



КОМПЬЮТЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Н.А. ЧЕКАНОВ¹
И.К. КИРИЧЕНКО²
В.Е. БОГАЧЕВ³
Н.Н. ЧЕКАНОВА²

¹⁾ *Белгородский юридический институт МВД России*

²⁾ *Украинская инженерно-педагогическая академия*

³⁾ *Белгородский университет кооперации, экономики и права*

e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru

В настоящей работе изучен конкретный класс консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Показано, что при произвольных значениях параметров функции Гамильтона в системе имеет место хаотический режим движения. Найдено, что при выполнении условия $c = 4d$ система является интегрируемой. Кроме того, применение метода нормальных форм позволило систему уравнений движения Гамильтона с двумя степенями свободы привести к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, метод нормальных форм Биркгофа-Густавсона, компьютерное моделирование, система Reduce.

В настоящее время явление динамического или детерминированного хаоса, открытое Анри Пуанкаре в конце девятнадцатого века, бурно развивается во всех областях науки и техники. Хаотическое движение имеет место для динамических систем, начиная с консервативных систем с двумя степенями свободы и систем с одной степенью свободы с явной зависимостью от времени [1, 2]. Проблема существования хаотических режимов движения, кроме теоретических исследований, изучается экспериментально (см., например, [3]).

Явление динамического хаоса непосредственно связано с неинтегрируемостью данной системы, то есть с отсутствием достаточного количества интегралов движения, согласно теореме Лиувилля в рассматриваемых системах. Для решения вопроса о существовании хаотических режимов движения имеется ряд универсальных методов, применение которых связано с очень громоздкими численными расчетами для конкретных траекторий: метод автокорреляционной функции, метод показателя Ляпунова, метод колмогоровской КС-энтропии [1].

Однако все эти методы применимы к индивидуальным траекториям и поэтому большой интерес представляют попытки найти более простые аналитические пути предсказания перехода к хаосу в динамических системах. Для нахождения таких критериев можно попробовать связать условия на параметры гамильтониана, при которых возникает локальная неустойчивость, с границей перехода к хаосу. Хотя в общем случае потеря устойчивости регулярного движения не обязательно приводит к глобальной неустойчивости, т.е. хаосу, критерии подобного типа вместе с численными расчетами значительно упрощают анализ многомерного нелинейного движения.

Однако, к сожалению, универсального аналитического метода предсказания хаотических движений для любой конкретной системы в настоящее время не существует, хотя имеются некоторые частные способы для установления режимов движения: хаотических или регулярных. К примеру, если найдено достаточное число независимых интегралов движения, то в этой системе отсутствует хаос, но нахождение этих интегралов – задача до сих пор не решенная. Для консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы имеется достаточно простой численный метод определения хаотического движения – метод сечений Пуанкаре.

Одним из аналитических способов определения существования хаоса является так называемый критерий отрицательной гауссовой кривизны [4, 5]. Здесь наличие областей с отрицательной гауссовой кривизной на поверхности потенциальной энергии связывается с существованием хаоса в такой системе. Этот критерий является ни достаточным, ни необходимым, однако если он применим к данной системе, то он

достаточно хорошо предсказывает переход от регулярного характера движения к хаотическому. Для большинства консервативных гамильтоновых систем, исследованных в литературе, этот критерий применим.

Так как большинство динамических задач классической механики не могут быть представлены в явном виде, то продолжают разрабатываться, как различные приближенные аналитические методы, так и методы непосредственных прямых численных расчетов. Одним из универсальных аналитических методов приближенного решения уравнений движения гамильтоновых систем является метод нормализации в подходах Биркгофа-Густавсона и Депри-Хори.

В настоящей работе предложена и исследована достаточно интересная одна модельная классическая система с двумя степенями свободы, которая описывается следующей функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V, \tag{1a}$$

$$V = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b\left(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3}q_2^3\right) + cq_1^2 q_2^2 + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \tag{1b}$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 канонически сопряженные импульс и координата, а b, c, d – параметры.

Поверхность потенциальной энергии (ППЭ) (1б) в зависимости от параметров имеет достаточно сложный рельеф, особые точки которой находятся из системы двух уравнений $V'_{q_1}(x) = 0, V'_{q_2} = 0$ (см., например, рис. 1.А и 2.А). На этих рисунках показаны также линии нулевой гауссовой кривизны, описываемые уравнением $(V''_{q_1 q_1}) \cdot (V''_{q_2 q_2}) - (V''_{q_1 q_2})^2 = 0$.

При произвольных значениях параметров рассматриваемая классическая система (1) является неинтегрируемой, что иллюстрируется вычисленными сечениями Пуанкаре (рис. 1.Б, 1.В). При этом объем фазового пространства, занятого хаотическими траекториями увеличивается с возрастанием полной энергии E .

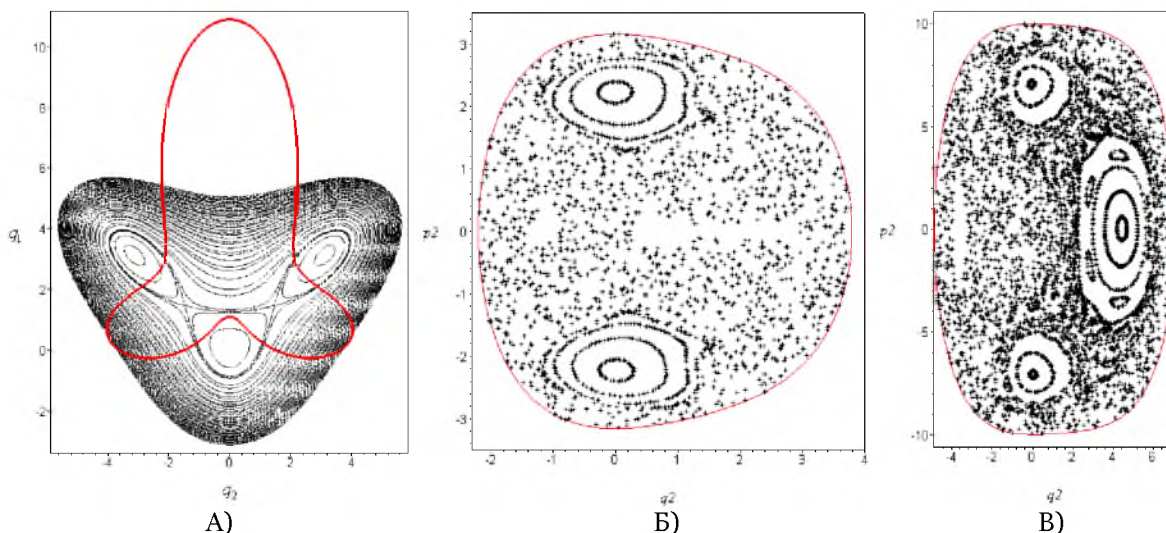


Рис. 1. Часть изолиний ППЭ (1б) (тонкие) и линия нулевой гауссовой кривизны (жирная) при значениях параметров $b = -1/2, c = -1/40, d = 1/30$ (А); сечения Пуанкаре при этих же значениях параметров при полной энергии $E = 5$ (Б); сечения Пуанкаре при этих же значениях параметров при полной энергии $E = 50$ (В)



Однако, в случае выполнения условия $c = 4d$, эта система является интегрируемой, так как имеется второй, кроме полной энергии $E = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$, интеграл движения, который представим в виде

$$I = p_1 p_2 + q_1 q_2 + b \left(q_1 q_2^2 + \frac{1}{3} q_1^3 \right) + 4d q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2). \quad (2)$$

Интегрируемость (отсутствие хаотических траекторий) подтверждается также сечением Пуанкаре (рис. 2.Б). На рис. 2.А приведена ППЭ.

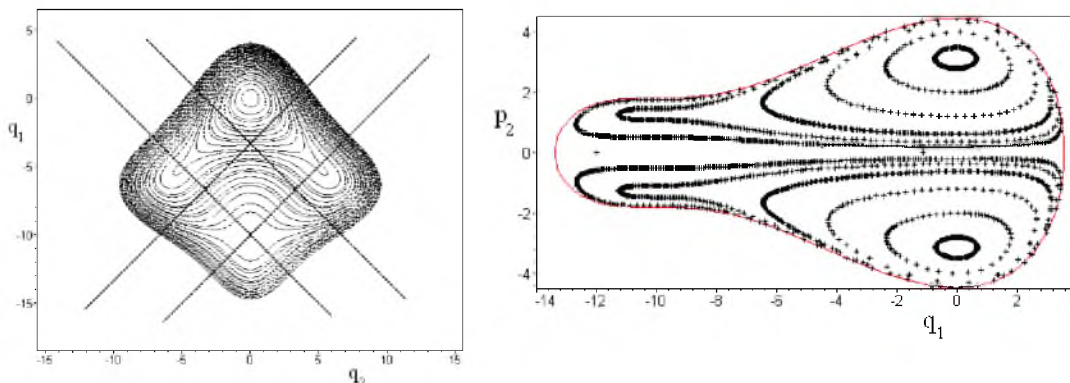


Рис. 2. Часть изолиний ППЭ (1б) (тонкие) и линия нулевой гауссовой кривизны (жирная) при значениях параметров $b = 1/5$ и $d = 1/400$ (при условии, что $c = 4d$) (А); сечения Пуанкаре при этих же значениях параметров при полной энергии $E = 10$ (Б)

Найти решение в явном виде, через известные функции, соответствующих уравнений движения в виде четырех взаимосвязанных дифференциальных уравнений для исследуемой системы с функцией Гамильтона (1) не представляется возможным из-за сложности характера поведения фазовых траекторий. Поиск приближенных решений можно достаточно эффективно выполнить, например, с помощью метода нормальных форм Биркгофа-Густавсона.

Как известно [6, 7], процедура приведения исходной функции Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ к нормальной форме Биркгофа-Густавсона $G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ осуществляется путем выполнения последовательных канонических преобразований $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ с помощью производящей функции

$$F = q_1 \eta_1 + q_2 \eta_2 + \sum_{s=3}^{SMAX} W^{(s)}(q_1, q_2, \eta_1, \eta_2), \quad (3)$$

где $W^{(s)}$ – однородные полиномы по переменным $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ степени S , а нормальная форма удовлетворяет условию

$$\sum_{v=1}^2 \omega_v \left(\xi_v \frac{\partial}{\partial \eta_v} - \eta_v \frac{\partial}{\partial \xi_v} \right) G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0. \quad (4)$$

Используя программу [8-10] символьных вычислений в системе Reduce нами вычислена нормальная форма Биркгофа-Густавсона, которая для значения $SMAX = 6$ приводится ниже

$$G_6 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)} \quad (5a)$$

где

$$G^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 2\Phi_0, \quad (5б)$$

$$G^{(4)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \left(6d - \frac{5}{3}b^2 \right) \Phi_0^2 + \left(-\frac{5}{3}b^2 + 3/2c \right) \Phi_1^2 + (-2d + 1/2c) \Phi_2^2, \quad (5в)$$



$$G^{(6)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \left(-\frac{235}{54}b^4 + \frac{346}{9}b^2d + \frac{26}{9}b^2c - 34d^2\right)\Phi_0^3 + (-16/9b^2d + 4/9b^2c)\Phi_3^3 +$$

$$+ \left(-\frac{88}{9}b^2d + \frac{22}{9}b^2c\right)\Phi_0^2\Phi_3 + \left(-\frac{17}{8}c^2 + \frac{554}{9}b^2d + \frac{199}{9}b^2c - \frac{235}{18}b^4 - 17cd\right)\Phi_1^2\Phi_0 +$$

$$+ \left(\frac{88}{9}b^2d - \frac{22}{9}b^2c\right)\Phi_1^2\Phi_3 + \left(18d^2 - 4cd - \frac{1}{8}c^2 - 2/9b^2d + \frac{1}{18}b^2c\right)\Phi_2^2\Phi_0, \quad (5г)$$

$$G^{(3)} = G^{(5)} = 0, \quad (5д)$$

и введены следующие функции

$$\Phi_0 = \frac{1}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2),$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1), \quad \Phi_3 = \frac{1}{4}(\eta_1^2 + \xi_1^2 - \eta_2^2 - \xi_2^2). \quad (6)$$

Скобки Пуассона $\{F, G\} = \sum_v (F'_{\xi_v} G'_{\eta_v} - G'_{\xi_v} F'_{\eta_v})$ для функций (6) удовлетворяют следующим соотношениям

$$\{\Phi_\lambda, \Phi_\mu\} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu} \Phi_\nu, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3,$$

где $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чевита) и выполняется также тождество

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = \Phi_0^2. \quad (7)$$

Скобки Пуассона для функции Φ_0 с функциями (6) обращаются в ноль. Это означает, что имеется второй, кроме полной энергии E , интеграл движения.

Ниже приведем нормальную форму Биркгофа-Густавсона для интегрируемого случая ($c = 4d$):

$$G_6 = 2\Phi_0 + \left(6d - \frac{5}{3}b^2\right)\Phi_0^2 + \left(6d - \frac{5}{3}b^2\right)\Phi_1^2 + \left(-\frac{235}{54}b^4 + 50b^2d - 34d^2\right)\Phi_0^3 +$$

$$+ \left(-102d^2 + 150b^2d - \frac{235}{18}b^4\right)\Phi_1^2\Phi_0. \quad (8)$$

Нормальную форму Биркгофа-Густавсона (8) перепишем в следующих канонически сопряженных переменных угол-действие $(\alpha, \beta, I_\alpha, I_\beta)$:

$$I_\alpha = \frac{1}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2), \quad I_\beta = \frac{1}{4}(\eta_1^2 + \xi_1^2 - \eta_2^2 - \xi_2^2), \quad (9)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right) + \arctg\left(\frac{\eta_2}{\xi_2}\right), \quad \beta = \arctg\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right) - \arctg\left(\frac{\eta_2}{\xi_2}\right),$$

в которых функции (6) принимают вид

$$\Phi_0 = I_\alpha, \quad \Phi_1 = \sqrt{I_\alpha^2 - I_\beta^2} \cos(\beta), \quad \Phi_2 = \sqrt{I_\alpha^2 - I_\beta^2} \sin(\beta), \quad \Phi_3 = I_\beta. \quad (10)$$

Во введенных переменных угол-действие (10) нормальная форма Биркгофа-Густавсона (5) запишется следующим образом

$$G_6(I_\alpha, \beta, I_\beta) = 2I_\alpha + \left(5d + c - \frac{5}{2}b^2\right)I_\alpha^2 + \left(d - c - \frac{5}{6}b^2\right)I_\beta^2 + \left(\frac{5}{3}b^2c - \frac{20}{3}b^2d\right)I_\beta^3 +$$

$$+ \left(\frac{622}{9}b^2d + \frac{503}{36}b^2c - \frac{1175}{108}b^4 - 25d^2 - \frac{21}{2}cd - \frac{9}{8}c^2\right)I_\alpha^3 + \left(\frac{11}{9}b^2c - \frac{44}{9}b^2d\right)I_\alpha^2I_\beta +$$

$$+ \left(\frac{21}{2}cd + \frac{9}{8}c^2 + \frac{235}{36}b^4 - \frac{92}{3}b^2d - \frac{133}{12}b^2c - 9d^2\right)I_\alpha I_\beta^2 +$$

$$+ \left[\left(d + \frac{c}{2} - \frac{5}{6}b^2\right)I_\alpha^2 - \left(d + \frac{c}{2} - \frac{5}{6}b^2\right)I_\beta^2 + \left(\frac{397}{36}b^2c + \frac{278}{9}b^2d - 9d^2 - \frac{13}{2}cd - c^2 - \frac{235}{36}b^4\right)I_\alpha^3 + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{11}{9} b^2 c - \frac{44}{9} b^2 d \right) I_\beta^3 - \left(\frac{11}{9} b^2 c - \frac{44}{9} b^2 d \right) I_\alpha^2 I_\beta + \left(\frac{13}{2} cd + c^2 + 9d^2 + \frac{235}{36} b^4 - \frac{278}{9} b^2 d - \frac{397}{36} b^2 c \right) I_\alpha I_\beta^2 + \\
 & + \left[\left(d + \frac{c}{2} - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\alpha^2 - \left(d + \frac{c}{2} - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\beta^2 \right] \cos(2\beta). \quad (11)
 \end{aligned}$$

В частном случае $c = 4d$ для нормальной формы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_6(I_\alpha, \beta, I_\beta) = & 2I_\alpha + 3 \left(3d - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\alpha^2 - \left(3d - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\beta^2 + \left(125b^2 d - 85d^2 - \frac{1175}{108} b^4 \right) I_\alpha^3 + \\
 & + \left(51d^2 - 75b^2 d + \frac{235}{36} b^4 \right) I_\alpha I_\beta^2 + \left[\left(3d - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\alpha^2 - \left(3d - \frac{5}{6} b^2 \right) I_\beta^2 + \right. \\
 & \left. + \left(75b^2 d - 51d^2 - \frac{235}{36} b^4 \right) I_\alpha^3 + \left(75b^2 d - 51d^2 - \frac{235}{36} b^4 \right) I_\alpha I_\beta^2 \right] \cos(2\beta). \quad (12)
 \end{aligned}$$

В настоящей работе изучен конкретный класс консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Показано, что при произвольных значениях параметров функции Гамильтона в системе имеет место хаотический режим движения. Найдено, что при выполнении условия $c = 4d$ система является интегрируемой, и это подтверждается вычисленными сечениями Пуанкаре. Методом Биркгофа-Густавсона получена функция Гамильтона, которая при малых энергиях адекватно описывает поведение фазовых траекторий исходной системы.

Исследуемая нами система отличается от изученных в литературе систем тем, что:

1) несмотря на наличие отрицательной гауссовой кривизны на ППЭ, она при условии $c = 4d$ является интегрируемой, 2) в широком диапазоне параметров стационарные точки квадратичной части ППЭ являются вырожденными, то есть ее одно или оба собственные значения равны нулю.

Применение метода нормальных форм позволило систему уравнений движения Гамильтона с двумя степенями свободы привести к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Список литературы

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман – М.: Мир, 1984. – 528с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Ф. Мун – М.: Мир, 1990. – 312с.
3. Набоков Р.А. Компьютерное моделирование хаотических колебаний в стабилизаторе напряжения с электронным релейным элементом / Р.А. Набоков, В.Г. Рубанов // Научные ведомости БелГУ. Серия «История. Политология. Экономика. Информатика» – 2012 – т.13(132) – с.151-160.
4. Toda M. Instability of trajectories of lattice with cubic nonlinearity / M. Toda // Phys. Lett. – 1974 – v.48 – p.335-336.
5. Krivoshey I. Dynamic chaos and instability in barrier processes of chemical dynamics / I. Krivoshey // Sov. Sci. Rev. B. Chem. – 1988 – v11. – p.123.
6. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф – Москва-Ижевск.: РХД, 2002. – 406с.
7. Gustavson F.G. On constructing formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point. / F.G. Gustavson // Astronom. J. – 1966. – v.71. – no.8. – pp.670-686.
8. Basios, V. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians. / V. Basios, N. A. Chekanov, B. L. Markovski, V. A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Comp. Phys. Commun. – 1995. – v. 90. – p. 355 – 368.
9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, №2011610224 «Программа нормализации гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы в среде MAPLE», Богачев В.Е., Чеканов Н.А. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 января 2011 года.



10. Богачев В.Е. Символьно-численные расчеты нормальной формы, интеграла движения и сечений Пуанкаре для консервативных двумерных гамильтоновых систем / Богачев В.Е., Чеканов Н.А. // Вычислительные технологии, 2012 – т. 17. – № 4 – с. 3-13.

COMPUTER CALCULATIONS DINAMICAL PROPERTIES FOR MODEL OF ONE CLASSICAL SYSTEM WITH TWO DEGREE OF FREEDOM

N.A. CHEKANOV¹
L.K. KIRICHENKO²
V.E. BOGACHEV³
N.N. CHEKANOVA¹

¹⁾ *Belgorod Law Institute
of the Ministry of the Interior
of the Russian Federation*

²⁾ *Ukrainian Engineering
Pedagogics Academy*

³⁾ *Belgorod university of
cooperation, economics and law*

e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru

In the present paper certain class of conservative Hamiltonian system with two degree of freedom is studied. It is shown that with the arbitrary parameters of the Hamiltonian system chaotic motion mode takes place. We find that if the condition $c = 4d$ holds true the system is integrable. Moreover, the usage of normal forms method allows us to reduce set of Hamilton equations of motion with two degree of freedom to second-order ordinary differential equation.

Key words: Hamilton systems, normal form method of Birkhoff-Gustavson, computer simulation, Reduce system