*ФИЗИКА*

MSC 35Q30

# ОБ АНАЛОГИИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

**В.П. Бушланов, И.В. Бушланов**

Государственный морской университет им. Ф.Ф. Ушакова,
Новороссийск, Россия, e-mail: bvp@ngs.ru

**Аннотация.** Показано, что уравнение Шредингера может быть приведено к форме уравнений Навье-Стокса, в которых тензор напряжения обусловлен градиентом плотности газа. Предложена такая интерпретация тензора напряжений, когда он будет аналогичен линейному тензору вязких напряжений.

**Ключевые слова**: уравнение Шредингера, нотенциальноое течение, уравнение Навье-Стокса, тензор напряжений.

Рассмотрим уравнение Шредингера [1]

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,, \tag{1}$$

где $\hbar = h/2\pi$, $h$ – постоянная Планка, $m$ – масса электрона, $\Psi$ - волновая функция.

Подставляя в (1) волновую функцию в виде

$$\Psi = ae^{iS/\hbar}\,, \tag{2}$$

производя дифференцирование и приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части в [1] получили следующие два уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m}\Delta S + \frac{1}{m}(\nabla S, \nabla a) = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta a = 0\,. \tag{4}$$

Обозначим векторную величину, имеющую размерности скорости,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\nabla S\,. \tag{5}$$

Тогда уравнения (3) и (4) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \mathrm{div}\big(a^2\mathbf{v}\big) = 0\,, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{div}\nabla a}{a} - U\,. \tag{6}$$

Возьмем операцию градиента от последнего уравнения:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2\nabla\Big(\frac{\mathrm{div}\nabla a}{a}\Big) - \frac{\nabla U}{m}\,. \tag{7}$$

Заметим, что

$$a^2\nabla\Big(\frac{\mathrm{div}\nabla a}{a}\Big) = \nabla(a\mathrm{div}\nabla\, a) - \frac{\nabla a^2}{a}\mathrm{div}\nabla\, a = \nabla(a\mathrm{div}\nabla\, a) - 2\nabla a\,\mathrm{div}\nabla\, a\,. \tag{8}$$

Имеем для векторной функции $\mathbf{A}$

$$\nabla_q(A_pA_q) = A_p\mathrm{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A},\nabla)A_p\,, \tag{9}$$

Возьмем в качестве $\mathbf{A} = \nabla a^2$. Тогда из (8) и (9):

$$a^2\nabla_p\Big(\frac{\mathrm{div}\nabla a}{a}\Big) = \nabla_p\Big[a\,\mathrm{div}\nabla a + (\nabla a)^2\Big] - 2\nabla_q(a_pa_q) = \frac{1}{2}\nabla_p\Big(\mathrm{div}\nabla a^2\Big) - 2\nabla_q(a_pa_q)\,, \tag{10}$$

где $a_p = \nabla_p\, a$. Подставляя (10) в (7) получим

$$a^2\Big[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}\Big]_p = \frac{1}{m}\nabla_q(\sigma_{pq}) - a^2\frac{\nabla_pU}{m}\,, \tag{11}$$

где

$$\sigma_{pq} = \frac{ma^2}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2\left\{\delta_{pq}\left[\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla a^2}{a^2}\Big) + \Big(\frac{\nabla a^2}{a^2}\Big)^2\right] - \frac{\nabla_pa^2}{a^2}\cdot\frac{\nabla_qa^2}{a^2}\right\}, \tag{12}$$

$\delta_{pq}$ – символ Кронекера. Имеет место тождество

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla a^2}{a^2}\Big) = \frac{\mathrm{div}\nabla a^2}{a^2} - \Big(\frac{\nabla a^2}{a^2}\Big)^2. \tag{13}$$

Обозначим

$$\text{Э} = \ln\, a^2\,, \tag{14}$$

тогда

$$\frac{\nabla a^2}{a^2} = \nabla\text{Э}\,. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (12) с учетом (13) получим

$$\sigma_{pq} = \frac{ma^2}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2\left\{\delta_{pq}\left[\mathrm{div}\nabla\text{Э} + (\nabla\text{Э})^2\right] - \nabla_p\text{Э}\cdot\nabla_q\text{Э}\right\}\,. \tag{16}$$

Уравнениям (6), (11) (16) можно придать вид уравнений потенциального движения сжимаемого газа, учитывая обозначение (5), и обозначая величину размерности плотности $\rho = ma^2$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0\,,\quad \rho\Big[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}\Big]_p = \nabla_q\sigma_{pq} - \rho\frac{\nabla_pU}{m}\,, \tag{17}$$

где тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{pq} = \frac{\rho}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2\left\{\delta_{pq}\left[\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla\rho}{\rho}\Big) + \Big(\frac{\nabla\rho}{\rho}\Big)^2\right] - \frac{\nabla_p\,\rho}{\rho}\cdot\frac{\nabla_q\,\rho}{\rho}\right\}. \tag{18}$$

Из (18) видно, что компоненты тензора напряжений равны нулю, если градиент плотности «газа электрона» равен нулю. Таким образом, наряду с внешней силой-градиентом потенциала, источником количества движения «газа электрона» является градиент плотности «газа электрона».

Пусть $V$ – некоторый произвольный объем электронного газа, а $\Sigma$ – замкнутая поверхность ограничивающая $V$, $\mathbf{n}$ – единичная внешняя единичная нормаль к $\Sigma$. На поверхность указанного объема, согласно (18), действует сила:

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{e}_p \int\limits_\Sigma \sigma_{pq} n_q d\Sigma = \frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2 \int\limits_\Sigma \Big\{\mathbf{n}\mathrm{div}\nabla\rho - \nabla\rho \cdot \frac{\mathbf{n}\nabla\rho}{\rho}\Big\} d\Sigma \,. \tag{19}$$

Воспользуемся следующей формулой векторного исчисления:

$$(\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{A} = \mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{n}\mathrm{div}\,\mathbf{A} + (\mathbf{n},\nabla)\mathbf{A}\,, \tag{20}$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{A}$ – некоторые вектора. Положим в (20) $\mathbf{A} = \nabla\rho$, тогда получим

$$\mathbf{n}\mathrm{div}\,\nabla\rho = -(\mathbf{n}\times\nabla)\times\nabla\rho + (\mathbf{n},\nabla)\nabla\rho\,, \tag{21}$$

Подставим (21) в (19) и учтем, что интеграл от первого слагаемого правой части (21) по замкнутой поверхности $\Sigma$ равен нулю, тогда получим следующее выражение для поверхностной силы

$$\mathbf{F}_\Sigma = \frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2 \int\limits_\Sigma \left[\frac{\partial\nabla\rho}{\partial n} - \frac{\partial\rho}{\partial n}\frac{\nabla\rho}{\rho}\right] d\Sigma = \frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar}{m}\Big)^2 \int\limits_\Sigma \rho\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{\nabla\rho}{\rho}\Big) d\Sigma = \frac{\hbar^2}{2m^2}\int\limits_\Sigma \rho\frac{\partial Э}{\partial n} d\Sigma\,, \tag{22}$$

где введено обозначение $\partial/\partial n = (\mathbf{n},\nabla)$ для производной по нормали к поверхности $\Sigma$.

**Замечание.** Из (22) видно, что обмен количеством движения выделенного объема $V$ электронного газа идет из-за изменения по нормали к поверхности $\Sigma$ градиента функции Э.

Обозначим величину размерности потока массы

$$\rho\mathbf{W} = D\nabla\rho\,, \tag{23}$$

где $D$ – величина размерности коэффициента диффузии. Назовем величину $D\nabla\rho$ диффузионным потоком, а $\mathbf{W}$ – скоростью диффузии. Так как $Э = \ln\rho$, то из (22-23) получим

$$\mathbf{F}_\Sigma = \frac{\hbar^2}{2m^2 D}\int\limits_\Sigma \rho\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial n} d\Sigma\,. \tag{24}$$

Сила (24) аналогична силе вязкости в законе Ньютона для несжимаемой жидкости, которая имеет вид (учитывая потенциальность поля скоростей (5))

$$\mathbf{F}_{\text{Ньютон}} = \int\limits_\Sigma \nu\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n} d\Sigma\,, \tag{25}$$

где $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости. Сравнивая (24) и (25) можно интерпретировать величину $\nu = \hbar^2/2m^2 D$, как коэффициент кинематической вязкости а (25) как вязкую силу Ньютона для диффузионного потока со скоростью диффузии $W$. Если $\nu$ и $D$ одного порядка то $D \sim \nu \sim \sqrt{2\nu D} = \hbar/m = 6.62517\cdot 10^{-27}\,\textit{эрг}\cdot\textit{сек}/2\cdot 3.14\cdot 9.1083\cdot 10^{-28}\,\textit{г} = 1.158\,\textit{см}^2/\textit{сек}.$

**Выводы.** Основываясь на уравнении Шредингера и следующих из него в [1], уравнений для действительной и мнимой части, указанные уравнения приведены к форме уравнений Навье-Стокса для потенциального течения сжимаемого газа (17)-(18). Отмечена аналогия тензора напряжений с тензором вязких напряжений Ньютона, если интерпретировать величину градиента плотности как вектор пропорциональный скорости диффузионного потока.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория (Серия: «Теоретическая физика», том 3) / М.: Наука, 1974. – 752 с.

## ON ANALOGY OF SCHRÖDINGER's EQUATION AND NAVIER-STOCKS's EQUATION OF COMPRESSIBLE GAS POTENTIAL FLUX

**V.P. Bushlanov, I.V. Bushlanov**

Sea State University of F.F. Ushakov,
Lenina Av., 93, Novorossiysk, 353925, Russia, e-mail: bvp@ngs.ru

**Abstract.** It is shown that Schrödinger's equation may be reduced to the form of Navier-Stocks's equations where the stress tensor is connected with the gradient of gas density. It is proposed the interpretation of the stress tensor such that it is analogous to linear the viscous stress tensor.

**Key words:** Schrödinger's equation, potential flux, Navier-Stocks's equation, stress tensor.