MSC 42A82

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ

А.Б. Певный, С.М. Ситник

Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский пр., 55, Сыктывкар, респ. Коми, 167001, Россия, e-mail: pevnyi@syktsu.ru
Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. При исследовании математических моделей задачи обычно сводятся к конечномерным, для которых возникает необходимость обоснования их корректности, и, в частности, установлению однозначной разрешимости линейных систем с матрицами коэффициентов специального вида. В работе для решения этой задачи вводится класс вещественных положительно определённых функций и доказываются неравенства для них. Рассматривается приложение техники положительно определённых функций к доказательству однозначной разрешимости конечномерных моделей, возникающих при разложении сигналов по целочисленным сдвигам гауссианов.

Ключевые слова: положительно определённые функции, теорема Бохнера, неравенство М.Г. Крейна, гауссиан, целочисленные сдвиги.

1. Вещественные положительно определённые функции и неравенства для них. Теория положительно определённых функций (п.о.ф.) возникла в начале 20 века на стыке нескольких разделов математики: линейной алгебры, теории функций, преобразования и рядов Фурье, интегральных и дифференциальных уравнений, теории групп. Из литературы по п.о.ф. отметим одну из первых оригинальных работ [1], содержащую по существу все современные определения, обзоры [2-3], из монографий особенно выделим очень качественно написанную книгу [4], а также [5-7]. В настоящей работе вводится понятие вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.), определение для которых отличается от классического использованием только вещественных, а не комплексных последовательностей. Для этого класса функций доказываются варианты известных неравенств М.Г. Крейна и Е.А. Горина. В качестве приложения рассматривается доказательство однозначной разрешимости конечномерной линейной системы, возникающей в задаче о разложении сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов [8].

Отметим, что для авторов инициирующей послужила статья Е.А. Горина [9].

Будем рассматривать действительные функции от действительного аргумента на всей оси $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дадим два определения для положительно определённых функций: вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.) и классическое определение положительно определённой функции (п.о.ф.) и установим их эквивалентность.

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется вещественной положительно определённой функцией (в.п.о.ф.), если выполнены два условия:*

1) функция f чётная, $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

2) для любого N, для любых точек $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ и любой вещественной последовательности $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\, a_k a_j \geq 0\,. \tag{1}$$

Определение 2 (классическое). *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется положительно определённой функцией (п.о.ф.), если для любого N, любых $x_1, \dots x_N \in \mathbb{R}$ и любой последовательности комплексных чисел $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\, z_k \bar{z}_j \geq 0. \tag{2}$$

Покажем, что для вещественной функции $f(x)$ определения 1 и 2 равносильны.

Установим, что $1 \Longrightarrow 2$. Пусть $z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) в силу чётности функции равна

$$S = \sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\,(\xi_k \xi_j + \eta_k \eta_j)$$

и нужное неравенство $S \geq 0$ следует из (1).

Теперь покажем, что $2 \Longrightarrow 1$. Нужно проверить только чётность $f(x)$ Для этого положим в (2) $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x > 0$, $z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) равна

$$S = f(0)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + f(-x)\, z_1 \bar{z_2} + f(x) z_2 \bar{z_1}\,.$$

Отсюда получаем для произвольных чисел ξ_1, ξ_2, η_1, η_2

$$\operatorname{Im} S = (\eta_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2)\,[f(-x) - f(x)] = 0\,,$$

Следовательно, $f(-x) = f(x)$.

Будем рассматривать вещественные *строго* п.о.ф., для которых неравенство (1) выполняется со знаком «строго больше», если последовательность $a_1, \dots a_N$ ненулевая и точки $x_1, \dots, x_N$ попарно различны.

Рассмотрим некоторые свойства вещественных строго положительно определённых функций.

Определение 1 накладывает на рост в.п.о.ф. существенные ограничения. Введём матрицу A с элементами $A_{kj} = f(x_k - x_j)$, $1 \leq i, j \leq N$. Эта матрица будет симметричной и неотрицательно определённой. По критерию Сильвестра все её главные миноры неотрицательны. В частности,

$$\Delta_1 = f(x_1 - x_1) = f(0) \geq 0\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f(0) & f(x_1 - x_2) \\ f(x_2 - x_1) & f(0) \end{vmatrix} = f^2(0) - f^2(x_1 - x_2) \geq 0.$$

Отсюда получаем важное свойство

$$|f(x)| \leq f(0), \, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Следовательно, график функции $f(x)$ находится в полосе $-f(0) \leq y \leq f(0)$, а если достигает верхней или нижней границ, то функция $f(x)$ будет периодической (см. далее).

Следующее неравенство, которое мы перепишем для случая в.п.о.ф., в работах Е.А. Горина [9-10], а также в обзоре [3] названо неравенством М.Г. Крейна:

$$[f(x) - f(y)]^2 \leq 2f(0)\,[f(0) - f(x-y)]\,; \; x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Доказательство приведено, например, в книге [1].

Следствие 1. *Если $f(T) = f(0)$ при некотором $T > 0$, то функция $f(x)$ периодическая с периодом T.*

Теорема 1. *Для в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство*

$$[f(x) + f(y)]^2 \leq 2f(0)\,[f(0) + f(x-y)]\,; \; x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

□ Можно считать, что $f(0) = 1$. Выберем в определении 1 значение $N = 3$ и три точки $0, x, y$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & f(x) & f(y) \\ f(x) & 1 & f(x-y) \\ f(y) & f(x-y) & 1 \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена, то есть $(Au, u) \geq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^3$. Возьмём $u = (a, -1, -1)^T$. Тогда получаем

$$a^2 + 2 - 2af(x) - 2af(y) + 2f(x-y) \geq 0\,,$$

$$2 + 2f(x-y) \geq -a^2 + 2a\,[f(x) + f(y)]$$

Отсюда при $a = f(x) + f(y)$ получим (5). ■

Продолжая следовать традиции в названиях, теперь логично назвать неравенство (4) первым неравенством М.Г. Крейна, а неравенство (5) – вторым неравенством М.Г. Крейна. Отметим, что в статьях М.Г. Крейна [11-12] рассматривается проблема продолжения функции, положительно определенной на интервале $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$, на всю ось; при этом попутно устанавливается неравенство (4). Отметим, что в формулировках имеются некоторые неточности: в [11] при определении положительно определённых функций, а в [11-12] — при записи самого неравенства (4).

Следствие 2. *Если $f(x)$ является в.п.о.ф., и дополнительно выполнено соотношение $f(T) = -f(0)$ для некоторого $T > 0$, то справедливы равенства*

$$f(x+T) = -f(x)\,, \; f(x+2T) = f(x)\,, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

Действительно, при $y = x + T$ в (5) получаем

$$[f(x) + f(x+T)]^2 \leq 2f(0)\,[f(0) + f(T)] = 0\,.$$

Рассмотренные до сих пор неравенства являются двухточечными, теперь рассмотрим их многоточечные обобщения.

Е.А. Горин доказал в [9, теорема 1] неравенство, которое для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ принимает вид:

$$\left[f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\right]^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}\left[f(0) - f(x_k - y_k)\right]$$

для любых $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Неравенство М.Г. Крейна (4) получается отсюда как частный случай при n= 1.

Покажем, что приведённое неравенство Е.А. Горина допускает модификацию, которая является обобщением второго неравенства М.Г. Крейна (5).

Теорема 2. *Пусть n – нечётное число. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_n \in \mathbb{R}$ для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство*

$$\left[f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\right]^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}\left[f(0) + f(x_k - y_k)\right]. \tag{6}$$

Замечание. При чётном n неравенство (6) может не выполняться. Для примера выберем $f(x) = \cos x$, $x_1 = x_2 = 2\pi$, $y_1 = y_2 = \pi$. Тогда неравенство (6) принимает вид $4 \leq 0$, что неверно.

□ Доказательство теоремы 2 в основном повторяет доказательство Е.А. Горина из [9]. Не умаляя общности, можно считать, что $f(0) = 1$. По теореме Бохнера [9]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, m(dt)\ ,$$

где m – вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Введём обозначения

$$a_k = e^{itx_k},\ b_k = e^{ity_k}\ ,\ c_k = \frac{b_k}{a_k} = e^{it(y_k - x_k)}\,.$$

Тогда левая часть L неравенства (6) равна

$$L = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k\right) m(dt)\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_1 \cdots a_n\,(1 + c_1 \cdots c_n)\, m(dt)\right]^2$$

По неравенству Коши-Буняковского,

$$L \leq \int_{-\infty}^{\infty} |1 + c_1 \cdots c_n|^2\; m(dt)\,.$$

Воспользуемся тождеством

$$1+c_1\cdots c_n=1+c_1-c_1\left(1+c_2\right)+c_1c_2\left(1+c_3\right)-\ldots+c_1\cdots c_{n-1}\left(1+c_n\right).$$

Знаки чередуются, но перед последним слагаемым знак $+$ в силу нечётности n.

Применим неравенство Коши-Буняковского для конечной суммы

$$L\le n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|1+c_k\right|^2m\left(dt\right).$$

Аналогично преобразуется правая часть R неравенства (6):

$$R\ge 2n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(1+c_k\right)m\left(dt\right).$$

Поскольку, $c_k=e^{ip}$ где $p=t\left(y_k-x_k\right)$, то нетрудно проверить, что

$$\left|1+c_k\right|^2=2\ \mathrm{Re}\ \left(1+c_k\right).$$

Поэтому получаем $L\le R$, что и требовалось доказать. ■

2. Приложение теории в.п.о.ф. к разрешимости конечномерных приближений интерполяционной задачи. Вещественные строго п.о.ф. могут быть использованы для доказательства однозначной разрешимости конечномерных линейных систем уравнений. Такие задачи возникают при решении различных интерполяционных задач. Рассмотрим приложение к одной из таких задач – разложению произвольного сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов.

Пусть даны попарно различные узлы $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}$ и набор измеренных значений цифрового сигнала $y_1,\ldots,y_N\in\mathbb{R}$ в этих узлах. Пусть выбрана вещественная строго п.о.ф. $f\left(x\right)$. Будем интерполировать данные линейными комбинациями вида

$$S\left(x\right)=\sum_{k=1}^{N}a_kf\left(x-x_k\right).$$

Требуется найти вектор коэффициентов вида $a=\left(a_1,\ldots,a_N\right)$ так, чтобы обрабатываемый сигнал без ошибок восстанавливался на заданной системе узлов:

$$S\left(x_m\right)=\sum_{k=1}^{N}a_kf\left(x_m-x_k\right)=y_m\,,\quad 1\le m\le N\,. \tag{7}$$

Систему (4) можно записать в виде $Aa=y$, где $A-$матрица с элементами $A_{mk}=f\left(x_m-x_k\right)$. В силу того, что $f\left(x\right)$ является вещественной строго п.о.ф., эта матрица положительно определена, то есть

$$(\mathrm{Aa},\mathrm{a})=\sum_{k,m=1}^{N}f\left(x_m-x_k\right)a_ma_k>0\,,\quad a\in\mathbb{R}^N\,,\quad a\ne0\,.$$

У положительно определённой матрицы определитель $\det(A)$ строго положителен. Поэтому система (7) однозначно разрешима.

Восстановление непрерывного цифрового сигнала по системе дискретных отсчётов сводится к классической математической задаче об интерполяции функции по некоторому набору её значений. Для решения этой задачи разработано множество подходов: приближение полиномами, ортогональными системами, всплесками, сплайнами, фреймами, разложениями по синк–функциям, анализ Габора (разложения по когерентным состояниям) и другие методы, см., например, [13-16].

Рассмотрим задачу об интерполяции сигналов при помощи системы целочисленных сдвигов функции Гаусса

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0\,. \tag{8}$$

Несмотря на то, что данная система сдвигов не является ни фреймом, ни полной системой в $L_2(\mathbb{R})$, существует плодотворная теория для разложений этого класса, которые также находят важные практические приложения [16-19].

Для нас важно, что квадратичная экспонента или функция Гаусса (5) – это один из стандартных примеров функции из класса в.п.о.ф. В перечисленных работах рассматривается интерполяционная задача по бесконечной системе целочисленных сдвигов функции (5), в связи с чем строится узловая функция со свойством

$$d(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-a(x-k)^2}, \quad d(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

где δ_{0m} — символ Кронекера.

График узловой функции напоминает график sinc-функции. Поэтому в [8] была сформулирована такая

Гипотеза. Узловая функция (7) принадлежит классу вещественных строго п.о.ф.

Отметим, что эта гипотеза оказалась справедливой и доказана авторами, при этом использовались результаты работ [17-19], доказательство будет опубликовано в другой статье.

Явная формула для коэффициентов узловой функции d_k получена в [16], они выражаются через тета-функции Якоби. Однако подобные формулы неприменимы при практических вычислениях, потому, что как показано в [18-19], они связаны с делением на чрезвычайно малые знаменатели и приводят к неприемлемым ошибкам.

В связи с перечисленными трудностями в работах [20-21] был предложен другой подход к нахождению численных приближений для узловой функции, при котором решение бесконечной системы уравнений сводится к конечной. В результате получается усечённая система

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k q^{(m-k)^2} = \delta_{0m}, \quad -n \le m \le n, \tag{10}$$

где обозначено $q = e^{-a} < 1$. Систему (10) можно записать в виде

$$Ac = \delta\,,$$

где

$$c = \{c_k\}_{k=-n}^{n}\,, \quad \delta = \{\delta_{m0}\}_{m=-n}^{n}\,,$$

A — матрица с элементами $A_{mk} = q^{(m-k)^2}\,, \quad -n \le m, k \le n.$

Например, при $n = 2$ матрица A коэффициентов системы имеет размер 5×5 и представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Матрица A положительно определена при любом $q \in [0, 1)$.*

□ При $q = 0$ матрица сводится к единичной, требуемое очевидно, поэтому пусть $q \in (0, 1)$. Напомним, что в этом случае $q = e^{-a}$, $a > 0$. Тогда элементы рассматриваемой матрицы выражаются через функцию Гаусса

$$A_{mk} = f\,(m-k)\;, \quad f\,(x) = e^{-ax^2}\,, \quad a > 0\,.$$

В силу принадлежности функции Гаусса классу строго п.о.ф. матрица A положительно определена. ■

Следствие 3. *Система (10) однозначно разрешима.*

Действительно, в силу положительной определённости матрицы системы, получаем $\det(A) > 0$.

Отметим, что система (10) имеет вид свёртки, поэтому её можно решать при помощи ДПФ, аналогично методу, применённому в [18-19].

Следствие 4. *Решение системы (10) симметрично, то есть $c_{-k} = c_k$ при фиксированном n.*

Действительно, рассмотрим произвольное решение. Нетрудно видеть, что если распространить по симметрии значения компонент с положительными индексами на компоненты с отрицательными индексами, то получится другое решение той же системы. Тогда, если исходное решение было бы несимметричным, то мы получили бы два различных решения, что невозможно в силу доказанной единственности. Следовательно, все решения симметричны.

На основании следствия 4 можно оставить в системе только половину уравнений, сократив размеры матрицы коэффициентов задачи вдвое, это даст существенное упрощение при вычислениях.

Заметим, что похожая матрица B с элементами

$$B_{mk} = (-q)^{(m-k)^2}\,, \quad -n \le m, k \le n\,,$$

при $0 < q < 1$ также положительно определена. Для доказательства достаточно заметить, что

$$B_{mk} = g\,(m-k)\;, \quad g\,(x) = e^{-ax^2}\cos(\pi x)\;, \quad a = -\ln(q)\,,$$

и проверить, что функция $g(x)$ принадлежит классу строго п.о.ф.

3. Заключение. В работе рассматрен класс вещественных строго положительно определённых функций. Для этого класса доказываются обобщения известных неравенств М.Г. Крейна и Е.А. Горина. Рассматриваются приложения вещественных строго положительно определённых функций к установлению однозначной разрешимости в прикладной задаче о разложении функции сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов.

Литература

1. Mathias M. Über positive Fourier–Integrale // Math. Zeit. –1923. –16. –P.103-125.
2. Stewart J. Positive Definite Functions And Generalizations, An Historical Survey // Rocky Mountain Journal Of Mathematics. –1976. –6;3. –P.409-434.
3. Гурарий В.П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа / ВИНИТИ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. –1988. — 25. –С.4-303.
4. Bhatia R. Positive Definite Matrices / Princeton University Press, 2007. –264 p.
5. Sasvari Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / De Gruyter, 2013. –377 p.
6. Kosaki H. Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities / Memoirs of the American Mathematical Society. – 2011. – 297. –93 p.
7. Fasshauer G.E. Meshfree Approximation Methods with Matlab / World Scientific Publishing, 2007. – 518 p.
8. Певный А.Б., Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы восемнадцатого научно–практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. –2015. –247. –С.247-254.
9. Горин Е.А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матем. –2012. –17;7. –С.67-95.
10. Gorin E.A., Norvidas S. Universal Symbols on Locally Compact Abelian Groups // Functional Analysis and Its Applications. –2013. –47;1. –P.1-13.
11. Крейн М.Г. О представлении функций интегралами Фурье–Стилтьеса // Учёные записки Куйбышевского государственного педагогического и учительского института им. В.В. Куйбышева. 1943. –7. (Цитируется по изданию: Крейн М.Г. Избранные труды. Киев, 1993. Том 1, С.16-48).
12. Крейн М.Г. Об измеримых эрмитово–положительных функциях // Матем. заметки. – 1978. –23;1. 79-91.
13. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков / М.: Физматлит, 2006. – 616 с.
14. Малозёмов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа / СПб.: Лань, 2012. –304 с.
15. Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных / Л.: Наука, 1991. –125 с.
16. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. –2007. —141. –349 p.
17. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Матем. заметки. –2014. –96;2. –С.239-250.

18. Журавлёв М.В., Киселев Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. –2010. 67. –С.107-116.
19. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых фупкций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. –2009. –17/2. –С.89-99.
20. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. –2013. –32. –С.184–186.
21. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. –2013. –2;56. –С.90-94.

INEQUALITIES OF STRICTLY POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik

Syktyvkar State University,
October Av., 55, Syktyvkar, 167001, Russia, e-mail: pevnyi@syktsu.ru
Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. On studying mathematical models problems are usually reduced to finite dimensional ones and it is necessary to prove their correctness, specially, to establish uniqueness and existence of solutions of linear systems with special matrices. In the paper to solve such problems, it is a class of strictly positive definite functions and some important inequalities are proved for them. Some applications of this functional class are proposed for proving correctness of models in the problem of signal approximations by integer shifts of Gaussians.

Key words: positive definite functions, Bochner's theorem, M.G.Krein's inequality, Gaussian, integer shifts.