы решения интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур [3-7].

При применении метода механических квадратур к уравнению (12) отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разбиваются на части точками t_p и s_q (см. раздел 2), в уравнении (12) t и s заменяются на t_p и s_q соответственно, а интеграл вычисляется по «квадратурной» формуле

$$\int_a^{t_p}\int_c^d r(t_p,s_q,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}(x(t_i,s_j)) + r_{pq}\,, \qquad (13)$$

где $r_{pqij}(x(t_i,s_j)) = r(t_p,s_q,t_i,s_j,x(t_i,s_j))$, а r_{pq} — остаток в формуле (13). В результате, интегральное уравнение (12) заменяется системой уравнений относительно неизвестных

$$x(t_i,s_j) \quad (i = 0,1,\ldots,P;\, j = 0,1,\ldots,Q)\,.$$

Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему нелинейных уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p,s_q)

$$x_{pq} = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}r_{pqij}(x_{ij}) + g_{pq} + \delta_{pq} \quad (p = 0,1,\ldots,P;\, q = 0,1,\ldots,Q)\,, \qquad (14)$$

где $g_{pq} = g(t_p,s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (14) с неизвестными x_{pq}.

Если теперь в «квадратурной» формуле (13) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g \to 0$, $0 < \gamma_{pqij} \le A < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение $x_{pq}(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$ может быть найдено из системы (14), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon \quad (p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)\,. \tag{15}$$

Таким образом, при численном решении нелинейного интегрального уравнения (2) с частными интегралами целесообразно перейти к эквивалентному нелинейному двумерному интегральному уравнению (12) и численно решать это уравнение с применением методов численного решения нелинейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур. В частности, в силу теоремы 8 (для многомерного случая) из [10], примененной к уравнению (12), справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) в «квадратурной» формуле (13) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q *при* $h, g \to 0$ *и* $0 < \gamma_{pqij} \le A < \infty$;

б) погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q *при* $h, g \to 0$;

в) существует непрерывная частная производная $\partial k(\tau, s, \sigma, u)/\partial u$.

Тогда при всех достаточно малых h *и* g *приближенное решение* x_{pq} $(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$ *может быть найдено из системы (14), причем для любого заданного* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* h_0 *и* g_0, *что при* $h < h_0$ *и* $g < g_0$ *справедливы неравенства (15) и следующая оценка скорости сходимости:*

$$c_1 \varepsilon_{PQ} \le \max_{0 \le p \le P,\ 0 \le q \le Q} |x_{pq} - x(t_p, s_q)| \le c_2 \varepsilon_{PQ}\,,$$

где c_1 *и* c_2 *– некоторые постоянные,*

$$\varepsilon_{PQ} = \max_{0 \le p \le P,\ 0 \le q \le Q} |r_{pq}(z_{pq})|,\ \ z_{pq}(\tau, \sigma) = r(t_p, s_q, \tau, \sigma, x^*(\tau, \sigma))$$

$(p = 0, 1, \dots, P,\ q = 0, 1, \dots, Q)$, *а* $x^*(\tau, \sigma)$ *— единственное решение уравнения (12).*

В заключение отметим, что, при сделанных выше предположениях, описанный процесс численного решения нелинейного интегрального уравнения (2) непосредственно применяется и к численному решению задачи Коши для нелинейного ИДУБ (11).

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. – 560 p.
3. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Zeitschr. Ang. Math. Mech. –1999. – 79; 10. – S.703–713.
4. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

5. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.
6. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко / М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 456 с.
7. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей / Л.: ЛГУ, 1988. – 336 с.
8. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения: 2-е изд., перераб. и доп. / СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.
9. Kalitvin V.A. On the numerical solution of Barbashin's integro-differential equations with Python application // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – 188; 3. – P.250-255.
10. Вайникко Г.М. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – 7; 4. – С.723-751.

ON NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

V.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvin@gmail.com

Abstract. The solution schemes of linear and nonlinear integral equations with partial integrals containing fixed and variable bounds of integration are constructed. These schemes based on application of the mechanical quadrature method. The theorems about convergence of this method for classes of equations under consideration are reduced.

Key words: integral equations, equations with partial integrals, Barbashin's integro-differential equations, mechanical quadratures method.