MSC 60D05

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАДИУСОВ СЛУЧАЙНЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИХ ХОРД

***Ю.П. Вирченко, **О.Л. Шпилинская**

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
**Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, 61001, Украина

Аннотация. В работе решается задача о восстановлении распределения радиусов случайных кругов, случайно расположенных на плоскости, основанному на заданном распределении вероятностей их хорд, которые отсекаются параллельными друг другу и эквидистантно расположенными на плоскости прямыми.

Ключевые слова: геометрические вероятности, случайные окружности, распределение вероятностей.

1. Введение. Будем рассматривать следующую задачу, постановку которой можно понимать как некоторое усиление классической задачи Бюффона в стохастической геометрии (см., например, [1]) и которая состоит в вычислении вероятности пересечения одной из параллельных друг другу, эквидистантно расположенных с расстоянием $2d$, $d \in \mathbb{R}$ на этой плоскости прямых спрямляемым фиксированным (с точностью до его перемещения) плоским контуром при его случайном размещении на плоскости. В нашем случае, контур представляет собой окружность. Усиление же задачи состоит в том, что окружность уже не будет фиксированной по размеру, а, наоборот, каждая ее реализация определяется случайным радиусом $\xi > 0$ с абсолютно непрерывным законом распределения, определяемым плотностью $f_\xi(x)$, $x > 0$. Ввиду симметричности относительно вращений, случайное расположение окружности на плоскости, в отличие от классической задачи Бюффона, полностью характеризуется одним случайным параметром — ее центром. Это обстоятельство сразу же, несмотря на случайность геометрии контура, упрощает задачу Бюффона в классической постановке. Так, если считать, что центры окружностей представляют собой, как и в задаче Бюффона, однородное случайное пуассоновское точечное поле, то вероятность пересечения P, очевидным образом, определяется этой плотностью посредством следующей формулы

$$P = \frac{1}{d}\int\limits_0^d x f_\xi(x) dx\,.$$

При этом здесь и далее считается, что почти наверное имеет место неравенство $\xi < d$, то есть $f_\xi(x) = 0$ при $x \geq d$.

В самом деле, если η — случайная координата центра окружности по направлению, перпендикулярному семейству прямых на плоскости, отсчитываемая от ближайшей к ней прямой, то, по указанному выше предположению о распределении центров случайных окружностей, плотность распределения $h_\eta(y)$, $|y| < d$ этой величины имеет вид

$$h_\eta(y) = \frac{1}{2d}\,\Theta(d - |y|)\,, \qquad \Theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Условная же вероятность того, что окружность пересечет эту ближайшую прямую при условии $\eta = y$ равна

$$\Pr\{\xi > |y|\} = \int\limits_{|y|}^{d} f_\xi(x)dx\,.$$

Тогда

$$P = \frac{1}{2d}\int\limits_{-d}^{d}\Pr\{\xi > |y|\}dy = \frac{1}{2d}\int\limits_{-d}^{d}dy\int\limits_{|y|}^{d}f_\xi(x)dx = \frac{1}{d}\int\limits_{0}^{d}xf_\xi(x)dx\,.$$

Таким образом, в рассматриваемой постановке, задача о пересечении случайной окружности имеет очень простое решение. Более интересная, как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений, задача состоит в нахождении распределения вероятностей, плотность которого мы обозначим $g_\zeta(x)$, $0 < x < 2d$, случайной величины ζ, которая является длиной отрезка — хорды случайной окружности, отсекаемого на прямой окружностью при ее пересечении окружностью. Очевидно, что значение случайной величины ζ следующим образом определяется значениями случайных величин ξ и η,

$$\zeta = 2\sqrt{\xi^2 - \eta^2}\,. \tag{2}$$

Тогда вычисление плотности $g_\zeta(x)$ на основе заданной плотности $f_\xi(x)$ уже представляет собой более сложную задачу, решение которой дается в следующем разделе.

С прикладной же точки зрения представляет интерес как раз обратная задача (которую можно рассматривать как задачу стереологии) — восстановление плотности $f_\xi(x)$ по заданной плотности $g_\zeta(x)$, решению которой посвящено настоящее сообщение. Это решение позволяет по определяемой экспериментально под микроскопом статистике длин хорд восстанавливать распределение вероятностей радиусов сферических пор, образующихся в оптически полупрозрачных средах.

2. Вычисление плотности g_ζ.

Теорема 1. *Плотности распределения $f_\xi(u)$ и $g_\zeta(z)$ связаны соотношением*

$$g_\zeta(z) = \frac{z}{4d}\int_{z/2}^{d}\frac{f_\xi(u)du}{\sqrt{u^2 - (z/2)^2}}\,. \tag{3}$$

□ Выразим плотность распределения $g_\zeta(z)$ случайной величины ζ, в предположении, что закон распределения хорд также является абсолютно-непрерывным но мере Лебега. Заметим, что плотность распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ может быть представлена формулой

$$f_\xi(x) = \langle \delta(x-\xi)\rangle_\xi \,,$$

где угловыми скобками обозначено усреднение но распределению вероятностей случайной величины ξ. Тогда условная плотность распределения вероятности случайного события $\{\zeta < z\} = \{2\sqrt{\xi^2-y^2} < z\}$ при условии, что $\eta = y$ представима в виде $\langle \delta(z-2\sqrt{\xi^2-y^2})\rangle_\xi$, и поэтому, интегрируя но y с плотностью $h_\eta(y)$, безусловную плотность $g_\zeta(z)$ запишем в следующей форме

$$g_\zeta(z) = \frac{1}{2d}\int\limits_{-d}^{d} \langle \delta(z-2\sqrt{\xi^2-y^2})\Theta(\xi-|y|)\rangle_\xi dy\,. \tag{4}$$

Полученное представление удобно тем, что можно воспользоваться известным правилом преобразования δ-функции, зависящей от сложного аргумента $a(\xi) = z-2\sqrt{\xi^2-y^2}$. А именно,

$$\delta(a(\xi)) = \frac{\delta(\xi-\xi_*(z,y))}{|\,a'(\xi_*(z,y))|}\,,$$

где $\xi_*(z,y) = \sqrt{(z/2)^2+y^2}$ – единственный положительный корень уравнения $a(\xi)=0$.

Так как

$$|\,a'(\xi_*(z,y))| = \frac{4}{z}\sqrt{(z/2)^2+y^2}\,,$$

то из (4) имеем

$$g_\zeta(z) = \frac{1}{2d}\int\limits_{-d}^{d} dy \int\limits_{0}^{d} \delta\left(z-2\sqrt{(x/2)^2-y^2}\right) f_\xi(x)\Theta\left(x-|y|\right)dx =$$

$$= \frac{z}{4d}\int\limits_{0}^{d} dy \int\limits_{0}^{d} \Theta\left(x-y\right) f_\xi(x)\frac{\delta\left(x-\sqrt{(z/2)^2+y^2}\right)}{\sqrt{(z/2)^2+y^2}}dx =$$

$$= \frac{z}{4d}\int\limits_{0}^{d} f_\xi\left(\sqrt{(z/2)^2+y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{(z/2)^2+y^2}}\,.$$

Вводя замену переменной интегрирования $u = \sqrt{(z/2)^2+y^2}$ получаем следующее выражение

$$g_\zeta(z) = \frac{z}{4d}\int\limits_{z/2}^{d} \frac{f_\xi(u)du}{\sqrt{u^2-(z/2)^2}}\,,$$

где мы воспользовались тем, что $du = (y/u)dy$, $y = \sqrt{u^2 - (z/2)^2}$ и $f_\xi(u) = 0$ при $u > d$. $\Box$

Обратная задача. В практических приложениях возникают задачи, когда по измеренной, посредством обработки статистики длин хорд, плотности g_ζ их распределения вероятностей, в описанной во введении постановке статистического эксперимента, требуется восстановить плотность распределения вероятности диаметров случайных кругов, однородно разбрасываемых на плоскости, то есть восстановить плотность f_ξ [2, 3]. Очевидно, исходя из утверждения доказанной теоремы, что для решения такой задачи необходимо решить интегральное уравнение, которое получается из (3), если считать, в этом соотношении функцию g_ζ заданной, а f_ξ искомой. При этом мы получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое легко сводится к классическому интегральному уравнению Абеля (см., например, [4]) и поэтому решается явно в терминах квадратур. Приведем процедуру построения этого решения. С этой целью, введем функцию $g(z)$ так, что $g(z/2) = g_\zeta(z)$. Тогда

$$g(z) = \frac{z}{2d}\int\limits_z^d \frac{f_\xi(u)du}{\sqrt{u^2 - z^2}}\,.$$

Положим $z^2 = w$, $u^2 = v$ и введем функции $F(v) = f_\xi(v)/\sqrt{v}$, $G(w) = g(w)/\sqrt{w}$. Тогда эти функции связаны интегральным соотношением

$$G(w) = \frac{1}{4d}\int\limits_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v - w}}\,, \tag{5}$$

которое, как раз, является интегральным уравнением типа уравнения Абеля относительно функции F и, по этой причине, решается явно с помощью стандартного аналитического приема.

Проинтегрируем обе части полученное уравнения по z с интегрирующим множителем $(w-t)^{-1/2}$

$$\int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}} = \frac{1}{4d}\int_t^{d^2} \frac{dw}{\sqrt{w-t}}\int_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v-w}}\,, \tag{6}$$

Изменим порядок интегрирования в правой части. В результате, получим выражение

$$\int_t^{d^2} \frac{dw}{\sqrt{w-t}}\int_w^{d^2} \frac{F(v)dv}{\sqrt{v-w}} = \int_t^{d^2} F(v)dv\int_t^{v} \frac{dw}{\sqrt{(w-t)(v-w)}} = \int_t^{d^2} F(v)dv\,.$$

Таким образом, после интегрирования уравнение принимает вид

$$\int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}} = \frac{\pi}{4d}\int_t^{d^2} F(v)dv\,. \tag{7}$$

Дифференцируя по t, получим искомое решение исходного уравнения

$$F(t) = -\frac{4d}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_t^{d^2} \frac{G(w)dw}{\sqrt{w-t}}\,. \tag{8}$$

Переходя в этом выражении к исходным переменным $t \Rightarrow v$ и функциям $f_\xi(\sqrt{v}\,) = F(\sqrt{v}\,)\sqrt{v}$ и $g(\sqrt{w}\,) = G(\sqrt{w}\,)\sqrt{w}$, а затем $w = z^2$, $v = u^2$, находим

$$\frac{f_\xi(\sqrt{v}\,)}{\sqrt{v}} = -\frac{4d}{\pi}\cdot\frac{d}{dv}\int_v^{d^2}\frac{g(\sqrt{w}\,)dw}{\sqrt{w(w-v)}}\,, \qquad \frac{f_\xi(u)}{u} = -\frac{4d}{\pi u}\cdot\frac{d}{du}\int_u^d\frac{g\,(z)\,dz}{\sqrt{z^2-u^2}}\,.$$

Окончательное выражение, позволяющее по известному распределению хорд восстановить распределение вероятностей радиусов случайных кругов на плоскости дается следующей формулой в виде интегрального преобразования плотности g_ζ,

$$f_\xi(u) = -\frac{4d}{\pi}\cdot\frac{d}{du}\int\limits_{2u}^{2d}\frac{g_\zeta(z)dz}{\sqrt{z^2-4u^2}}\,. \tag{9}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Если $g_\zeta(z)$ – плотность распределения вероятностей хорд кругов случайного радиуса, с вероятностью 1 не превосходящего $d \in \mathbb{R}$, то распределение вероятностей радиусов этих кругов является абсолютно-непрерывным по мере Лебега и его плотность распределения $f_\xi(v)$ определяется формулой* (9).

Литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей - М: УРСС, 2005.-448 с.
2. Поджидаев В.Ф., Танько Я.А., Связь между функцией распределения хорд по размерам и диаметров сечений сферолитов // Вiсник схiдноукранського нацiонального унiверситету iм. В.Даля.-2012.-8(179).-С.198-204.
3. Архангельский С.И., Бородихин В.М. Связь между распределениями диаметров сферических частиц и хорд их случайных сечений // Сибирский журнал индустриальной математики.-2002.-V, 3(11).-С.27-34.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения.- М.: Наука, 1975.-304 с.

RECONSTRUCTION OF PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM CIRCLES RADII BASED ON PROBABILITY DISTRIBUTION OF THEIR CHORDS

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Institute for Single Crystals of NANU,
Lenin Av., 60, Kharkiv, 61001, Ukraine

Abstract. It is solved the problem of reconstruction of random circles radii probability distribution which are randomly placed on plane. It is based on the given probability distribution of chords which are cut off by straight lines being parallel to each other and placed equidistant on the plane.

Key words: geometric probabilities, random circles, probability distribution.