MSC 35J62

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А.А. Хаджи

Башкирский государственный университет,

пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: anna_5955@mail.ru

Аннотация. Рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами в неограниченной области. Для решений соответствующей задачи Дирихле установлена ограниченность и получены оценки сверху, характеризующие убывание на бесконечности неограниченных областей.

Ключевые слова: задача Дирихле, анизотропное эллиптическое уравнение, неограниченная область, убывание решения, ограниченность решения.

Введение. Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} - a(\mathbf{x}, u) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega\,; \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $\xi \in \mathbb{R}_n$. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ и $1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. Положим, что существуют положительные числа $\overline{a}$, $\widehat{a}$ такие, что для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются условия:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha}\,; \tag{3}$$

$$|a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)| \leq \widehat{a} |\xi_\alpha - \eta_\alpha| \left(|\xi_\alpha| + |\eta_\alpha|\right)^{p_\alpha - 2}, \qquad \alpha = \overline{1, n}\,; \tag{4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, n}\,. \tag{5}$$

Функция $a(\mathbf{x}, s)$ измерима по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $s \in \mathbb{R}$. Пусть $k > 1$ и существуют числа $\overline{b}, \widehat{b} > 0$ такие, что для всех $s, t \in \mathbb{R}$ при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются условия:

$$(a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t))(s - t) \geq \overline{b} |s - t|^k, \tag{6}$$

$$|a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t)| \leq \widehat{b} |s - t| (|s| + |t|)^{k-2}, \tag{7}$$

$$a(\mathbf{x}, 0) = 0\,. \tag{8}$$

Очевидно, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) = |\xi_\alpha|^{p_\alpha - 2}\xi_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, $a(\mathbf{x}, s) = |s|^{k-2}s$, удовлетворяют условиям (3) – (8) и при этом уравнение (1) примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha - 2} u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{k-2}u = \Phi(\mathbf{x}).$$

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко, В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквеишвили и другие (подробный обзор результатов приведен в [1]). Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым [2] для некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка установлены оценки сверху решения задачи Дирихле в неограниченных областях. В работе [3] для решений анизотропных эллиптических уравнений без младших членов получены оценки сверху и доказана их точность в изотропном случае. И.М. Колодий [4] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. При этом требование ограниченности области является существенным условием в его доказательстве. Основной результат этой статьи — оценка скорости убывания ограниченных обобщенных решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи* (1), (2) *и выполнены условия* (3 -8), *а также*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} < 1 + \frac{n}{k^2}\,, \tag{9}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} > 1\,, \tag{10}$$

$$k^2 - nk + n \geq 0\,. \tag{11}$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq C\,, \tag{12}$$

где C — константа, зависящая от p_α, k, n и $\|\Phi\|_{L_{k/(k-1)}(\Omega)}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\widehat{b}$.

Далее, будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2, n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \,\big|\, a < x_s < b\}$, значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r) = \inf \left\{ \|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \,\Big|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1 \right\}, \quad r > 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)\, d\rho = \infty\,, \tag{13}$$

$$\operatorname{supp} \Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{14}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (13), (14), то существуют положительные числа κ, $\mathcal{M}$ такие, что для ограниченного обобщенного решения $u(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) при $r > 2R_0$ справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_r)} + \|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho \right), \tag{15}$$

где $\mathcal{M}$ — константа, зависящая от $\|\Phi\|$, R_0, p_s, n, $\overline{a}$, $\widehat{a}$, $\overline{b}$, $\widehat{b}$, κ — константа, зависящая от p_s, $\overline{a}$, $\widehat{a}$.

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f)[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0, \ |\mathbf{x}'_s| < f(x_s)\}, \quad s \in \overline{2, n},$$

$\mathbf{x}'_s = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ с положительной функцией $f(x_s) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)[s]$ было областью. Для таких областей справедливо соотношение

$$\nu(r) = \frac{c}{f(r)}, \qquad r > 0,$$

и поэтому условие (13) принимает вид

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)} = \infty.$$

Следствием теоремы 2 для областей вращения является следующая оценка

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_r)} + \|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int\limits_1^r \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)} d\rho \right). \tag{16}$$

В области $\Omega(f_a)[s]$ с функцией $f_a(x) = x^a$, $0 \le a < p_1/p_s$, $x > 0$ для решения задачи (1), (2) оценка (16) принимает вид

$$\|u\|_{L_k(\Omega_r)} \le \mathcal{M}_a \exp\left(-\kappa_a r^{1 - a p_1/p_s} \right).$$

1. Вспомогательные сведения. Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha} + \|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, $\alpha = \overline{1,n}$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) v_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x}, u) + \Phi(\mathbf{x}))v \right\} d\mathbf{x} = 0 \tag{17}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(3-8)$. *Тогда существует единственное обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *с функцией* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} + \|u\|_k^k \le A\|\Phi\|_{k/(k-1)}^{k/(k-1)}, \tag{18}$$

где A — *константа, зависящая от* $\overline{a}$, $\overline{b}$, k.

□Доказательство существования проводится методом галеркинских приближений. ■

Лемма 1 (см. [5]- [7]). *Пусть* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *и*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{q_\alpha} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} < \infty, \quad q_\alpha \ge 0, \quad p_\alpha \ge 1, \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Если выполнено условие (10), *то* $u(\mathbf{x}) \in L_Q(\Omega)$ *при*

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(1 + q_\alpha/p_\alpha\Big) \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\Big)^{-1}$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_Q \le B \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{q_\alpha} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \right)^{K/Q}, \tag{19}$$

где B — *константа, зависящая от* q_α, p_α, n *и*

$$K = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} - 1 \right)^{-1}.$$

Лемма 2 (см. [8]). *В области* Ω, *расположенной вдоль выделенной оси* Ox_s, *для функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *при* $0 < a < b$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b} \|u\|_{p_s, \Omega_a^b} \le \frac{p_s}{p_s - 1} \|u_{x_s}\|_{p_s}. \tag{20}$$

2. Ограниченность решения.

Доказательство теоремы 1 проводится итеративным методом, который был предложен Ю. Мозером [4] и широко использовался в работах И.М. Колодия [4], С.Н. Кружкова [10], [11], Д. Серрина [5].

Для фиксированных чисел $q \geq 1$ и $l > 0$ определим функции:

$$F(|u|) = \begin{cases} |u|^q, & \text{если} \quad |u| \leq l, \\ ql^{q-1}|u| - (q-1)l^q\,, & \text{если} \quad l < |u|, \end{cases}$$

и

$$G(u) = F(|u|)F'(|u|)^{k-1}\operatorname{sign} u\,, \qquad -\infty < u < \infty\,.$$

Положим $v(\mathbf{x}) = G(u)$. Почти всюду па множестве $\{\mathbf{x} : |u| \neq l\}$ имеем

$$v_{x_\alpha} = G'(u)u_{x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,n}\,,$$

где

$$G'(u) = \begin{cases} \dfrac{kq-k+1}{q}F'(|u|)^k\,, & \text{если} \quad |u| \leq l\,, \\ F'(|u|)^k\,, & \text{если} \quad l < |u|\,. \end{cases}$$

Используя

$$kF'(|u|)^k \geq G'(u) \geq F'(|u|)^k, \qquad |G(u)| \leq F(|u|)F'(|u|)^{k-1},$$

находим

$$L(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)v_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x},u) + \Phi(\mathbf{x}))v =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)G'(u)u_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x},u) + \Phi(\mathbf{x}))G(u) \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)u_{x_\alpha}F'(|u|)^k - (|a(\mathbf{x},u)| + |\Phi(\mathbf{x})|)F(|u|)F'(|u|)^{k-1}.$$

Пользуясь условиями (3), (5), (7), (8), выводим

$$L(u,v) \geq \bar{a}\sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}F'(|u|)^k - (\widehat{b}|u|^{k-1} + |\Phi|)F(|u|)F'(|u|)^{k-1}. \tag{21}$$

На множестве $\{\mathbf{x} : |u| \neq l\}$ неравенство (21) имеет место почти всюду. Поэтому можно проинтегрировать его но $\mathbf{x} \in \Omega$ и, учтя определение обобщенного решения, получим

$$\int\limits_\Omega F'(|u|)^k \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq C_1 \int\limits_\Omega F(|u|)F'(|u|)^{k-1}(|u|^{k-1} + |\Phi|)d\mathbf{x}\,.$$

Учитывая, что $F(|u|) \leq |u|^q$, $F'(|u|) \leq q|u|^{q-1}$, выводим

$$\int\limits_{\Omega} F'(|u|)^k \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq C_1 q^{k-1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+(q-1)(k-1)}(|u|^{k-1} + |\Phi|) d\mathbf{x} . \tag{22}$$

Предположим, что правая часть (22) конечна. Устремим l к ∞ в левой части (22) и применим лемму Фату:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{k(q-1)} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq \frac{C_1}{q} \int\limits_{\Omega} |u|^{qk-k+1}(|u|^{k-1} + |\Phi|) d\mathbf{x} = \frac{C_1}{q} I . \tag{23}$$

Применяя неравенство Гельдера и пользуясь оценкой (18), выводим:

$$I \leq \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(qk-k+1)k} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \cdot \left(\|u\|_k^{k-1} + \|\Phi\|_{k/(k-1)} \right) \leq$$

$$\leq C_2 \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(qk-k+1)k} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \cdot \|\Phi\|_{k/(k-1)} .$$

Далее, для $q > 1$, применяя неравенство Гельдера и оценку (18), выводим

$$I \leq C_2 \|\Phi\|_{k/(k-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{(q-1)k^3 q/(qk-1)} |u|^{(k^2-k)/(qk-1)} d\mathbf{x} \right)^{1/k} \leq$$

$$\leq C_2 \|\Phi\|_{k/(k-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)} \cdot \|u\|_k^{(k-1)/(qk-1)} \leq \tag{24}$$

$$\leq C_3 \|\Phi\|_{k/(k-1)}^{qk/(qk-1)} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)} .$$

Отметим, что при $q = 1$

$$I \leq C_2 \|u\|_k \cdot \|\Phi\|_{k/(k-1)} \leq C_3 \|\Phi\|_{k/(k-1)}^{k/(k-1)} . \tag{25}$$

Таким образом, из (23), (25), (24) следует неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{k(q-1)} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq C_4 \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{k^2 q} d\mathbf{x} \right)^{(q-1)/(qk-1)} , \tag{26}$$

причем в случае $q = 1$ второй множитель равен 1.

Положим $P = n\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\right)^{-1}$. Из леммы 1 для $q_\alpha = k(q-1)$, $\alpha = \overline{1,n}$, имеем

$$Q = \left(n + k(q-1)\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right) \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\right)^{-1} = P + k(q-1)K\,.$$

Тогда, применяя (19), из (26) выводим

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{P+k(q-1)K} d\mathbf{x}\right)^{1/K} \le C_5 \left(\int\limits_\Omega |u|^{qk^2} d\mathbf{x}\right)^{(q-1)/(qk-1)}. \tag{27}$$

Пусть $h = k^2(q-1)+k\theta$, $\quad m = K/k$, $\quad \tau = P - K\theta = k^2 - k\theta$, где $\theta = (P-k^2)/(K-k)$. Тогда $\tau + mh = P + Kk(q-1)$, $\tau + h = k^2 q$. Условие (11) влечет $1 + n/k^2 \le 1 + 1/(k-1)$, из условий (9), (11) следует, что $m > 1$, $\theta > 0$.

Из (27) выводим

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{\tau+mh} d\mathbf{x}\right)^{1/(mh)} \le {C_5}^{k/h} \left(\int\limits_\Omega |u|^{\tau+h} d\mathbf{x}\right)^{k(q-1)/(h(qk-1))}.$$

Положим $h = k\theta m^\nu$, $\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{\tau+k\theta m^{\nu+1}} d\mathbf{x}\right)^{1/(k\theta m^{\nu+1})} \le {C_5}^{1/(\theta m^\nu)} \left(\int\limits_\Omega |u|^{\tau+k\theta m^\nu} d\mathbf{x}\right)^{(q-1)/(\theta m^\nu(qk-1))}.$$

Введя обозначение

$$\Theta_\nu = \left(\int\limits_\Omega |u|^{\tau+k\theta m^\nu} d\mathbf{x}\right)^{1/(k\theta m^\nu)},$$

получаем неравенство

$$\Theta_{\nu+1} \le {C_5}^{1/(m^\nu\theta)} {\Theta_\nu}^{k(q-1)/(qk-1)}, \quad \nu = \overline{0,\infty}\,.$$

Для $\nu = 0$ имеем $q = 1$, следовательно,

$$\Theta_1 \le {C_5}^{1/\theta},$$

далее, поскольку $k(q-1)/(qk-1) < 1$, то

$$\Theta_2 \le {C_5}^{1/(m\theta)} \left({C_5}^{1/\theta}\right)^{k(q-1)/(qk-1)} \le {C_5}^{1/(m\theta)+1/\theta}$$

и т.д. В итоге, получим

$$\Theta_{\nu+1} \leq C_5^{1/\theta \sum\limits_{i=0}^{\infty} 1/m^i} = C.$$

При $\nu \to \infty$ из последнего неравенства получаем оценку (12).

3. Убывание решения.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\theta(x)$, $x > 0$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geq r$, — нулю при $x \leq R_0$, линейная при $x \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = \delta \nu^{p_1/p_s}(x)\theta(x), \quad x \in (2R_0, r), \tag{28}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(x) = \frac{\theta(2R_0)}{R_0} = \frac{1}{R_0} \exp\left(-\delta \int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right), \quad x \in (R_0, 2R_0). \tag{29}$$

Для любой функции $v(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следуют неравенства

$$\nu(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho} \leq \|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho}, \qquad \rho > 0,$$

из которого выводим соотношение

$$\int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\nu^{p_1}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho} d\rho \leq \int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho} d\rho. \tag{30}$$

Применяя (30) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ при $s \in \overline{2,n}$, выводим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_s}_{p_s,\gamma_\rho} d\rho \leq \\ &\leq \max_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1} \int\limits_{2R_0}^{r} \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho} d\rho \leq \\ &\leq \max_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1} \int\limits_{2R_0}^{r} \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho} d\rho\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Отметим, что неравенства (31) справедливы для любой ограниченной функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$.

Пусть $\xi(\mathbf{x})$ липшицева неотрицательная срезающая функция. Положив в (17) $v = u\xi$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)(u\xi)_{x_\alpha} + (a(\mathbf{x}, u) + \Phi(\mathbf{x}))(u\xi) \right\} d\mathbf{x} = 0\,.$$

Возьмем $\xi(x_s) = \theta^{p_s}(x_s)$. Далее, применяя (3)—(6), (8), (14), получаем

$$\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \le \widehat{a}p_s\int\limits_{\Omega}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}\theta^{p_s-1}(x_s)\theta'(x_s)d\mathbf{x} \equiv J. \tag{32}$$

Используя неравенство Юнга выводим

$$J \le \varepsilon(p_s-1)\widehat{a}\int\limits_{\Omega}|u_{x_s}|^{p_s}\theta^{p_s}d\mathbf{x} + \frac{\widehat{a}}{\varepsilon^{p_s-1}}\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}. \tag{33}$$

Выберем $\varepsilon = \dfrac{\overline{a}}{2\widehat{a}}\cdot\dfrac{1}{p_s-1}$. Соединяя (32), (33), выводим неравенство

$$\frac{\overline{a}}{2}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha\neq s,\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \le C_1\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}. \tag{34}$$

Пользуясь (28) и (29), нетрудно привести (34) к виду

$$\frac{\overline{a}}{2}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha\neq s,\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} + \overline{b}\int\limits_{\Omega}\theta^{p_s}|u|^k d\mathbf{x} \le \le C_1\delta^{p_s}\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u|^{p_s}\nu^{p_1}(x_s)\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x} + + C_1\frac{1}{{R_0}^{p_s}}\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_{\Omega_{R_0}^{2R_0}}|u|^{p_s}d\mathbf{x} = J_1 + J_2. \tag{35}$$

Применяя (31), получаем

$$J_1 \le C_2\delta^{p_s}\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u_{x_1}|^{p_1}\theta^{p_s}d\mathbf{x}. \tag{36}$$

Используя (20), (18), выводим

$$J_2 \le C_3\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right). \tag{37}$$

Выбирая $\delta = \left(\dfrac{\overline{a}}{2C_2}\right)^{1/p_s}$ и соединяя (35)—(37), выводим

$$\frac{\overline{a}}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega_r} + \overline{b}\|u\|^{k}_{k,\Omega_r} \leq C_4 \exp\left(-C_5 \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right).$$

Неравенство (15) доказано.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Кожевниковой Л.М. за помощь в подготовке статьи.

Литература

1. Кожевникова Л.М. Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. – 2008. – 199(2). – С.61-94.
2. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка а неограниченных областях // Уфимск. матем. журн. – 2010. – 2(2). – С.53-66.
3. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестник СамГТУ. – 2013. – 30(1). – С.90-96.
4. Колодий И.М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Вестник МГУ. – 1970. – 5. – С.45-52.
5. Дубинский Ю.А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1964. – 3. – С.458-480.
6. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1959. – 13. – C.115-162.
7. Лу Вень Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными нроизводными, суммируемыми с различными степенями // Вестн. ЛГУ. – 1961. – 7. – С.23-27.
8. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. матем. журн. – 2011. – 3(4). – С.64-85.
9. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communs. Pure and Appl. Math. – 1960. – 3. – C.457-468.
10. Кружков С.Н. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений // ДАН СССР. – 1963. – 3. – С.470-473.
11. Кружков С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. – 1968. – 77. – С.229-334.
12. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equatons // Acta math. – 1964. – 3(4). – C.247-302.

SOLUTIONS DECREASE OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH THE YOUNGER TERMS IN UNBOUNDED DOMAINS

A.A. Khadzhi

Bashkir State University,

Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: anna_5955@mail.ru

Abstract. It is studied the class of anisotropic elliptic equations of second order with younger terms in unbounded domains. For solutions of the corresponding Dirichlet problem are set some restrictions and estimates from above that characterize its decrease at infinity in unbounded domains.

Key words: Dirichlet's problem, anisotropic elliptic equation, unbounded domain, solutions decrease, restrictions.