MSC 80A30

КОРРЕКТНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Фам Минь Туан, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается, что стохастическое дифференциальное уравнение т.н. генетической модели, которое описывает, в частности, кинетику бинарных автокаталитических химических реакций, всегда имеет единственное решение $\tilde{x}(t)$ с начальными данными из $(0, 1)$, которое является глобальным (оно существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$). Причем, это решение таково, что его значения $\tilde{x}(t) \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Ключевые слова: стохастическая модель, стохастический дифференциал Стратоновича, стохастический дифференциал Ито, теорема Вонга-Закаи, уравнение Колмогорова.

1. Введение. При теоретическом изучении различных явлений в естественных науках часто возникают математические модели, которые связаны со стохастическими динамическими системами. Их формулировка и исследование требует основано на понятии стохастического дифференциального уравнения и привлечения общей теории таких уравнений. Одной из таких стохастических моделей является т.н. *генетическая модель*, введенная в [1] как иллюстрирующая эволюцию со временем в некоторых биологических процессах. В монографии [2] было предложено применение этой модели для описания кинетики бинарных циклических химических реакций при наличии катализаторов (см. также [3], где уравнения модели обоснованы в рамках химической кинетики). Использование модели в этом случае связано с учетом влияния тепловых флуктуаций среды на протекание реакции. Основное стохастическое дифференциальное уравнение для случайной функции $\tilde{x}(t)$ в рамках генетической модели выглядит следующим образом:

$$d\tilde{x}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))]dt + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))d\tilde{w}(t)\,, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметры модели и $d\tilde{w}(t)$ – стохастический дифференциал стандартного винеровского процесса $\tilde{w}(t)$. В связи с физической интерпретацией уравнения (1), этот стохастический дифференциал должен пониматься по Стратоновичу [2]. Согласно физическому смыслу случайной функции $\tilde{x}(t)$, как относительной концентрации двух участвующих в реакции химических реагентов, она должна принимать значения внутри $(0, 1)$. Исследование случайных процессов, которые являются решениями стохастического уравнения (1), основано на переходе в (1) от дифференциала Стратоновича к дифференциалу Ито. Уравнение (1) при таком переходе принимает вид

$$d\tilde{x}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t)) + \sigma^2\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))(1 - 2\tilde{x}(t))/2]dt + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))d\tilde{w}(t)\,, \tag{2}$$

Тот фат, что в математических моделях такого типа, как генетическая модель, в применении к физическим проблемам, должен использоваться именно стохастический дифференциал Стратоновича широко обсуждался в литературе. В частности, обоснование этому дается в самой монографии [2] (см. также работы [4], [5]).

Решения полученного, таким образом, стохастического дифференциального уравнения, при фиксированных значениях параметров, составляют марковский диффузионный процесс. Таким образом, генетическая модель представляет трехпараметрическое семейство марковских диффузионных процессов. Соответствующее уравнение Колмогорова (см. [2]) для плотности распределения $p(x,t)$ частного одноточечного распределения вероятностей каждого из процессов этого семейства имеет вид

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \big(\hat{H}p\big)(x,t)\,, \tag{3}$$

$$\big(\hat{H}p\big)(x,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big[\alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x)\Big]p(x,t)\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2(1-x)^2 p(x,t)\right].$$

В физической терминологии такое уравнение, обычно, называют уравнением Фоккера-Планка.

Предсказания модели указывали на наличие бифуркации эволюционного стационарного режима при изменении параметров, которой был присвоен термин «фазовый переход под воздействием шума». В монографии [2] дано обоснование применимости генетической модели для описания этого фазового перехода (см. также [6], где было дано уточнение задачи вычисления фазовой диаграммы для этого фазового перехода). Генетическая модель была детально исследована в стационарном режиме, который описывается стационарным марковским процессом, у которого одноточечная плотность распределения уже не зависит от t и является стационарным решением уравнения (1). Именно это стационарное решение содержит информацию о «фазовой диаграмме» указанного перехода.

Вместе с тем, в литературе отсутствует сколько-нибудь детальное исследование стохастической динамики, связанной с диффузионными процессами, которые порождаются уравнением (1). С физической точки зрения, это означает, что не исследована кинетика неравновесных состояний стохастической динамической системы, описываемой (3). В частности, не имеется информации о физически характерных временах (релаксации), присущих этой системе. Оказывается, что для математически последовательного решения этого вопроса нужно иметь априорную информацию о корректности модели, определяемой (1) в том смысле, что это уравнение, действительно, определяет диффузионные процессы, удовлетворяющие основным тем физическим требованиям, которые должны быть предъявлены к ней. К их числу мы отнесем следующие:

1. Уравнение (1) должно иметь решение при любых начальных данных $x(0) \in (0,1)$.

2. Это решение должно быть единственно с вероятностью 1.

3. Каждое из решений, порождаемое начальным значением $x(0) \in (0,1)$, должно существовать, с вероятностью 1, при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

4. Оно, в течение всей эволюции, должно оставаться в $[0,1]$.

Ответам на эти вопросы посвящено настоящее сообщение.

2. Существование и единственность решений. Несколько затруднительно установить существование и единственность стохастического дифференциального уравнения со стохастическим дифференциалом Ито. Это связано с тем, классическая теорема относительно разрешимости задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений [7] вида

$$d\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}(t))dt + \sigma g(\tilde{x}(t))d\tilde{w}(t)\,, \tag{4}$$

где, в нашем случае,

$$f(x) = \alpha - x + \lambda x(1-x) + \sigma^2 x(1-x)(1-2x)/2\,, \quad g(x) = x(1-x)\,,$$

ввиду сильного возрастания роста коэффициентов $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to \infty$, неприменима в том общем виде, в котором она сформулирована. Причиной этого является то, что, в процессе доказательства, необходимо явно учитывать, что траектории $\tilde{x}(t)$ с начальными значениями $\tilde{x}(0) \in (0,1)$ не выходят за пределы этого отрезка.[†)] Поэтому мы установим теорему существования и единственности, основываясь на теореме Вонга-Закаи [8] (см. также [2]).

Теорема (Вонг-Закаи). *Пусть $\tilde{w}^{(n)}(t)$ – последовательность случайных процессов, неирерывиых, с ограниченной вариацией, имеющих непрерывную ироизводиую и сходящихся почти наверное равномерно к винеровскому процессу. Тогда, если f и g непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то решения $\tilde{x}^{(n)}(t)$ стохастического уравнения*

$$d\tilde{x}^{(n)}(t) = f(\tilde{x}^{(n)}(t))dt + \sigma g(\tilde{x}^{(n)}(t))d\tilde{w}^{(n)}(t) \tag{5}$$

(в котором стохастические интегралы допустимо понимать как обычные интегралы Римана), сходятся почти наверное равномерно к решению стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\tilde{x}(t) = \left[f(\tilde{x}(t)) + \frac{\sigma^2}{2}g'(\tilde{x}(t))g(\tilde{x}(t))\right]dt + g(\tilde{x}(t))d\tilde{w}(t)\,, \tag{6}$$

или, что то же самое к решению стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (4).

При этом допустимо, что процессы $\tilde{x}(t)$ могут быть обрывающимися со случайным временем обрыва.

Заметим, что к этому же результату можно прийти посредством техники приближений, которая разрабатывалась в рамках решения задач статистической физики (см. [9-12])

Применим теорему Вонга-Закаи для доказательства корректности генетической модели.

[†)]Эта трудность возникает из-за того, что нарушается условие $|f(x)|^2 + |g(x)|^2 < K^2(1+|x|^2)$, $K =$ const, которое гарантирует существование случайного процесса $\tilde{x}(t)$ на $\mathbb{R}_+$ при выходе за пределы отрезка, случайный процесс $\tilde{x}(t)$ становится, вообще говоря, обрывающимся со случайным временем обрыва (см. [2], стр. 129).

Теорема. *Для любого случайного значения $\tilde{x}(0) \in (0,1)$, стохастическое дифференциальное уравнение (1), которое статистически не зависит от значений случайного процесса $\{\tilde{w}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, имеет единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение, которое является марковским случайным процессом $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ с вероятностью 1 непрерывными траекториями, значения которого с той же вероятностью, содержатся в $[0,1]$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и илотность $p(x,t;x',t')$ условных вероятностей перехода которого удовлетворяет уравнению (2) с носителем* $\operatorname{ssup} p(x,t;x't') \subset [0,1]$.

□ Построим импульсный случайный процесс $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}^{\ddagger)}$ с траекториями

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n u(t - \tilde{t}_n)\,, \tag{7}$$

где $u(\cdot)$ – произвольная локализованная около нуля гладкая функция, $\{\alpha_n; \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных дихотомических случайных величин $\alpha_n \in \{\pm 1\}$ с нулевым средним значением, $\{t_n; n \in \mathbb{Z}\}$ – простейшее пуассоновское точечное случайное поле на $\mathbb{R}$ с плотностью ρ. Тогда ряд (7) сходится с вероятностью 1 и поэтому формула (7) определяет случайный процесс $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}$, как функционал от двух случайных последовательностей $\{\alpha_n; n \in \mathbb{Z}\}$, $\{t_n; n \in \mathbb{Z}\}$, распределение вероятностей которого индуцируется распределениями вероятностей этих последовательностей.

Рассмотрим стохастические уравнения

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t)) + \sigma g(\tilde{x}(t))\dot{\tilde{\varphi}}(t) \tag{8}$$

для каждой фиксированной реализации $\tilde{\varphi}(t)$ с f и g, заданными выше. Для любого начального значения $\tilde{x}(0) \in (0,1)$ существует единственное решение $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi})$ этого уравнения при достаточно малых $t \in [0,\tilde{s})$, где $\tilde{s}$ – случайное время. Рассмотрим это решение на указанном полуоткрытом интервале.

Положим, что существует случайное время $\tilde{\tau}$ такое, что $\tilde{x}(\tilde{\tau}) = 0, 1$ и $\tilde{x}(\tilde{\tau}+\delta) < 0, > 1$, соответственно, при достаточно малом $\delta > 0$, причем время $\tilde{\tau}$ выбрано наименьшим из всех тех, которые удовлетворяют этому условию. Тогда, согласно (8), $\dot{\tilde{x}}(\tau) = \alpha > 0, \alpha - 1 < 0$, соответственно. Но полученные неравенства противоречат определению времени $\tilde{\tau}$. Тогда время $\tilde{\tau}$ пересечения границ отрезка $[0,1]$ решением $\tilde{x}(t)$ не существует. Более того, если бы в момент времени $\tilde{\tau}$ происходило бы только достижение границ отрезка без пересечения, то, в этом случае, решение $\tilde{x}(t)$ достигало, соответственно, минимума в точке 0, либо максимума в точке 1, то есть должно было выполняться $\dot{\tilde{x}}(\tau) = 0$. Так как это равенство тоже невозможно, то решение $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi})$ никогда при $t \in [0,\tilde{s})$ не достигает границ отрезка $[0,1]$. Это означает, что с вероятностью 1 значения решения $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi}) \in (0,1)$ на полуинтервале времени, на котором оно существует.

Обрыв решения $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi})$ при каком-то случайном значении $t = \tilde{s}$ (невозможность продолжения решения с начальным значением $\tilde{x}(\tilde{s})$) может произойти только, если $|\tilde{x}(t)| \to \infty$ при $t \to \tilde{s} - 0$. Но в таком случае, это решение должно было покинуть

[‡] Техника доказательства на основе импульсных процессов была предложена в [12].

отрезок $[0,1]$ при каком-то меньшем значении времени $\tilde{\tau} < \tilde{s}$, что, как доказано выше, невозможно. Тогда $\tilde{s} = \infty$, то есть решение $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi})$ существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$. При этом все значения траектории $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi})$ находятся на $(0,1)$.

Выберем последовательность случайных процессов $\{\tilde{\varphi}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$ так, что соответствующая ей последовательность плотностей $\{\rho_n; n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность функций $\{u^{(n)}(t); n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяли условию $\rho_n \int \left(u^{(n)}\right)^2(t)dt \to 1$ при $n \to \infty$. Тогда последовательность индуцированных последовательностью $\{\tilde{\varphi}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$ процессов $\{\tilde{w}^{(n)}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$ с траекториями $\tilde{w}^{(n)}(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}^{(n)}(s)ds$ удовлетворяет всем условиям теоремы Вонга-Закаи. При этом стохастическое дифференциальное уравнение (5) эквивалентно уравнению (8). Тогда случайные процессы $\tilde{x}(t;\tilde{\varphi}^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ являются единственными решениями уравнения (5) и, согласно, теореме Вонга-Закаи стремятся при $n \to \infty$ к решению стохастического дифференциального уравнения (1) и имеет непрерывные с вероятностью 1 траектории. Этот процесс определен при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Он является марковским диффузионным процессом и, так как имеется однозначная связь между стохастическим уравнениями (1) и (2), то, согласно теореме Колмогорова о диффузионных процессах, его плотность $p(x,t;x',t')$ условных вероятностей перехода удовлетворяет уравнению (3). ■

Литература

1. Kimura M., Ohta T. Theoretical aspects of Population genetics / Boston: Princeton University Press, 1971.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. /М.: Мир, 1987. – 400 с.
3. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E. Observation of noise-induced phase transition with an analog simulator / Phys. Rev. Lett. – 1983. – 51; 12. – P.1062-1065.
4. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E., Clarkson D. Ito versus Stratonovich revisited / Phys. Lett A. – 1983. – 97. – P.95-98.
5. Moon W., Wettlaufer J.S. On the interpretation of Stratonovich calculus // New Journal of Physics. – 2014. – 16. – P.055017.
6. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения / Киев: Наукова Думка, 1968. – 356 с.
8. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals / Ann. Math. Stat. – 1965. – 36. – P.1560-1564.
9. Van Kampen N.G. A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. I / Physica. – 1974. – 74. – P.215-238.
   A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. II / Physica. – 1974. – 74. – P.239-247.
10. Van Kampen N.G. Stochastic differential equations / Phys. Rep. – 1976. – 24C. – P.171-228.
11. Ласкин Н.В., Пелетминский С.В., Приходько В.И. К кинетической теории систем в случайных полях / Теор. мат.физ. – 1978. – 34. – P.244-255.
12. Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В. Огрубленное описание распределения решений уравнения Ланжевена / Теор. мат. физ. – 1979. – 41;3. – P.406-417.

CORRECTNESS OF STOCHASTIC EQUATION OF THE GENETIC MODEL

Pham Minh Tuan, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru,

Abstract. It is proved that the stochastic differential equation of the so-called genetic model which, in particular, describes the kinetics of of binary cyclic chemical reactions proposed by Horsthemke W. and Lefever R. always has an unique solution $\tilde{x}(t)$ when its initial value is placed in $(0, 1)$. This solution is the global one, i.e. it exists at all $t \in \mathbb{R}_+$. Besides, it is such that its values $\tilde{x}(t) \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Key words: stochastic model, stochastic Stratonovich differential, stochastic Ito differential, Wong-Zakai's theorem, Kolmogorov's equation.