MSC 35M10

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: g_alfira@mail.ru

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева-Бицадзе, тип уравнения, задача Дирихле, уравнение смешанного типа.

Для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y) | -1 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,y)$ с условиями:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(\bigcup_{i=1}^{4} D_i), \qquad Lu(x,y) \equiv 0, \ \ (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{4} D_i,$$

$$u(x,y)\big|_{x=1} = u(x,y)\big|_{x=-1} = 0, \ \ y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \ \ x \in [-1,1], \quad u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \ \ x \in [-1,1],$$

где $D_{1,2} = D \cap \{x > 0, \pm y > 0\}$, $D_{3,4} = D \cap \{x < 0, \pm y < 0\}$, φ и ψ – заданные функции.

Задача Дирихле для смешанного уравнения с одной линией изменения типа в прямоугольной области изучалась в работах [1, 2].

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя перпендикулярными линиями изменения типа изучается задача Дирихле в прямоугольной области и спектральным методом [3] доказаны теоремы единственности и существования решения.

Разделив переменные $u(x,y) = X(x)Y(y)$, относительно x получим спектральную задачу:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0, \quad X(0+) = X(0-), \quad X'(0+) = X'(0-), \quad X(1) = X(-1) = 0,$$

собственные функции которой имеют вид:

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0; \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0, \end{cases}$$

где $d = \pm\mu_k^2$ – собственные значения, μ_k являются корнями уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu$, для них справедлива асимптотическая формула: $\mu_k = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

Система $\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна на $[-1,1]$. Соответствующая биортогональная система имеет вид:

$$Z_k^{(1)}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x>0,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x<0;\end{cases}\qquad Z_k^{(2)}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x>0,\\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x<0.\end{cases}$$

Полнота системы $\{Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1,1]$ доказывается аналогично [4].

Теорема 1. *Если существует решение задачи Дирихле, то оно единственно только тогда, когда для всех* $k\in\mathbb{N}$

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=\cos(\mu_k\alpha)\operatorname{sh}(\mu_k\beta)+\sin(\mu_k\alpha)\operatorname{ch}(\mu_k\beta)\neq 0, \tag{2}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)=\operatorname{ch}(\mu_k\alpha)\sin(\mu_k\beta)+\operatorname{sh}(\mu_k\alpha)\cos(\mu_k\beta)\neq 0. \tag{3}$$

Лемма. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{N}$ *не равное числам* $4p-3$, $p\in\mathbb{N}$, *или* $\alpha=p/q\in\mathbb{Q}$, $p,q\in\mathbb{N}$, *НОД*$(p,q)=1$, *число* $q-p$ *не кратно 4. Тогда существуют постоянные* $C_0>0$ *и* $k_0\in\mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\geq C_0e^{\pi k\beta}.$$

При аналогичных α *и условиях на* β *справедлива оценка* $|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\geq\tilde{C}_0e^{\pi k\alpha}$.

Если выполнены оценки леммы и при $k\leq k_0$ условия (2), (3), то решение задачи Дирихле определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(1)}(y)\cdot X_k^{(1)}(x)+u_k^{(2)}(y)\cdot X_k^{(2)}(x),\ u_k^{(j)}(y)=\int_{-1}^{1}u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^1[-1,1]\cap C^4[-1,0]\cap C^4[0,1]$, $\varphi(-1)=\varphi(1)=\varphi''(-1)=\varphi''(1)=0$, $\psi(-1)=\psi(1)=\psi''(-1)=\psi''(1)=0$, $\varphi''(0+0)=-\varphi''(0-0)$, $\varphi'''(0+0)=-\varphi'''(0-0)$, *и выполнены оценки леммы. Тогда если при указанных в лемме* α *и* β *при всех* $k=\overline{1,k_0}$ *выполнены условия* (2) *и* (3), *то существует единственное решение задачи Дирихле и оно определяется рядом* (4).

Литература

1. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient // Ann. math. pure and appl. – 1963. – 62. – P.371-377.

2. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврептьева-Бицадзе в прямоугольной области –// Дифференц. уравнения. – 1978. – 14,№1. – С.136-139.

3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.

4. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, №3. – С.358-365.

DIRICHLET's PROBLEM OF LAVRENTIEV-BITSADZE'S EQUATION WITH TWO CURVES OF TYPE CHANGE IN RECTANGULAR DOMAIN

A.A. Gimaltdinova

Sterlitamak department of Bashkirian State University,
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: *g_alfira@mail.ru*

Key words: Lavrentiev-Bitsadze's equation, equation type, Dirichlet's problem, mixed type equation.