



## КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЁХФАЗНЫХ ДЕЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ<sup>1</sup>

**М.Ф. ТУБОЛЬЦЕВ**  
**М.В. МИХЕЛЕВ**

*Белгородский  
государственный  
национальный  
исследовательский  
университет*

*e-mail:*  
*Tuboltsev@bsu.edu.ru*

Рассматриваются вопросы анализа модели трёхфазных финансовых процессов с использованием компьютерных методов расчёта параметров. Финансовые процессы указанного типа, несмотря на то, что часто встречаются на практике, являются слабоизученными. Это связано с наличием нескольких или кратных корней у базового уравнения  $NPV=0$ .

Необходимость рассмотрения трёхфазных финансовых процессов связана с потребностями разработки методов анализа инвестиционных проектов с ликвидационными фазами, схем ипотечного кредитования и синтеза новых финансовых инструментов.

Ключевые слова: уровень внутренней доходности, финансовые процессы, моделирование.

Финансовые потоки CF (Cash Flow) классических деловых процессов имеют две фазы: фазу вложения средств (инвестиционную фазу) и фазу получения дохода от инвестиций (производственную фазу). Анализ таких процессов основан на исследовании корней уравнения

$$NPV(r)=0, \quad (1)$$

где  $NPV(r)$  – так называемое чистое приведённое значение (Net Present Value). Переменная  $r$  является ставкой сравнения (дисконтирования), которая характеризует доходность делового процесса и находится как решение (корень) уравнения (1). Найденное значение корня, которое принято называть уровнем внутренней доходности делового (финансового) процесса IRR (Internal Rate of Return), обобщает понятие эффективного процента и является важным инструментом анализа краткосрочных финансовых операций [1, с. 51]

Можно решать обратную задачу анализа процесса: задавать IRR априорно и использовать уравнение (1) для определения какого-то другого параметра. Чистое приведённое значение зависит от параметров финансовых событий, составляющих финансовый поток  $CF = \{(x_i, t_i)\}_{i=1}^N$ , момента дисконтирования и ставки сравнения:

$$NPV(\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^N, t_0, r) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{(1+r)^{i-t_0}}, \quad (2)$$

где  $r$  – ставка сравнения,  $t_0$  – момент дисконтирования. Любой из параметров финансового потока (который фактически задаёт дискретно-событийную модель делового процесса) может быть вычислен с помощью уравнения (1).

Несмотря на ограниченные возможности анализа, данный подход вполне эффективен, если значительная часть финансового потока представляет собой постоянную ренту. Так удаётся дать исчерпывающее описание операциям долгосрочного кредитования, ипотеке и другим похожим деловым и финансовым процессам.

Однако, всё чаще возникает необходимость анализировать знакопеременные финансовые потоки, в которых смена знака происходит не один раз, как в классических финансовых инструментах, а – многократно. Даже простейший в теоретическом плане случай трёхфазных финансовых операций оказывается востребованным на практике. Подобные CF появляются в инвестиционных проектах, имеющих заключительные

<sup>1</sup> Исследования поддержаны грантом РФФИ 14-07-00149



восстановительные фазы (рекультивация земель, консервация отработанных нефтяных скважин и т.д.).

На рис. 1 показан типичный трёхфазный финансовый поток инвестиционного проекта, имеющего ликвидационную (восстановительную) фазу:

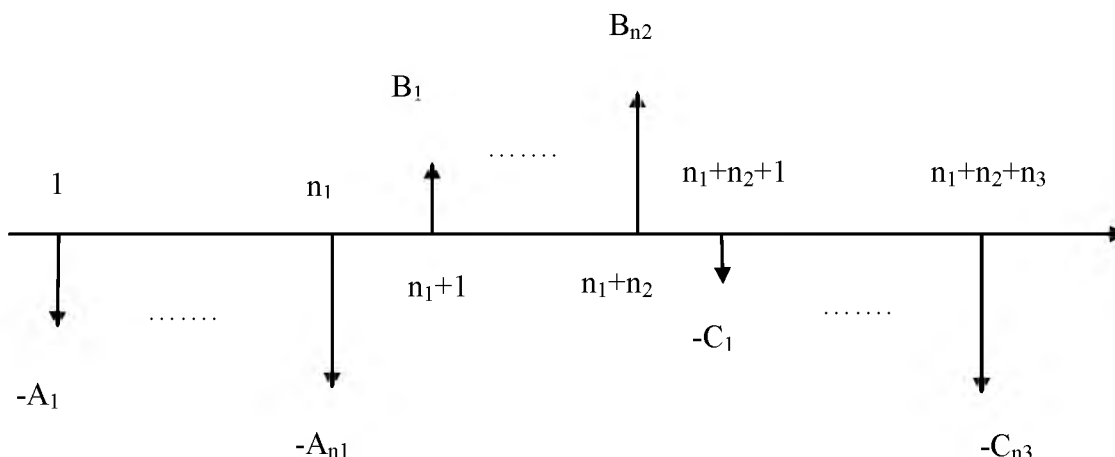


Рис. 1. Трёхфазный финансовый поток инвестиционного проекта

Показанный на рис. 1 финансовый поток имеет три фазы: 1) инвестирование (в виде ренты с платежами  $A_i$ , длительностью в  $n_1$  базовый период), 2) фазу деловой активности (также в виде ренты с платежами  $B_j$ , длительностью  $n_2$ ), 3) ликвидационную фазу (рентные платежи равны  $C_k$ , длительностью  $n_3$ ).

Представление трёхфазных финансовых потоков, данное на рис. 1, можно считать, с некоторыми оговорками, типовым. В целях анализа удобнее использовать вместо NPV характеристическую функцию финансового потока  $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^N$ , которая имеет вид полинома от множителя дисконтирования:

$$\chi(V) = NPV(\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^N, t_1, V^{-1} - 1) = \sum_{i=1}^N x_i V^{t_i - t_1}, \quad (3)$$

здесь, неявно предполагается, что  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ .

Применительно к трёхфазным финансовым потокам формула (3) может быть конкретизирована:

$$\chi(V) = -\sum_{i=1}^{n_1} A_i V^{t_i - t_1} + V^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} B_j V^{t_j - t_1} - V^{n_1+n_2} \sum_{k=1}^{n_3} C_k V^{t_k - t_1}, \quad (4)$$

где  $t_j = t_i - n_1$ ,  $t_k = t_i - (n_1 + n_2)$ ,  $n_1 + n_2 + n_3 = N$ .

В формуле (4) в явном виде указаны длительности фаз, а также характер платежей. Отрицательные значения показывают отток средств во время инвестиционной и ликвидационной фаз, положительные – приток средств на производственном этапе.

Будем считать, что длительности фаз заданы и в процессе анализа не меняются. Входными параметрами модели будут являться три множества действительных чисел  $\{A_i\}_{i=1}^{n_1}$ ,  $\{B_j\}_{j=1}^{n_2}$ ,  $\{C_k\}_{k=1}^{n_3}$ , характеризующих финансовый поток делового процесса на конкретных фазах.

Вначале рассмотрим прямую задачу анализа трёхфазных деловых процессов: задачу определения доходности трёхфазного делового процесса при известных входных



параметрах. Это означает, что характеристическая функция финансового потока делового процесса полностью известна, и доходность  $r = V^{-1} - 1$  может быть определена путём решения полиномиального уравнения:

$$-\sum_{i=1}^{n_1} A_i V^{t_i - t_1} + V^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} B_j V^{t_j - t_1} - V^{n_1 + n_2} \sum_{k=1}^{n_3} C_k V^{t_k - t_1} = 0. \quad (5)$$

При численном решении уравнения (5) на компьютере желательно иметь больше информации относительно локализации корней. Поскольку экономическую интерпретацию имеют только корни, расположенные на интервале (0, 1), то можно ограничиться вопросом об условиях существования на этом интервале единственного корня уравнения (5). Покажем, что условие

$$\sum_{j=1}^{n_2} B_j \geq \sum_{i=1}^{n_1} A_i + \sum_{k=1}^{n_3} C_k \quad (6)$$

достаточно для того, чтобы уравнение (5) имело на сегменте [0, 1] единственный корень.

Согласно теореме Декарта [2, с. 109], вещественный полином имеет число положительных корней (с учётом кратности) не превышающее число перемен знака в коэффициентах и той же чётности. Следовательно, поскольку для трёхфазных процессов характеристическая функция дважды меняет знак коэффициентов, уравнение (5) либо имеет 2 положительных корня, либо один положительный корень кратности 2, либо вообще не имеет корней. Поскольку  $\chi(0) = -A_1 < 0$ , а в силу условия (6)  $\chi(1) > 0$ , то на сегменте [0, 1] характеристическая функция трёхфазного процесса  $\chi(V)$  имеет нечётное число корней. Таким образом, при выполнении условия (6), характеристическая функция  $\chi(V)$  имеет два положительных корня, из которых только один корень находится на сегменте [0, 1].

Поскольку условие (6) означает наличие у трёхфазного делового процесса прибыли в бухгалтерском смысле, то существование единственного корня у характеристической функции на сегменте [0, 1] означает, что из существования дохода в бухгалтерском смысле следует существование финансовой (экономической) доходности. На рис.2. показан график характеристической функции финансового потока трёхфазного делового процесса, имеющего следующие параметры:  $n_1=12$ ,  $n_2=24$ ,  $n_3=6$ ,  $A_i=B_j=C_k=1$  (здесь базовый период равен одному месяцу, а платежи показаны в миллионах рублей).

Условие (6) выполнено, поскольку  $\sum A_i = 12$ ,  $\sum B_j = 24$ ,  $\sum C_k = 6$ . Бухгалтерский доход делового процесса составляет  $24-12-6=6$  (млн.р.) и, согласно доказанному утверждению, деловой процесс должен иметь доходность в экономическом смысле. Эта доходность, как показано на рис.2, составляет около 43% в годовом исчислении (годовых).

Численное решение уравнения (5) на компьютере легко осуществить методом деления отрезка пополам, взяв в качестве исходного отрезка сегмент [0, 1], поскольку характеристическая функция имеет значения разных знаков в силу справедливости условия (6). Хотя данный метод вычисления корня не является оптимальным по быстродействию, он очень устойчив и применим в вычислительных системах небольшой мощности.

Решение обратной задачи анализа: определение одного из входных параметров модели также осуществляется на основе решения уравнения (5), но требует априорного задания доходности или, что то же самое, множителя дисконтирования. Поскольку все входные параметры модели входят в уравнение (5) в первой степени, они могут быть выражены аналитически через остальные параметры. В этом случае, вообще, не требуется решать каких-либо уравнений, что ещё более упрощает анализ. В целом, можно отметить,

что выполнение условия (6) делает трёхфазные деловые процессы похожими на традиционные двухфазные процессы.

Однако, если условие (6) не выполняется, поведение трёхфазных деловых процессов в значительной степени отлично от привычного поведения традиционных двухфазных процессов и их компьютерное моделирование требует новых подходов.

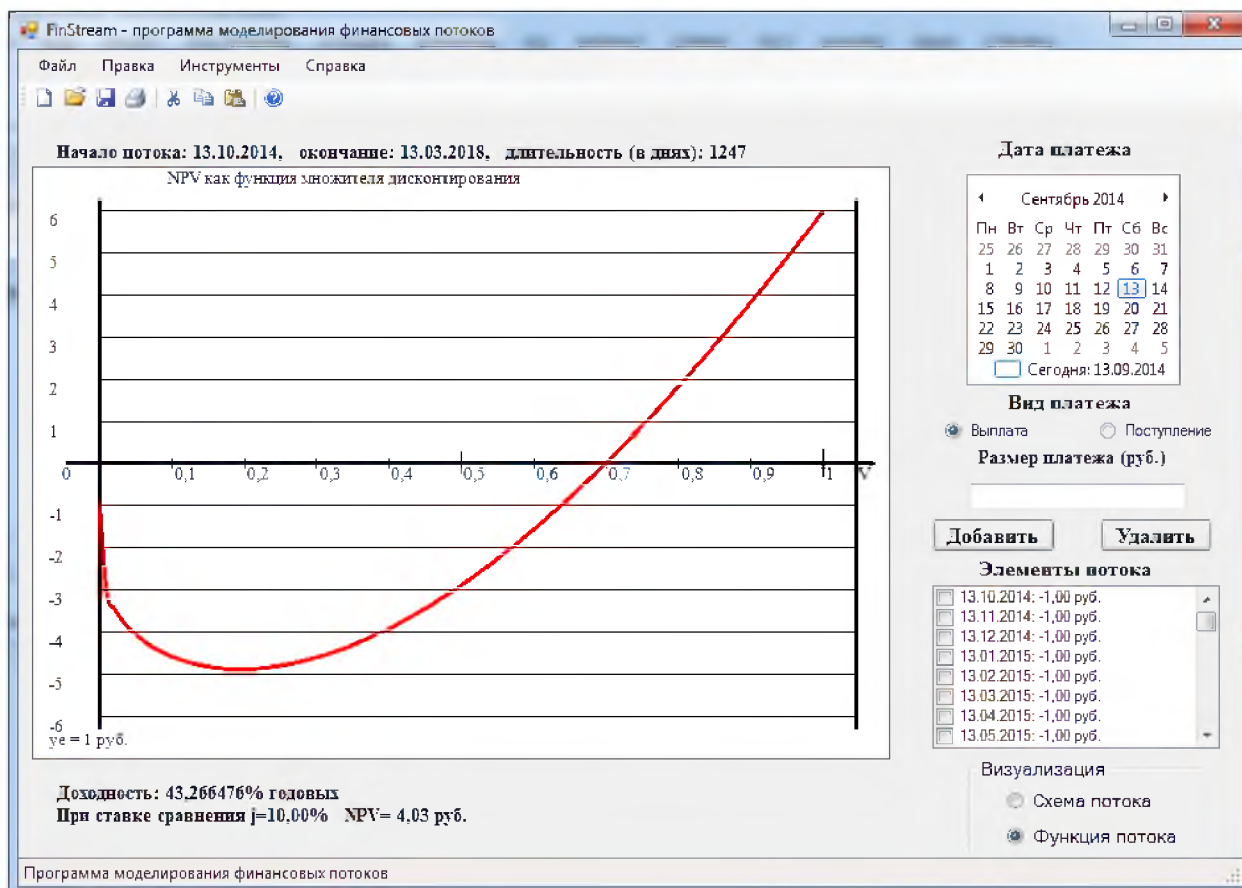


Рис. 2. Характеристическая функция финансового потока трёхфазного инвестиционного процесса, имеющего доход в бухгалтерском смысле

На рис.3 показан график трёхфазного делового процесса, имеющего следующие параметры:  $n_1=12$ ,  $n_2=24$ ,  $n_3=6$ ,  $A_1=1$ ,  $V_1=3$ ,  $C_k=12$  (здесь базовый период также равен одному месяцу, а платежи показаны в миллионах рублей). Длительности фаз не изменились по сравнению с предыдущим примером, изменились доходы производственного периода (с 1 до 3) и резко увеличились расходы ликвидационного периода (с 1 до 12). Однако, поведение характеристической функции, которая характеризует общий баланс делового процесса в экономическом смысле, существенно изменилось. При небольших ставках сравнения, примерно от 0 до 22% (множитель дисконтирования  $V$  при этом близок к 1) деловой процесс является убыточным, что показывают отрицательные значения характеристической функции. Точно так же деловой процесс будет убыточным, если ставки сравнения превысят значение в 234% (множитель дисконтирования  $V$  при этом близок к 0). Для промежуточных значений ставки сравнения (от 22% до 234%) деловой процесс будет в разной степени доходным.

В этом коренное отличие новых многофазных деловых процессов от традиционных двухфазных, на которое впервые обратили внимание Лори и Сэведж (Lorie, Savage 1955) [3]. Вплоть до настоящего времени попытки интерпретировать ситуацию с наличием нескольких корней характеристической функции на сегменте  $[0, 1]$  не дали значимых результатов, а замена IRR на модифицированные показатели приводила к искажению реальности [4, 5, 6].

Иногда проблему наличия нескольких корней характеристической функции многофазного делового процесса удаётся обойти, используя метод кратных корней [7]. Суть метода заключается в том, чтобы определить входные параметры процесса так, чтобы вместо нескольких корней на отрезке  $[0, 1]$  присутствовал один корень соответствующей кратности.

Математическая модель трёхфазных финансовых операций, имеющих на сегменте  $[0, 1]$  один корень кратности 2 задаётся следующей системой уравнений [7], в которую входит характеристическая функция финансового потока и её первая производная, вычисленные в некоторой одной фиксированной точке  $V \in (0, 1)$ :

$$\begin{cases} \chi(V) = 0 \\ \chi'(V) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) определяет на интервале  $(0, 1)$  единственный корень кратности 2 в точке  $V \in (0, 1)$ , а других корней на интервале  $(0, 1)$  согласно теореме Декарта быть не может.

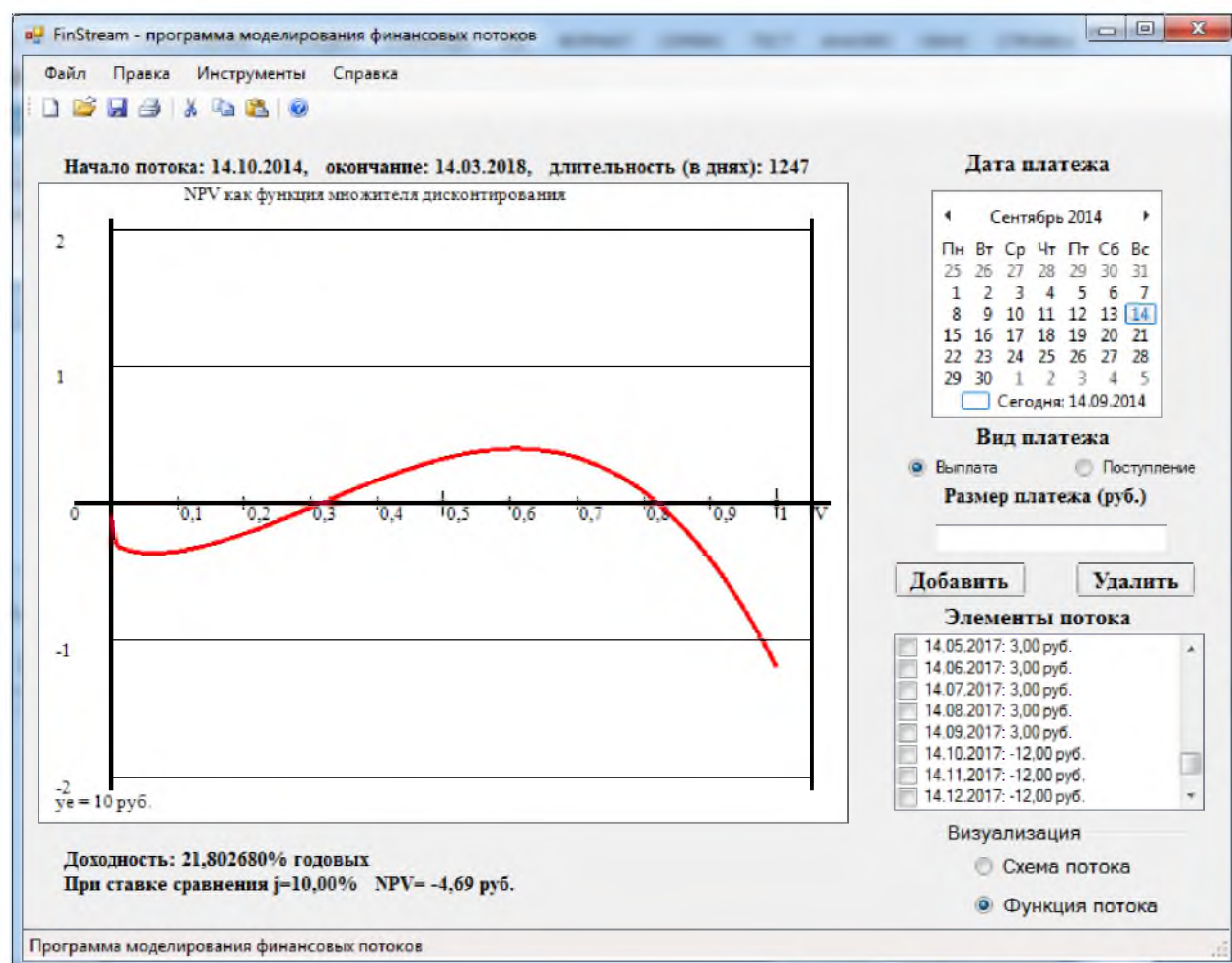


Рис. 3. Характеристическая функция финансового потока трёхфазного инвестиционного процесса, для которого условие (6) не выполняется

Тем самым обеспечивается возможность традиционной трактовки  $r = V^{-1} - 1$  как уровня внутренней доходности финансового потока для трёхфазной финансовой





операции (в случае отсутствия корней уровень внутренней доходности не определён, а в случае двух разных корней нет способа их корректной экономической интерпретации).

Система уравнений (7) позволяет вычислить не только уровень внутренней доходности, т.е. получить решение прямой задачи анализа, но и дополнительно рассчитать значение одного из параметров финансового потока, т.е. найти решение обратной задачи. Одновременное решение и прямой, и обратной задач анализа трёхфазных деловых процессов значительно расширяет возможности анализа и открывает возможности для постановки содержательных оптимизационных задач. Сама система (7) может при этом рассматриваться как система базовых ограничений оптимизационной задачи, позволяющих значительно сузить пространство поиска, по сравнению со случаем двухфазных потоков, когда ограничением является одно первое уравнение системы (7).

На рис. 4 показан график характеристической функции трёхфазного делового процесса, имеющего на сегменте  $[0, 1]$  единственный корень кратности 2. Входные параметры процесса: длительности фаз те же, что и в предыдущих примерах  $n_1=12$ ,  $n_2=24$ ,  $n_3=6$ , затраты инвестиционного и ликвидационного периодов заданы  $A_i=1$ ,  $C_k=9$  (здесь базовый период также равен одному месяцу, а платежи показаны в миллионах рублей).

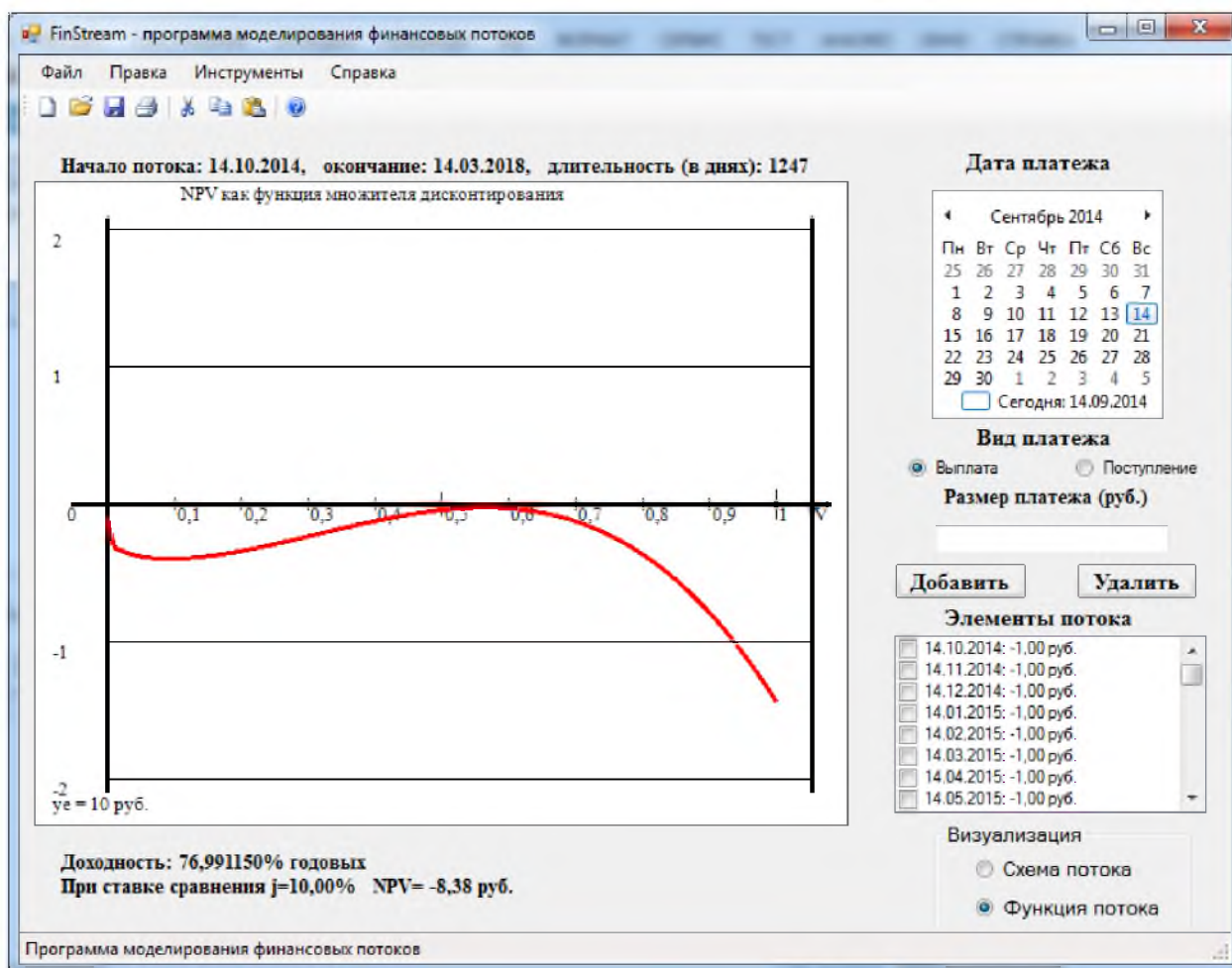


Рис. 4. Характеристическая функция финансового потока трёхфазного инвестиционного процесса, имеющего корень кратности 2

Теперь есть возможность вычислить не только доходность процесса, но и решить обратную задачу анализа, определив доходы производственного периода. Компьютерные расчёты показали, что при заданных входных параметрах доходность составляет примерно 77% (решение прямой задачи анализа), а разовые поступления средств в



производственном периоде примерно равны 2,15. Отметим, что для данного процесса условие (6) не выполняется, поскольку  $\sum A_i = 12$ ,  $\sum B_j = 51,6$ ,  $\sum C_k = 54$  (иначе, согласно доказанному, корень был бы кратности 1).

Однако расширение возможностей анализа при наличии трёх фаз, означает также появление технических сложностей при решении системы (7) на компьютере, которых не было при анализе двухфазных деловых процессов. Проблема не в том, что пространство поиска решения системы (7) является двумерным, а не одномерным, как в задачах анализа двухфазных деловых процессов. В интересных для практики постановках задач анализа второй (после IRR) искомым параметр может быть легко выражен из второго уравнения системы (7) и подставлен в первое уравнение, что не приводит к усложнению алгоритма поиска решения по переменной  $V$  на компьютере.

При использовании компьютера более существенно то, что повысилась кратность корня (кратность корня стала 2, а не 1) по переменной  $V$ , что и является источником вычислительных проблем. Во-первых, для корня кратности 2 нет возможности применить очень устойчивый и надёжный алгоритм деления отрезка пополам. Во-вторых, как отмечает Н.Н.Калиткин: «...область сходимости метода Ньютона к какому-либо корню на комплексной плоскости, так называемая область притяжения, образует фрактальную структуру, т.е. множество совершенно не связанных между собою точек и областей...» [8].

### Список литературы

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник. 4-е изд. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал пресс, 2001. – 544 с.
3. Lorie, James H., and Leonard J. Savage Three Problems in Rationing Capital // The Journal of Business 1955. – Vol. 28. – No. 4. – pp. 229-239.
4. Mao, James T. The Internal Rate of Return as a Ranking Criterion // The Engineering Economist. – 1966. – Vol. 11. – No. 1. – pp. 1-13.
5. Beaves, R. G. Net present value and rate of return: implicit and explicit reinvestment assumptions // The Engineering Economist. – 1988. – 33(4). – pp. 275-302.
6. Rouse, Olivier Capital budgeting with an efficient yield-based method: the real rate of return technique – LASER-CREDEN, Faculty of Economics, University of Montpellier 1, 2008.
7. Тубольцев М.Ф., Маторин С.И., Тубольцева О.М. Управление многофазовыми финансовыми потоками на основе математического моделирования финансовых операций // Научные ведомости Белгородского государственного университета, серия «История, Политология, Экономика, Информатика», № 1 (172) 2014, выпуск 29/1. – Белгород: Изд-во НИУ БелГУ, 2014. – С. 135-141.
8. Н.Н. Калиткин, И.П. Пошивайло. О вычислении простых и кратных корней нелинейного уравнения // Матем. моделирование, 2008. – Т. 20. – № 7. – С. 57-64.

## COMPUTER METHODS OF ANALYSIS ONE-PARAMETER FAMILY OF THREE-PHASE CHARACTERISTIC FUNCTIONS BUSINESS PROCESSES

**M.F. TUBOLTSEV**  
**M.V. MIKHELEV**  
*Belgorod State National  
 Research University*

*e-mail:*  
**Tuboltsev@bsu.edu.ru**

The problems of analysis of three-phase model of financial processes with the use of computer-based methods of calculation parameters. Financial processes of this type, despite the fact that it is often encountered in practice are poorly studied. This is due to the presence of several or multiple roots at the base of the equation  $NPV = 0$ .

Need to consider the three-phase financial processes associated with the needs of development of methods of analysis of investment projects with liquidation phases of mortgage lending schemes and the synthesis of new financial instruments.

Keywords: optimization, financial operations, simulation, recovery annealing algorithm.