MSC 34M99

ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

М.Х. Нуман Эльшейх

Ключевые слова: операторы Лапласа, уравнение Шредингера, граф, компактный носитель, самосопряженные расширения.

В сообщении рассматриваются операторы Лапласа на графах с конечным или счётным числом рёбер. Работа является продолжением исследований [2], в которых изучался граф с конечным множеством ребер. Даётся описание самосопряжённых расширений симметрического оператора, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления.

Граф с одной вершиной. Граф Γ мы определяем как объединение n экземпляров полупрямых $\Gamma_j = [0, +\infty)$, $j = 0, \ldots, n$ с общим началом Q, называемым вершиной графа. Предполагается, что на Γ задана Борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую полупрямую Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точки Q, и $L_0 = \oplus L_0^j$ – линейный оператор, определяемый на $C_0^\infty(\Gamma)$, соотношением $L_0 u = \{L_0^j u_j\}$, $L_0^j u_j = \dfrac{1}{m_j}\Delta_j u_j + iB_j(x)\dfrac{\partial u_j}{\partial x} + i\dfrac{\partial (B_j(x)u_j)}{\partial x} + C_j(x)u_j$. Здесь $\{u_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ – сужения функции u на полупрямые Γ_j. Предполагается, что при всех j числа $m_j > 0$ и функции $B_j(x)$, $C_j(x)$ вещественнозначны, ограничены и непрерывно дифференцируемы на полупрямой Γ_j. Через b_j обозначим предельное значение функции $B_j(0)$ в точке Q. Оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = C_{0,0}^\infty(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(L_0^*)$ сопряжённого оператора L_0^* является линейное подпространство $D(L_0^*) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(P_j) := W_2^2(\Gamma) \subset H$. Сужения всякой функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ на полупрямые P_j, $j = 1, \ldots, n$ обладают граничными значениями в вершине, которые обозначим через $u_j(0)$, где символ $u(0)$ означает $u(0) = (u_1(0) u_2(0) \ldots u_n(0))^T \in C_n$. Это то же верно для первых производных этих сужений, для них используем аналогичные обозначения.

Теорема фон Неймана (см. [1]) предоставляет описание множества самосопряжённых расширений симметрического оператора. Нами получено явное описание множества самосопряжённых расширений оператора L_0 в терминах условий на линейные подпространства в пространстве граничных значений $G = \frac{D(L_0^*)}{D(L_0)} = \{(u(0), u'(0))\} = C_{2n}$.

Теорема 1. *Пусть $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ самосопряжен тогда и только тогда когда матрица A удовлетворяет равенству $A = A^*$.*

□ Если $u \in D(L_0)$ и $v \in D(L_0^*)$, то справедливо равенство

$$(L_0 u, v)_H - (u, L_0^* v)_H = \left((u(0))^T, \overline{v'}(0)\right)_{C_n} - \left((u'(0))^T, \overline{v}(0)\right)_{C_n} = 0.$$

Следовательно $(L_0 u, v)_H - (u, L_0^* v)_H = \left[\overline{v'}(0) - A^T \overline{v}(0)\right] (u(0))^T = 0$.

Следы $(u(0))^T$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(0) = A^* v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(L_0^*)$, что и доказывает теорему 1. ■

Следствие 1. *Если $M = \mathrm{diag}\frac{1}{m_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $C = (c_{i,j})$, где $c_{i,j} \in L_\infty(\Gamma)$ и $B = \mathrm{diag} b_k$, то оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, самосопряжен тогда и только тогда когда матрица A, M и B удовлетворяет равенству $A = M^{-1} A^* M - 2iM^{-1}B$.*

Граф с несколькими вершинами. Пусть граф Γ представляет собой набор из n вершин $Q_1, \ldots, Q_n$, из каждой из которых исходит r_j, $r_j \in N$ ребер Γ_j^i, представляющих собой либо бесконечные полупрямые, либо отрезки, соединяющие вершину Q_j с другими вершинами. Сохраним обозначения предыдущего раздела. Введем операторы L_0, L_0^* и пространство граничных значений функций из $D(L_0^*)$ и их производных, линейно изоморфное пространству C_{2m}, где $m = r_1 + \ldots + r_n$. Через $u(Q_j)$ обозначим совокупность предельных значений функции по ребрам, входящим в точку Q_j, а через $u(0)$ обозначим m–мерный вектор $(u(Q_1) \ldots u(Q_n))^T$, для вектора предельных значений производной $u'(0)$ используем аналогичные обозначения.

Теорема 2. *Пусть $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Оператор L с областью определения $D(L) = \left\{ u \in W_2^2(\Gamma) : \begin{pmatrix} u'(Q_1) \\ \vdots \\ u'(Q_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(Q_1) \\ \vdots \\ u(Q_n) \end{pmatrix} \right\}$, где A – матрица размерности $2m \times 2m$, самосопряжен тогда и только тогда когда матрица A удовлетворяет равенству $A = A^*$.*

Граф с одной вершиной и со счётным множеством лучей. Обозначим через μ – счётно аддитивную вероятностную меру на N такую, что $\mu(k) = \mu_k > 0$, и $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$ – гильбертово пространство граничных значений с нормой $\|\{u_n\}\|^2 = \int_N |u_n|^2 d\mu(n) = \sum_{k=1}^\infty |u_n|^2 \mu(k)$. Сужения всякой функции на полупрямую обладают граничными значениями в вершине: $u(0) = (u_1(0) \ldots u_n(0) \ldots)^T \in L_{2,\mu}$. Это то же верно для первых производных этих сужений $u'(0)$.

Теорема 3. *Пусть $\mu_k = 1$, $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, самосопряжен тогда и только тогда когда оператор A самосопряжен в пространстве L_2.*

Следствие 3. *Если $\mu_k \in L_1$, $b_k \in L_\infty$, E, B – операторы в пространстве $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$, заданные диагональными матрицами с числами μ_k, b_k на диагонали, $C = (c_{ij})$,где $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$. Тогда оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, самосопряжен тогда и только тогда когда выполняется $A = E^{-1} A^* E - 2iB$.*

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики «Функциональный анализ». Т.1 / М.: Мир, 1977.

2. Сакбаев В., Смолянов О. Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения / ДАН. – 2010. – 433:3. – С.314-317.

LAPLACE OPERATORS OF SCHRÖDINGER EQUATION ON GRAPHS

M.H. Numan El'sheikh

Key words: Laplace's operators, Schrödinger's equation, graph, compact support, self-conjugate extensions.