УДК 60H10

СИНГУЛЯРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕСКОГО ТИПА И ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.Ю. Машков

Курский государственный университет,
Курск, Россия

Аннотация. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа мы понимаем как специальный класс стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которых в левой и правой частях имеются прямоугольные числовые матрицы, образующие вместе сингулярный пучок. Кроме того, в правой части имеется слагаемое, зависящее только от времени. Для исследования таких уравнений необходимо использовать производные произвольного порядка от детерминированного слагаемого и винеровского процесса. Для дифференцирования винеровского процесса применяется аппарат так называемых производных в среднем по Нельсону от случайных процессов. Это позволяет при исследовании не использовать аппарат обобщенных функций. Дается краткое введение в теорию производных в среднем, исследуется преобразование уравнений к каноническому виду и находятся формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, белый шум, винеровский процесс, уравнение леонтьевского типа.

Введение. Сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа мы понимаем как выражение

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t)\,,$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – сингулярный пучок матриц размера $m \times n$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная векторфункция.

Сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа в общей форме крайне неудобно для исследования. Поэтому мы с помощью преобразования Кронекера и последующей замены метрики пространства приводим его к более простому виду, а потом изучаем получившееся уравнение. Специфика подобных уравнений требует рассмотрения производных достаточно высоких порядков свободных членов – в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса. Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения необозримо сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования сингулярного стохастического уравнения леонтьевского типа основан на применении аппарата производных в среднем но Нельсону от случайных процессов, для описания которых не задействованы обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате, для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

Следующий раздел посвящен изложению основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Далее, изучаются вопросы о приведении стохастических уравнений сингулярного типа к каноническому виду. Наконец, последний раздел посвящен описанию решений сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа.

Более подробно предварительные сведения об аппарате производных в среднем изложены в [3, 4].

1. Производные в среднем. Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L^1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) «прошлое» $\mathcal{P}_t^\xi$ – порожденное прообразами борелевских множеств в R^n при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to R^n$ для $0 < s < t$;

(ii) «будущее» $\mathcal{F}_t^\xi$ – порожденное аналогичным образом для $t < s < l$;

(iii) «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ – порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства мы считаем полными, то есть пополняем всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону (см., например, [7–9]) даем следующее определение:

Определение 1 [3, 4].

(i) *Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \Big),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

(ii) *Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина*

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \Big),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и* $\Delta t \to +0$ *означает, что* Δt *стремится к* 0 *и* $\Delta t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [10]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}\Big|\xi(t) = x\right),$$

$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\Big|\xi(t) = x\right)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 2 [3, 4]. *Производная* $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ *называется симметрической производной в среднем. Производная* $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ *называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = (Y^0(t,x) + Y_*^0(t,x))/2$ и $u^\xi(t,x) = (Y^0(t,x) - Y_*^0(t,x))/2$.

Определение 3 [3, 4].
$v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ *называется текущей скоростью процесса* $\xi(t)$;
$u^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см., например, [3, 4, 7–9]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс [4], который мы обозначим символом $w(t)$.

Лемма 1 [4]. *Для* $t \in (0, l]$ *имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0\,, \qquad D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}\,, \qquad D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}\,.$$

Приведем леммы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса. Следуя системе обозначений из [3, 4], производную порядка k мы будем обозначать как D^w, D_*^w или D_S^w от производных порядка $k-1$. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ-алгебру «настоящее» именно винеровского процесса $w(t)$.

Лемма 2.

$$\text{(i) } D^w\frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{t^2} \text{ для } t \in (0, l); \qquad \text{(ii) } D_*^w\frac{w(t)}{t} = 0 \text{ для } t \in (0, l]\,;$$

$$\text{(iii) } D_S^w = -\frac{w(t)}{2t^2} \text{ для } t \in (0, l]\,.$$

Лемма 3 [5].

$$\text{(i) } D^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ ; \qquad \text{(ii) } D^w_*\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -(k-1)\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ ;$$

$$\text{(iii) } D_S^{w(t)}\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}\ .$$

Лемма 4. [5]. *При целом* $k \geq 2$ *имеет место*

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}\ .$$

2. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и их приведение к каноническому виду. Как сказано во введении, сингулярное стохастичекое уравнение леонтьевского типа – это стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t)\,, \tag{1}$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – сингулярный пучок матриц размера $m \times n$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

Для сингулярного пучка матриц $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ имеется преобразование Кронекера (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно), при котором матрица $P_L\tilde{B}P_R + \lambda P_L\tilde{A}P_R$ – квазидиагональна (см. [1]) и уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{A}P_RP_R^{-1}\xi(t) = \int_0^t P_L\tilde{B}P_RP_R^{-1}\xi(s)ds + \int_0^t P_Lf(s)ds + P_L\tilde{w}(t)\,. \tag{2}$$

При соответствующей нумерации векторов базиса, в матрице $A = P_L\tilde{A}P_R$ вдоль главной диагонали стоят в указанном порядке блоки следующих типов: N – жордановы клетки с нулями вдоль главной диагонали, E – единичная матрица, L и G – прямоугольные матрицы указанного ниже тина. В матрице $B = P_L\tilde{B}P_R$ в строках, соответствующих блокам A, стоят в указанном порядке блоки: E – единичная матрица, K – невырожденная матрица, M и H – прямоугольные матрицы указанного ниже вида.

Приведем вид матриц L и M, G и H явно в общем виде:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P_L^* оператор, сопряженный с P_L, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Напомним, что винеровский процесс $\tilde{w}(t)$ является гауссовским процессом со средним значением 0 и матрицей ковариаций It, где I – единичная матрица, т. е. с плотностью распределения $\rho^w(t,x) = (2\pi t)^{-n/2}\exp(-x^2/2t)$ относительно формы объема евклидовой метрики $(\cdot,\cdot)$. Так как матрица $P_LP_L^*$ невырождена, существует обратная матрица $(P_LP_L^*)^{-1} = (P_L^*)^{-1}P_L^{-1}$. Следовательно (см. [2]), $P_L\tilde{w}(t)$ также является гауссовским процессом со средним 0 и матрицей ковариаций $P_LP_L^*t$ и, значит, с плотностью

$$\rho^{P_L\tilde{w}}(t,x) = [(2\pi t)^n\Delta]^{-1/2}\exp\Big(-\frac{((P_LP_L^*)^{-1}x,x)}{2t}\Big)$$

относительно той же формы объема, где Δ – определитель матрицы $P_LP_L^*$.

Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X,Y\rangle = ((P_LP_L^*)^{-1}X,Y).$$

Теорема 1.

(i) *Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle P_LX, P_LY\rangle = (X,Y)$.*

(ii) *Процесс $w(t) = P_L\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

□ Напомним, что $(P_LP_L^*)^{-1} = (P_L^*)^{-1}P_L^{-1}$. Тогда

$$\langle P_LX, P_LY\rangle = ((P_L^*)^{-1}P_L^{-1}P_LX, P_LY) = (P_L^{-1}P_LX\,, \qquad P_L^{-1}P_LY) = (X,Y)\,.$$

Дифференциал объема в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отличается множителем $\Delta^{-1/2}$ от дифференциала объема в метрике $(\cdot,\cdot)$, т.е. плотность процесса $P_L\tilde{w}(t)$ относительно формы объема метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеет вид

$$(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{((P_LP_L^*)^{-1}x,x)}{2t}\Big) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{\langle x,x\rangle}{2t}\Big).$$

Легко видеть, что остальные требования из определения винеровского процесса также выполняются для $P_L\tilde{w}(t)$ в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ■

Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортонормированный базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$.

Следствие 1. *Векторы Ae_1, Ae_2,..., Ae_n образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2. *Введем $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$. В пространстве R^n с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ae_1, Ae_2,..., Ae_n сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t)\,.$$

Напомним, что в выражения для текущей скорости винеровского процесса в данном случае входит $\mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x)$, где Grad – градиент относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 5. *Имеет место формула $d\langle x,x\rangle = d(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = 2(P_L^*)^{-1}P_L^{-1}x$, где d – внешний дифференциал.*

Лемма 6. *Имеет место формула* $\mathrm{Grad}\langle x,x\rangle = \mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = 2x$.

□ Доказательство следует из формулы поднятия индексов

$$\mathrm{Grad}(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x) = P_L P_L^* d(P_L^{-1}x, P_L^{-1}x)$$

и из предыдущей леммы. ■

Следовательно, при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

3. Решения сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа. Итак, если нучек $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ сингулярен, то после применения преобразования Кронекера сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приобретает вид

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + w(t)\,. \qquad (3)$$

Из вида (3) понятно, что, для простоты, предполагается начальное условие $\eta(0) = 0$ для решения вида (3). Отметим сразу, что построенные нами ниже решения этому условию не удовлетворяют и, более того, при $t = 0$ они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Замечание 1. Переписав (3) в виде

$$A\eta(t) - B\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t P_L f(s)ds = w(t)\,,$$

мы видим, что «настоящее» для процесса

$$A\eta(t) - B\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t P_L f(s)ds$$

совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т. е. применять к (3) производные D^w, D^w_* или D^w_S.

Учитывая структуру матриц A и B, нетрудно видеть, что (3) распадается па несколько независимых систем уравнений четырех типов (каждой паре соответствующих блоков в A и B соответствует уравнение определенного типа). Обозначим через $\chi(t)$, $\zeta(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\xi(t)$, соответствующие парам блоков N и E, E и K, L и M, G и H, соответственно. Кроме того, посредством $u(t), v(t), g(t), z(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами. Будем обозначать их, как и сам винеровский процесс, посредством $w(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.

Паре матриц N и E размера $(p+1)\times(p+1)$ соответствует система типа

$$N\chi(t) = \int_0^t \chi(s)ds + \int_0^t u(s)ds + w(t)\,, \tag{4}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi^1(t) \\ \chi^2(t) \\ \vdots \\ \chi^p(t) \\ \chi^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t(\chi^1(s)+u^1(s))ds \\ \int_0^t(\chi^2(s)+u^2(s))ds \\ \vdots \\ \int_0^t(\chi^p(s)+u^p(s))ds \\ \int_0^t(\chi^{p+1}(s)+u^{p+1}(s))ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из последнего уравнения системы (5) получаем, что

$$\int_0^t (\chi^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds = -w^{p+1}(t)\,. \tag{6}$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\chi^{p+1}(t)$ применением к обеим частям производной D^w_S. Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D^w_* (и, следовательно, D^w_S) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\chi^{p+1}(t)$. Таким образом, мы находим, что

$$\chi^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - D_S w^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}\,. \tag{7}$$

Из предпоследнего уравнения системы (5) мы получаем, что

$$\chi^{p+1}(t) = \int_0^t (\chi^p(s) + u^p(s))ds + w^p(t)\,, \tag{8}$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, заключаем

$$\chi^p(t) = -u^p(t) + D^w_S\chi^{p+1}(t) - D^w_S w^p(t)\,.$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\chi^{p+1}(t)$ из (5) и использовав Лемму 2, получим

$$\chi^p(t) = -\frac{du^{p+1}}{dt} - u^p(t) + \frac{w^{p+1}(t)}{2t^2} - \frac{w^p(t)}{2t} \,. \tag{9}$$

Совершенно аналогично, для $1 \le i \le p$ мы получаем рекурентную формулу

$$\chi^i(t) = D_S^w \chi^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t) - u^i \,. \tag{10}$$

С помощью Лемм 3 и 4 по формуле (10) нетрудно получить явное выражение для любого $\chi^i(t)$.

Для пары матриц E и K размера $(q+1)\times(q+1)$ получаем систему в R^{q+1} типа

$$\zeta(t) = K \cdot \int_0^t \zeta(s)ds + \int_0^t v(s)ds + w(t) \,, \tag{11}$$

Для уравнения (11) известна аналитическая формула для решений

$$\zeta(t) = \int_0^t v(\tau)\exp K(t-\tau)d\tau + \int_0^t \exp K(t-\tau)dw(\tau) \,.$$

Рассмотрев пару матриц L и M размера $l \times (l+1)$, получим систему вида

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t g(s)ds + w(t) \,. \tag{12}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^l(t) \\ \eta^{l+1}(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(s) \\ \eta^2(s) \\ \vdots \\ \eta^l(s) \\ \eta^{l+1}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} g^1(s) \\ g^2(s) \\ \vdots \\ g^{l-1}(s) \\ g^l(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^{l-1}(t) \\ w^l(t) \end{pmatrix} , \tag{13}$$

т. е.

$$\eta^2(t) = \int_0^t (\eta^1(s) + g^1(s))ds + w^1 \,,$$

$$\eta^3(t) = \int_0^t (\eta^2(s) + g^2(s))ds + w^2 \,,$$

$$\eta^{l+1}(t) = \int_0^t (\eta^l(s) + g^l(s))ds + w^l \,.$$

Это означает, что можно взять в качестве η^{l+1} произвольный случайный процесс, для которого можно вычислить симметрическую производную порядка l, а потом рекурентно получить все остальные компоненты процесса η. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\eta^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - D_S^w W^l - g^l(t) = D_S^w \eta^{l+1} - \frac{w^l(t)}{2t} - g^l(t)\,,$$
$$\eta^l(t) = \int_0^t (\eta^{l-1}(s) + g^{l-1}(s))ds + w^{l-1}\,,$$
$$\eta^{l-1}(t) = D_S^w \eta^l - D_S^w w^{l-1} - g^{l-1}(t) = D_S^2 \eta^{l+1} + \frac{w^l(t)}{4t^2} - \frac{w^{l-1}}{2t} - g^{l-1}\,.$$

Точно также, для $1 \le i \le l$ получаем

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1} - D_S^w w^i(t) - g^i(t)\,. \tag{14}$$

С помощью Лемм 3 и 7 по формулам (14) несложно получить явное выражение для любого $\eta^i(t)$.

И, наконец, для матриц G и H размера $(k+1)\times k$ имеем систему типа

$$G\theta(t) = \int_0^t H\theta(s)ds + \int_0^t z(s)ds + w(s)\,. \tag{15}$$

В координатной форме получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta^1(t) \\ \theta^2(t) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(t) \\ \theta^k(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta^1(s) \\ \theta^2(s) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(s) \\ \theta^k(s) \end{pmatrix} ds +$$
$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} z^1(s) \\ z^2(s) \\ \vdots \\ z^k(s) \\ z^{k+1}(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^k(t) \\ w^{k+1}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

или

$$0 = \int_0^t (\theta^1(s) + z^1(s))ds + w^1\,,$$
$$\theta^1(t) = \int_0^t (\theta^2(s) + z^2(s))ds + w^2\,,$$
$$\theta^{k-1}(t) = \int_0^t (\theta^k(s) + z^k(s))ds + w^k\,,$$
$$\theta^k(t) = \int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}\,.$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta^1(t) = -z^1(t) - D_S^w w^1 = -z^1 - \frac{w^1(t)}{2t}\,, \tag{17}$$
$$\theta^2(t) = -z^2(t) + D_S^w\theta^1 - D_S^w w^2(t) = -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} + \frac{w^1(t)}{4t^2} - \frac{w^2(t)}{2t}\,,$$
$$\theta^k(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} - $$
$$- D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - \ldots - D_S^k w^1(t)\,,$$

а также условие согласования

$$\int_0^t z^{k+1}(s)ds + w^{k+1}(t) = -z^k(t) - \frac{dz^{k-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{k-1}z^1(t)}{dt^{k-1}} -$$
$$- D_S w^k(t) - D_S^2 w^{k-1}(t) - \ldots - D_S^k w^1(t)\,.$$

Если компоненты w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \le i \le k$ имеет место рекуррентная формула

$$\theta^i(t) = -z^i(t) + D_S^w\theta^{i-1} - D_S^w w^i(t)\,. \tag{18}$$

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений систем (5), (13) и (16). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции задействованы, как приращения но времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Леммы 2, 3 и 4, а также формулы (7) и (10), (14), (17) и (18), нетрудно видеть, что полученные выше решения $\xi^i(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $w^j(t)/t^k$, $k \ge 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0\,, & \text{если } 0 \le t \le t_0; \\ t\,, & \text{если } t_0 \le t\,. \end{cases}$$

Элементы $w^j(t)/t^k$ в формулах (7) и (10), (14), (17) и (18) заменим на $w^j(t)/(t_0(t))^k$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Замечание 2. Напомним, что значения производных в среднем существенно зависят от того, σ-алгебру «настоящее» какого процесса мы используем. Проилюстрируем это на примере полученных выше формул. В Замечании 1 мы обосновали использование σ-алгебры «настоящее» n-мерного винеровского процесса (т.е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения (3) как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ-алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Поясним это на примере системы уравнений (5). Например, так произойдет если рассматривать уравнения системы (5) по отдельности. Уравнение (6) не зависит от других уравнений системы (5) и может исследоваться отдельно от (5). В этом случае, рассуждая как в Замечании 1, что в конструкции производных в среднем для процессов $\chi^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравнение (8) в виде $\chi^{p+1}(t) - \int_0^t \chi^p(s)ds = w^p(t)$. Опять рассуждая аналогично Замечанию 1, придем к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^p(t)$ и т. д. Напомним, что координаты n-мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. По свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \neq j$. Аналог рекуррентной формулы (10) примет вид $\chi^i(t) = D_S^{w^i}\chi^{i+1}(t) - D_S^{w^i}w^i(t)$. Однако, из сказанного выше и конструкции производных в среднем вытекает, что $D_S^{w^i}\chi^{i+1} = 0$, т.е. $\chi^i(t) = -D_S^{w^i}w^i = -\frac{w^i(t)}{2t}$ при всех $i = 1, 2, ..., p, p+1$. Аналогичное замечание можно сделать для систем (13) и (16).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Физматлит, 1967.– 576 с.
2. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / Скороход А.В. – М.: Наука, 1977.– 568 с.
3. Gliklikh Yu.E. Global end Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
4. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
5. Гликлих Ю.Е., Машков Е.Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – 6, №2. – С.25-39.
6. Cresson J., Darses S. Stochastic Embedding of Dynamical Sustems // J. of Mathematical Physics. – 2007. – 48. – P.072703-1–072303-54. [DOI: 10.1063/1.2736519].
7. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews. – 1966. – 150, №4. – P. 1079-1085.
8. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion / Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

9. Nelson E. Quantum fluctuations / Princeton: Princeton University Press, 1985. – 148 p.
10. Партасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / М.: Мир, 1988. – 344 с.

SINGULAR STOCHASTIC EQUATIONS OF THE LEONTIEV TYPE AND DERIVATIVE IN AVERAGE OF RANDOM PROCESSES

E.Yu. Mashkov

Kursk State University,
Kursk, Russia

Abstract. Singular stochastic equations of the Leontiev type are understood as the special class of stochastic differential equations of the Ito form which have some rectangular numerical matrices at their left and right sides generating singular bundle. Besides, at the right side there is the item depending on time only. For investigation of such equations, it is necessary to use derivatives of arbitrary order on the deterministic summand and the wiener process. For differentiation of wiener process the technique of so-called Nelson's derivatives in average on random processes is applied. It permits do not use the technique of generalized functions. The short introduction into the theory of derivatives in average is proposed, it is studied the transformation of equations to the canonical form and it is found formulas of solutions in terms of derivatives in average on the wiener process.

Key words: derivative in average, velocity, white noise, Wiener process, Leontiev's equation.