MSC 35L82

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, К.С. Халилов

Ферганский Государственный университет,
ул. Мураббийлар (19), Фергана, (150100), Узбекистан, e-mail: urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, интегральное условие, дробное дифференцирование.

В конечной односвязной области D плоскости xOy, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение $Lu = 0$ параболо-гиперболического типа, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - (2\beta/y)\, u_y, & (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \end{cases}$$

а $\beta, \lambda \in R$, причем $0 < \beta < (1/2)$.

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача H_1. Требуется найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{(2,1)}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$ удовлетворяющую уравнению $Lu = 0$ в области $D_1 \cup D_2$ и следующим условиям:

$$u(0,y) = \mu_1(y), \quad \int\limits_0^1 u(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 u(1,t)\,dt + \mu_2(y), \qquad 0 \le y \le 1; \qquad (1)$$

$$a(x)\, D^{1-\beta}_{0x} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x)\, D^{1-\beta}_{x1} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) +$$
$$+ c(x) \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = e(x), \qquad 0 < x < 1; \qquad (2)$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y), \qquad 0 < x < 1, \qquad (3)$$

где $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $e(x)$ - заданные непрерывные функции,

$$D^{1-\beta}_{0x} q(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} q(t)\,dt, \qquad D^{1-\beta}_{x1} q(x) = \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^1 (t-x)^{\beta-1} q(t)\,dt,$$

операторы дробного дифференцирования[1]. $\Gamma(z)$-гамма-функция Эйлера.

Приведем схему исследования поставленной задачи H_1. Пусть $u(x,y)$ - решение задачи H_1. Учитывая условие (3) и $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right)$, примем обозначения $u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x)$, $0 \le x \le 1$; $\lim\limits_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim\limits_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \nu(x)$, $0 < x < 1$ и предположим, что $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(2,\delta)}(0,1)$, $\nu(x) \in C^2(0,1)$, $[x(1-x)]^{2\beta} \nu(x) \in C[0,1]$,

$\delta > 0$. Тогда, функция $u(x,y)$ в области D_2, как решение видоизменённой задачи Коши для уравнения $L_2 u = 0$, представима в виде [1]

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(z)[t(1-t)]^{\beta-1} dt - \gamma_2 (-y)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu(z)\,[t(1-t)]^{-\beta} dt, \qquad (4)$$

где $z = x + y(1-2t)$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(1-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

Пользуясь формулой (4) и условием (2),как и в работе [1], находим

$$A(x)\,\nu(x) = \gamma a(x)(1-x)^{\beta} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) + \gamma b(x)\, x^{\beta} D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x) - g(x), \quad 0 < x < 1. \qquad (5)$$

Здесь

$$\gamma = 2^{2\beta}\Gamma(\beta + 1/2)\,\Gamma(-\beta + 1/2), \quad g(x) = \left[2^{1-2\beta}\Gamma(1-\beta)/\Gamma(1-2\beta)\right]\,[x(1-x)]^{\beta} e(x),$$

$$A(x) = (1-x)^{\beta} a(x) + x^{\beta} b(x) - 2\Big[(1-2\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\,\Gamma(-\beta+1/2)\Big]^{-1}[x(1-x)]^{\beta} c(x).$$

Из уравнения $L_1 u = 0$ и краевых условий (1),(2) при $y \to +0$ получим

$$\tau''(x) - \lambda^2 \tau(x) = \nu(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad (6)$$

$$\tau(0) = \mu_1(0), \qquad \int_0^1 \tau(x)\,dx = \mu_2(0). \qquad (7)$$

Следовательно, функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяют уравнениям (5),(6) и условиям (7). Доказано, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad a(x)\,b(x) \geq 0, \quad a(x)\,c(x) \leq 0, \quad b(x)\,c(x) \leq 0 \;\; x \in [0,1], \qquad (8)$$

$$a(x),\ b(x),\ c(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1),\ e(x) \in C^2(0,1),\ [x(1-x)]^{3\beta} e(x) \in C[0,1]. \quad (9)$$

Тогда задача $\{(5),(6),(7)\}$ *имеет единственное решение.*

Единственность решения задачи $\{(5),(6),(7)\}$ доказывается с использованием принципа экстремума для операторов $D_{0x}^{1-2\beta}$и $D_{x1}^{1-2\beta}$ [1], а существование решения- эквивалентным сведением рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

После того, как найдены функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из задачи $\{(5),(6),(7)\}$, решение задачи H_1 в области D_2 находится с помощью формулы (4), а в области D_1определяется как решение задачи об определении функции $u(x,y) \in C\left(\overline{D}_1\right) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1)$, удовлетворяющей уравнение$L_1 u = 0$ и условия (1), (2), $u(x,0) = \tau(x)$,$0 \leq x \leq 1$. Последняя задача исследуется, как и в работе [2].

Справедлива следующая основная

Теорема 2. *Пусть* $h_1(y), h_2(y) \in C[0,1]$ *и выполнены условия (8),(9). Тогда решение задачи* H_1 *существует и оно единственно.*

Замечание. Этим же методом можно исследовать задачу H_1 и в том случае, когда второе из условий (1) заменено условием $u(1,y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1$.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа/ Москва: Наука, 1985. – 304 с.

2. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – 6, №2. – С.339-349.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATION

A.K. Urinov, K.S. Khalilov

Fergana State University,
Murabbiylar (19), Fergana, (150100), Uzbekistan, e-mail: urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

Key words: parabolic-hyperbolic equation, integral condition, fractional differentiation.