MSC 35J25

# КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПЛОХИМИ УСЛОВИЯМИ СОГЛАСОВАНИЯ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

**В.И. Корзюк, И.С. Козловская**

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, Минск, Беларусь, e-mail: Korzyuk@bsu.by
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, e-mail: Kozlovskaja@bsu.by

**Ключевые слова:** классические решения, условия согласования, граничные задачи, дифференцируемость.

В последнее время при математическом моделировании в различных областях науки широко используются численные методы, при этом ослабло внимание к аналитическим исследованиям поставленных задач. Численные методы чаще всего базируются на предположениях существования классических решений этих задач, однако при одних и тех же выбранных граничных условиях без правильного выбора функций в этих условиях, удовлетворяющих так называемым условиям согласования, не будет существовать классического решения рассматриваемой задачи: решение не будет иметь ту гладкость во всей области его определения, которую предполагает применяемый в данном случае численный метод. Показывается влияние кроме правильного выбора граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными условий согласования для функций, которые задаются в качестве граничных условий.

В частности, на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе, доказывается, что решение или его производные терпят разрыв на определенном множестве внутри области задания уравнения, если отсутствуют полностью или частично условия согласования на заданные функции в граничных условиях и правую часть уравнения.

В области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ двух независимых переменных $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается волновое уравнение

$$(\partial_{tt} - a^2\partial_{xx})u(y,x) = f(t,x),\ (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где $a^2$ – положительное действительное число, $\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – частные производные по $t$ и $x$ второго порядка. К уравнению (1) на границе $\partial Q$ области $Q$ присоединяются начальные и граничные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \mu^{(1)}(t), \quad u(t,l) = \mu^{(2)}(t),\ t \in [0,\infty), \tag{3}$$

Функции $\varphi$, $\psi$, $\mu^{(i)}$, $i=1,2$, $f$ удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\varphi(0)-\mu^{(1)}(0)=\delta^{(1)},\quad \psi(0)-\mu^{(1)\prime}(0)=\delta^{(2)},\quad \mu^{(1)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(0)-f(0,0)=\delta^{(3)}, \tag{4}$$

$$\varphi(l)-\mu^{(2)}(0)=\sigma^{(1)},\quad \psi(l)-\mu^{(2)\prime}(0)=\sigma^{(2)},\quad \mu^{(2)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(l)-f(0,l)=\sigma^{(3)}, \tag{5}$$

где $\mu^{(i)\prime}$ и $\mu^{(i)\prime\prime}$ – производные функций $\mu^{(i)}$ первого и второго порядков, $i=1,2$, $\varphi''$ – производная второго порядка функции $\varphi$.

Отметим, что классическое решение задачи (1)-(3) получено в статьях [1,2] при некоторых более жестких условиях согласования. Кроме доказательства нарушения гладкости решения задачи (1)-(3) при невыполнении частично или полностью условий согласования (4), (5) построено по несколько другой схеме в отличие от [1, 2] классическое решение задачи (1)-(5).

Сначала рассмотрим однородное уравнение (**??**), т.е. уравнение

$$(\partial_{tt}-a^2\partial_{xx})u(y,x)=0,\ (t,x)\in Q, \tag{6}$$

Согласно [3, 4] общее решение уравнения (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы

$$u(t,x)=g^{(1)}(x-at)+g^{(2)}(x+at) \tag{7}$$

для любых функций $g^{(i)}:D\left(g^{(i)}\right)\ni z\to g^{(i)}(z)\in\mathbb{R}$ из класса $C^2$, где области определения $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$ и значения $g^{(i)}\left(x+(-1)^i t\right)$ определяются для любых $(t,x)\in\overline{Q}$, $\overline{Q}$ – замыкание области $Q$. Здесь для определенности считаем число $a>0$.

Решение задачи (6),(**??**), (**??**) заключается в определении функций $g^{(i)}$ $(i=1,2)$ через заданные функции. Это делается поэтапно. В работе также построено классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральными по времени граничными условиями специального вида, имеющим определенный физический смысл. Решение получено с помощью метода характеристик, предполагающего разбиение области на подобласти и решение своей начально-краевой задачи в каждой из подобластей.

В области $\Omega=\{0<t<\infty,\,0<x<l\}$ требуется определить функцию $u(x,t)\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0\quad \text{в }\Omega, \tag{6}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{7}$$

$$u(x,t)|_{x=0}=c_1\int\limits_0^t\left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+g_1(t),\quad t\ge 0, \tag{8}$$

$$u(x,t)|_{x=l} = c_2 \int_0^t \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_2(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $\varphi(x) \in C^2(0 \leq x \leq l)$, $\psi(x) \in C^1(0 \leq x \leq l)$, $g_1(t) \in C^2(0 \leq t < \infty)$, $g_2(t) \in C^2(0 \leq t < \infty)$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $c_1 = \text{const}$, $c_1 > 0$, $c_2 = \text{const}$, $c_2 > 0$.

## Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – 53, № 1. – С.45-49.

2. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2009. – 17, № 2. – С.23-34.

3. Корзюк В.И. Уравнения математической физики / Минск: Издательский центр БГУ, 2011. – 460 с.

4. Корзюк В.И., Козловская И.С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференциальные уравнения. – 2012. – 48, № 5. – С.700-709.

## CLASSICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS WITH BAD CONDITIONS OF GIVEN FUNCTIONS CONSISTENCY

**V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya**

Belarus State University,

Nezavisimosty Av., 4, Minsk, Belarus, e-mail: Korzyuk@bsu.by

**Key words:** classical solutions, consistency conditions, boundary problems, differentiability.