МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ
MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A HALF-PLANE

А.П. Солдатов, О.А. Тарасова
A. P. Soldatov, O. A.Tarasova

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University,85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com, tarasova_o@bsu.edu.ru

Ключевые слова: Система Ламе, упругость, изотропная среда, эллиптическая система.
Key words: The system of Lamé, elastic, isotropic medium, an elliptic system.

Аннотация. Рассмотрена смешанная плоской изотропной теории упругости в полуплоскости, когда на отрезках вещественной оси попеременно задаются либо вектор смещения, либо нормальная компонента тензора напряжений. Получена явная формула решения этой задачи, аналогичная известной формуле Келдыша – Седова для полуплоскости.

*Resume.*Considered mixed flat isotropic theory of elasticity in a half-plane, when the segments of the real axis are set alternately to either vector displacement or the normal component of the stress tensor. Obtain an explicit formula for the solution of this task is similar to the well-known formula of Keldysh – Sedov for the half plane.

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим в верхней полуплоскости $D=\{y>0\}$ систему Ламе [1.2] в изотропной среде

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(a_{12}+a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами

$$a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix},\qquad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix},$$

$$a_{12}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1-2\alpha_3\\ \alpha_3 & 0\end{pmatrix},\quad a_{21}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_3\\ \alpha_1-2\alpha_3 & 0\end{pmatrix},$$

где матричные элементы (модули упругости) подчинены условиям $\alpha_j>0,\ j=1,3$ и $\alpha_1>\alpha_3$.

Помимо вектора смещения $u=(u_1,u_2)$ упругая среда характеризуется тензором напряжений

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_3\\ \sigma_3 & \sigma_2\end{pmatrix},$$

столбцы $\sigma_{(1)},\sigma_{(2)}$ которого связан с u соотношениями

$$\sigma_{(i)}=a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y},\ i=1,2 \qquad (2)$$

составляющими содержание закона Гука.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия $\frac{\partial\sigma_{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{(2)}}{\partial y}=0$, которые совместно с (2) и приводят к системе Ламе (1).

Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции v. В соответствии с (1) эта функция определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

В терминах сопряженной функции равенства (2) можем переписать в форме

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Рассмотрим эллиптическую систему первого порядка специального вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ этой системы назовем функциями, аналитическими по Дуглису, или кратко, $J-$ аналитическими функциями. Прямая проверка показывает, что подстановка

$$\phi_1(x,y) = \psi_1(z) + y\psi_{2'}(z), \quad \phi_2(x,y) = \psi_2(z) \tag{4}$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между $J-$ аналитической вектор- функцией ϕ и вектор- функцией фψ переменной $z = x + iy$, аналитической в верхней полуплоскости D. Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi_1(z) = \phi_1(x,y) - y\phi_{2'}(x,y), \quad \psi_2(z) = \phi_2(x,y). \tag{5}$$

Согласно [3] любое решение u системы Ламе (1) и сопряженная к нему вектор- функция v в области D выражаются через $J-$ аналитическую функцию ϕ. Более точно, они представимы в виде

$$u = \mathrm{Re}\, b\phi, \quad v = \mathrm{Re}\, c\phi + \xi, \tag{6}$$

$\xi \in \mathbb{R}^2$, причем ϕ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Анализ полученных результатов

Матрицы b и c определяются равенствами

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -ж \end{pmatrix}, \quad c = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2i & ж-1 \\ 2 & (ж+1)i \end{pmatrix}, \quad ж = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}. \tag{7}$$

Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$, играющей роль границы для верхней полуплоскости D, множество F точек $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{2m}$. Пусть I^0 есть объединение отрезков $I_j^0 = [\tau_{2j-1}, \tau_{2j}]$, $1 \le j \le m$. Дополнение к $I^0 \setminus F$, которое обозначим I^1, также состоит из m отрезков $I_j^1 = [\tau_{2j}, \tau_{2j-1}]$, $1 \le j \le m$, из которых I_m^1 неограничен и имеет вид $(-\infty, \tau_1] \cup [\tau_{2m}, +\infty)$. Пусть еще F_0 множество точек τ_{2j} с четными номерами, которые служат правыми (левыми) концами отрезков, составляющих $I^0(I^1)$.

Смешанная задача S заключается в отыскании решения $u=(u_1,u_2)\in C(\overline{D})$ системы (1) по краевым условиям

$$u^+|_{I^0}=f^0,\quad \sigma^+_{(2)}|_{I^1}=g^1, \tag{8}$$

где $u^+(x)=u(x,0)$ означает граничное значение функции u и аналогичный смысл имеет это обозначение для второго столбца тензора напряжений σ. Правые части здесь $f^0\in C(I^0)$, $g^1\in C(I^1\setminus F)$ и, соответственно, решение u предполагается непрерывно дифференцируемым вплоть до граничного множества $I^1\setminus F$. Если f^1 -- первообразная функции $-g^1$, то силу (2) последнее краевое условие можем записать в форме $v^+=f^1+\chi$ с некоторой функцией χ, постоянной на каждом отрезке I^1_k, $1\le k\le m$. Таким образом, вместо (8) можем перейти к краевому условию

$$u^+|_{I^0}=f^0,\quad v^+|_{I^1}=f^1+\chi, \tag{9}$$

по отношению к u и сопряженной функции v. Конечно, вместе с u определению здесь подлежит и кусочно постоянная функция χ.

На основании (6) краевое условие (9) можем переписать в форме

$$\mathrm{Re}\, b\phi^+|_{I^0}=f^0,\quad \mathrm{Re}\, c\phi^+|_{I^1}=f^1+\chi, \tag{10}$$

по отношению к $J-$ аналитической функции ϕ. Поскольку при подстановке (4) граничные значения функций ϕ и ψ на прямой $\mathbb{R}$ совпадают, эта задача равносильна аналогичной задаче

$$\mathrm{Re}\, b\psi^+|_{I^0}=f^0,\quad \mathrm{Re}\, c\psi^+|_{I^1}=f^1+\chi, \tag{11}$$

для аналитической вектор-функции ψ.

Стандартным образом [4] задачу (11) можно свести к задаче линейного сопряжения на прямой $\mathbb{R}$. С этой целью продолжим ψ в нижнюю полуплоскость, полагая $\psi(z)=-\overline{\psi(\overline{z})}$, $\mathrm{Im}\, z<0$. Тогда краевое условие (11) перейдет в

$$\psi^+-G\psi^-=g \tag{12}$$

с данными

$$G(t)=\begin{cases} cb^{-1}\overline{b}\,\overline{c}^{-1}, & t\in I^0,\\ 1, & t\in I^1,\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases} 2cb^{-1}f^0(t), & t\in I^0,\\ 2[f^1(t)+\chi(t)], & t\in I^1.\end{cases}$$

Из (6) видно, что $d^{-1}(cb^{-1}\overline{b}\,\overline{c}^{-1})d=-\begin{pmatrix} æ & 0\\ 0 & æ^{-1}\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$.

Пользуясь этим соотношением, задачу (12)можно решить явно классическими методами [4], построив каноническую матрицу-функцию $Y(z)$. Возвращаясь от этого решения ψ к J-аналитической функции ϕ по формуле (5), приходим к соответствующему решению задачи (10). Последнее в свою очередь с учетом (6) приводит к решению исходной задачи. Каноническая матрица- функция Y строится следующим образом.

Рассмотрим аналитические вне I^0 аналитические функции

$$Y_1(z) = X(z)e^{iL(z)}, \quad Y_2(z) = X(z)e^{-iL(z)},$$

где

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-\tau_{2k}}{z-\tau_{2k-1}}\right)^{i\alpha}, \ \alpha = \frac{\ln ж}{2\pi}, \quad L(z) = -\frac{\ln ж}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{z-\tau_{2k}}{z-\tau_{2k-1}}\right),$$

и ветви логарифмов определяется условием $\ln 1 = 0$. В этих обозначениях

$$Y = d\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ iY_1 & -iY_2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица- функция Y является канонической для задачи (11) и ее терминах можем сформулировать центральный результат о разрешимости задачи (10).

Теорема 1. Пусть $f^j \in H(I^j)$, $j = 0,1$ и

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} (cb^{-1})f^0(t), & t \in I^0, \\ f^1(t) + \chi(t), & t \in I^1. \end{cases}$$

Тогда задача (10) относительно пары (ψ,χ) однозначно разрешима в классе $H(\overline{D})$, причем кусочно – постоянная функция χ на I^1 определяется из соотношений

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(Y^+)^{-1}(t)\tilde{f}(t)dt}{(t+i)^s} = 0, \quad 1 \le s \le m.$$

а решение ψ дается формулой

$$\psi(z) = \frac{Y(z)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{(Y^+)^{-1}(t)\tilde{f}(t)dt}{t-z}, \quad z \in D.$$

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
3. Солдатов А.П., К теории анизотропной плоской теории упругости, Современная математика. Фундаментальные направления, 2015.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

References

1. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. M., 1966.
2. Kupradze V.D. Potential methods in elasticity theory. M.: Physmathgiz, 1963.
3. Soldatov A. P., The theory of anisotropic plane theory of elasticity, Contemporary mathematics. Fundamental directions, 2015,
4. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. M.: Science, 1968.