



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FILTRATION IN A DIFFERENT GEOMETRIES POROUS MEDIA

О.В. Гальцев, О.А. Гальцева
O.V. Galtsev, O.A. Galtseva

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru; galtseva@bsu.edu.ru*

Ключевые слова: задача со свободной границей, фильтрация жидкости, упругая пористая среда
Key words: free boundary problem, fluid filtration, elastic porous media

Аннотация. Настоящая работа посвящена двум моделям фильтрации двух несмешивающихся нежимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в поро-упругом пространстве. В работе приведены результаты численной аппроксимации задачи для вязко-упругой фильтрации точными микроскопическими моделями со свободной границей для структур порового пространства различной геометрии.

Resume. This paper is devoted two filtration models of two immiscible incompressible fluids with a different densities, separated by a free boundary in the pore-elastic space. There are results of numerical approximation for viscoelastic filtration by microscopic model with a free boundary for a different structure of the pore space geometry in this article.

Введение

В работе рассматривается развитие возмущений при рэлей-тейлоровской неустойчивости в неоднородной жидкости, занимающей поры в твердом скелете. Помимо несомненного теоретического интереса, эта задача имеет большое значение для ряда важных практических проблем, например, при изучении вытеснения одной жидкости другой в пористом грунте.

Большой вклад в развитие обсуждаемой проблемы внесли работы Ферми [7]. В них рассматривается развитие тейлоровской неустойчивости на границе жидкость – вакуум в линейном и нелинейном случаях, а также на границе двух жидкостей: тяжелая – легкая.

При изучении этого эффекта прослеживаются следующие ярко выраженные стадии: линейная, промежуточная, регулярная, асимптотическая и турбулентная [1], [2]. Рэлей-Тейлоровская неустойчивость наиболее исследована для случая плоской поверхности раздела и стремящегося к бесконечности отношения плотностей тяжелой и легкой жидкостей. Линейная стадия подробно изучена в классических работах Рэля, Тейлора и Льюиса [3],[4],[5], регулярная асимптотическая – в работах Биркгофа [6], в [8] развита феноменологическая теория турбулентной стадии, а в [2] высказаны некоторые соображения о механизме ее образования.

Однако аналитического математического аппарата для анализа в целом рэлей-тейлоровской неустойчивости в идеальной жидкости недостаточно. Экспериментальные же исследования весьма трудоемки. Наиболее полная информация может быть получена из численных расчетов.

Постановка задачи

Задача совместного движения двух жидкостей рассматривалось в области $\Omega^\pm(t)$, где движение первой жидкости в области $\Omega^+(t)$ с постоянной вязкостью μ^+ и постоянной плотностью ρ_f^+ описывается системой уравнений Стокса

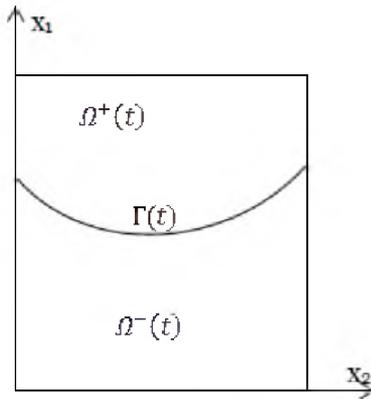


Рис.1. Область $\Omega^\pm(t)$.

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u}^+ - \nabla p + \rho^+ \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad (1)$$

для микроскопической скорости \mathbf{u}^+ и давления p_f^+ первой жидкости.

Соответственно, движение второй жидкости в области $\Omega^-(t)$ с постоянной вязкостью μ^- и постоянной плотностью ρ_f^- описывается аналогичной системой уравнений Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u}^- - \nabla p + \rho^- \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (2)$$

для микроскопической скорости \mathbf{u}^- и давления p_f^- первой жидкости.

где $\alpha_\mu = \frac{2\mu}{Lg\rho_0}$, L – характерный размер рассматриваемой области,

\mathbf{g} – сила тяжести, μ есть вязкость жидкости.

На свободной границе $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$, разделяющей обе жидкости, давления и нормальные скорости непрерывны:

$$p^+ = p^-, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n} = U_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (4)$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к границе $\Gamma(t)$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ и U_n есть скорость границы $\Gamma(t)$ в направлении нормали \mathbf{n} в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$.

Граница $\Gamma(t)$ есть материальная поверхность, то есть во время движения эта поверхность состоит из одних и тех же материальных точек. Этот факт позволяет сформулировать понятие слабого решения задачи. А именно, определим давление p неоднородной жидкости

$$p = p^+, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \text{ и } p = p^-, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (5)$$

и скорости \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \text{ и } \mathbf{u} = \mathbf{u}^- \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t). \quad (6)$$

Тогда неизвестные функции \mathbf{u} , p и ρ будут решениями системы уравнений Стокса

$$\operatorname{div}(\alpha_\mu \nabla \cdot \mathbf{u} - p\mathbf{l}) + \rho \mathbf{g} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$



и уравнение переноса

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8)$$

Первое уравнение (уравнение Стокса) понимается в обычном смысле почти всюду в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а второе уравнение (уравнение неразрывности) понимается в смысле теории распределения, как интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \, dx dt = 0$$

для произвольной гладкой функции ψ . Аналогично, понимается уравнение переноса (8).

А именно, используя равенство

$$\varphi \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho \varphi) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \rho \varphi \nabla \cdot \mathbf{u},$$

и уравнение неразрывности получим после умножения уравнения (8) на произвольную гладкую финитную в области Ω_T функцию φ и интегрирования по частям интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \rho_f \frac{d\varphi}{dt} \, dx dt = 0,$$

которое выполняется для всех таких функций φ .

Проблема дополняется однородным граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial \Omega, \quad t > 0, \quad (9)$$

где \mathbf{n} есть нормальный вектор к границе S , и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

где

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^+ = \Omega^+(0)$$

и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^- = \Omega^-(0).$$

В качестве численного метода реализации поставленной задачи, был выбран метод крупных частиц. Основная его идея состоит в расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физическим процессам.

Моделируемая среда заменяется системой из жидких частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. То есть исследуемая область покрывается равномерной по x и y сеткой ячеек

$$\Omega_f = \left(\begin{array}{l} x_{i+1/2} = (i+1/2)h, \Delta x > 0, i = 0, 1, \dots, L; (L+1)\Delta x = X_{\max} \\ y_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta y, h > 0, j = 0, 1, \dots, M; (M+1)\Delta y = Y_{\max} \end{array} \right)$$

где $\Delta y, \Delta x$ – размер шагов сетки, L и M – число ячеек сетки соответственно в направлении x, y .

Здесь используется "шахматная" сетка, то есть координаты сеточных функций разнесены в пространстве, как показано на рис.2. Это дает возможность наглядно интерпретировать каждую



ячейку как элемент объема среды, который характеризуется рассчитываемыми в его центре давлением p_{ij} и плотностью ρ_{ij} .

Следует отметить еще одно преимущество таких шаблонов. Поскольку давление рассчитывается в центре ячейки и предполагается, что рассматриваются только согласованные сетки, то есть для ячейки, смежной с границей $\partial\Omega$, сторона этой ячейки в точности совпадает с частью $\partial\Omega$, то при расчетах нет необходимости знать условия для давления на $\partial\Omega$.

Стационарное решение задачи получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений состоит из многократного повторения шагов по времени.

Расчет каждого временного шага в свою очередь разбивается на три этапа:

- Пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением жидкости; на этом этапе на фиксированной эйлеровой сетке определяются промежуточные значения искомых параметров потока;
- Вычисляется плотность потока массы при движении жидкости через границы эйлеровой ячейки;
- Определяются окончательные значения параметров потока для каждой ячейки рассматриваемой области течения.

По существу, как это и принято в методах частиц, на первом этапе рассматривается изменение за время скорости элементарного объема жидкости (крупной частицы), заключенного внутри эйлеровой ячейки. На втором этапе моделируется движение частиц через границы эйлеровых ячеек и происходит перераспределение частиц по пространству. На третьем этапе определяется за время изменение параметров потока в элементарной эйлеровой ячейке, полученной возвращением объема в исходное положение.

Таким образом, эволюция всей системы за время Δt осуществляется путем следующего расщепления: вначале изучается изменение состояния подсистем, находящихся в ячейках – крупных частиц, в предположении их замороженности или неподвижности, а затем рассматривается смещение всех частиц пропорционально их скорости и времени Δt без изменения внутреннего состояния подсистемы с последующим пересчетом расчетной сетки в начальное состояние.

Основная трудность при численном решении системы уравнений (1) – (8) связана с расчетом поля давления. Первый значительный успех в преодолении отмеченной трудности был достигнут благодаря использованию идеи искусственной сжимаемости [10]. Существо этой идеи

состоит во введении в уравнение неразрывности дополнительного члена вида $(\frac{\partial}{\partial t})(p + u^2/2)$. В результате получается модифицированная система уравнений вида

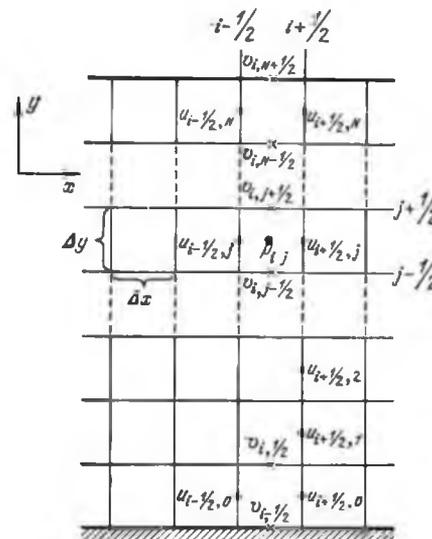


Рис.2. Шаблон расчетной сетки.



$$\alpha_{\mu} \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

В нашем случае была использована классическая схема расщепления, которая и лежит в основе метода частиц в ячейках. Согласно этой схеме рассчитывается промежуточное поле скоростей \tilde{U} из уравнения

$$\alpha_{\mu} \Delta \tilde{U} - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \quad (11)$$

затем ищется давление из уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{U} = 0, \quad (12)$$

найденное значение снова подставляем в исходное уравнение, тем самым найдя откорректированное значение скорости с учетом давления в расчетной ячейке. И, соответственно, на последнем шаге находим значение плотности на следующем временном шаге из уравнения переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Таким образом, на первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется лишь за счет конвекции, диффузии и внешних сил (12). Далее, на втором этапе проводится расчет полей давления. На этом этапе учитывается, что в силу уравнения неразрывности на каждом временном слое должно выполняться условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. И на третьем этапе, подставляя в исходное уравнение (12) значения промежуточных скоростей, с учетом давления и, решая уравнение переноса, находятся "окончательные" (для данного временного слоя) поля скоростей и плотности.

Для случая декартовой системы координат и равномерной сетки двумерная разностная схема имеет вид:

$$\alpha_{\mu} \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{h^2} + \alpha_{\mu} \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{h^2} + \rho_{i+1/2,j} \mathbf{e}_1 \quad (13)$$

$$\alpha_{\mu} \frac{v_{i+1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{h^2} + \alpha_{\mu} \frac{v_{i,j+3/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{h^2} + \rho_{i,j+1/2} \mathbf{e}_2 \quad (14)$$

$$\alpha_{\mu} \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\tau} = - \frac{(\rho u)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2,j}^{n+1}}{h} - \frac{(\rho v)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\rho v)_{i,j-1/2}^{n+1}}{h}, \quad (15)$$

При замене дифференциальной задачи конечно-разностным представлением особое внимание следует уделять аппроксимации граничных условий, так как конкретная аппроксимация последних влияет на точность метода, устойчивость схемы, а также на скорость сходимости.

В случае, когда боковые стенки – твердая поверхность, то условие непротекания представляется в виде

$$u_{-1/2,j} = 0, \quad (16)$$



а условие прилипания – в виде

$$v_{i-1/2,j+1/2} = 0. \quad)$$

Очень важна и устойчивость разностной схемы. Для выведенной нами разностной схемы характерна периодическая неустойчивость. По мере приближения к искомому (устойчивому) решению градиенты параметров потока в областях гладкого течения становятся малы. Вместе с ними становятся малыми вязкостное давление, в результате чего в этих областях вновь начинает прогрессировать неустойчивость. когда она разовьется настолько, что градиенты станут велики вязкостные члены первого дифференциального приближения опять начнут ее демпфировать, и так далее, то есть возникают автоколебания (что и позволило смоделировать вязкостные эффекты течения).

Двумерные расчеты рэлей-тейлоровской неустойчивости показали хорошие совпадения с результатами [11]. В ходе вычислений было выявлено, что на процесс в целом влияют три параметра: плотность верхней (ρ^+) и нижней (ρ^-) жидкости, а точнее их отношение $\delta = \rho^+/\rho^-$, вязкости μ^+ и μ^- жидкостей и размер пор ϵ . Изменяя эти параметры можно получить различные сценарии протекания рэлей-тейлоровской неустойчивости.

При увеличении количества капилляров четкой границы раздела двух жидкостей не наблюдается. При этом становится различимой переходная фаза $\rho^- \leq \rho \leq \rho^+$.

Заметим, что при задании начального возмущения в расчетах со сжимаемыми средами важно везде соблюдать условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (за исключением поверхности раздела), иначе возникнут возмущения, которые могут исказить картину развития неустойчивости Рэлей-Тейлора.

Во втором случае нами рассматривается фильтрация жидкости в деформируемом упругом скелете. При этом предполагается, что область, занятая жидкостью, та же самая что и в первом случае и состоит из периодической структуры пор размера ϵ (в безразмерных переменных). Более точно Ω_f – область, занятая жидкостью, Ω_s – упругий скелет.

Следуя схеме, предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером [12], будем описывать совместное движение упругой и жидкой компонент на микроскопическом уровне системой, состоящей из уравнений Стокса и Ламэ, дополненных соответствующими граничными условиями на общей границе "жидкость – упругий скелет". А именно, движение слабо сжимаемой вязкой жидкости в области описывается стационарными уравнениями Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \nabla p_f + \rho_f \mathbf{g} = 0, \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

для безразмерных микроскопических перемещений \mathbf{w}_f и давления p_f в жидкости, а движение упругого скелета в Ω_s описывается стационарными уравнениями Ламэ

$$\alpha_\lambda \Delta \mathbf{w}_s - \nabla p_s + \rho_s \mathbf{g} = 0, \nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0, \quad (19)$$



для безразмерных микроскопических перемещений \mathbf{w}_s и давления в твердом скелете p_s . На общей границе Γ между жидкостью и твердым скелетом вектор перемещений и давления удовлетворяют условию непрерывности нормальных напряжений

$$(\alpha_\mu \mathbf{D}(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}) - p_f \mathbf{l}) \mathbf{n} = (\alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbf{l}) \mathbf{n}, \quad (20)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к Γ .

В (20) $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ – симметричная часть матрицы, \mathbf{l} – единичная матрица, $\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\rho_0}$, ρ_s –

безразмерная плотность твердого скелета, λ – постоянная Ламэ для твердой компоненты.

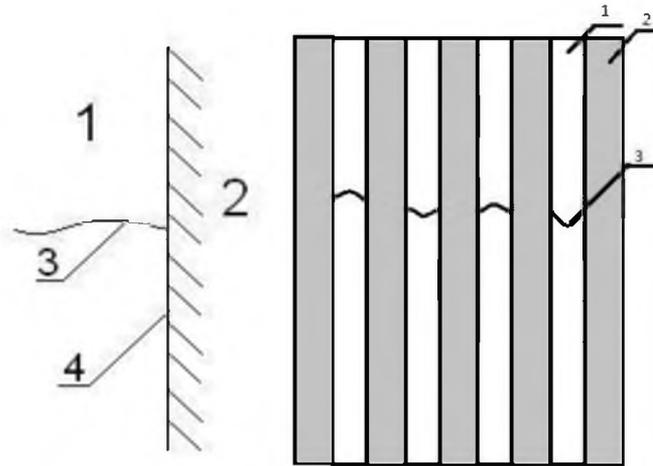


Рис. 3. 1-Область занятая жидкостью (Ω_f), 2 – упругий скелет (Ω_s), 3 – граница раздела верхней и нижней жидкостей (Γ), 4 – граница раздела жидкости и упругого скелета (S')

Для выбранной нами геометрии порового пространства к известным из первого случая параметрам, влияющим на процесс фильтрации, добавляется коэффициент упругости твердого скелета λ , который сильно влияет на процесс фильтрации. При заданном значении λ отношение δ должно находиться в определенном диапазоне, чтобы обеспечить изменение границы раздела жидкостей. В противном случае изменения положения жидкостей относительно друг друга не наблюдается. И наоборот, варьируя значение λ можно добиться устойчивого состояния двух фаз.

Уравнение совместного движения жидкости и упругого скелета будет иметь вид:

$$\nabla \cdot (\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}) - p) + \rho^\varepsilon = 0, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

где χ – характеристическая функция.

Для численного моделирования вязко-упругой фильтрации на микроскопическом уровне была рассмотрена задача со свободной границей совместного движения в периодических порах



размера ε двух несмешивающихся жидкостей и упругого скелета был разработан и апробирован алгоритм нахождения всех неизвестных переменных, состоящий из пяти главных этапов:

- На первом этапе расчетов решалось уравнение Ламэ (20) с заданными начальными условиями перемещения \mathbf{W}_s и давления p_s и условием на границе $\mathbf{W}|_s = 0$

- Зная заданные значения \mathbf{W}_s и p_s , находим нормальное напряжение на границе раздела жидкой и твердой части S :

$$(\alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{w}_s) - p_s) \mathbf{l} = \mathbf{A}, \quad (22)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{w})$ – симметричная часть матрицы $\nabla \mathbf{w}$, \mathbf{l} – единичная матрица, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе S , $\alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\rho_s}$, L – характерный размер рассматриваемой области, λ – коэффициент Ламэ.

- На следующем шаге решалась система уравнений Стокса (19) с граничным условием на S

$$\mathbf{A} = (\alpha_\mu \mathbf{D}(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}) - p_f) \mathbf{l} \quad (23)$$

Это граничное условие предполагает, что на общей границе жидкости и упругого скелета вектор перемещения и давления удовлетворяет условию непрерывности нормальных напряжений.

- Найденное значение \mathbf{u} подставляем в уравнение переноса

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_f = 0,$$

откуда и находится значение плотности для следующего временного шага.

- Так как скорость и давление в жидкой части известно, то в силу условия непрерывности нормальных напряжений определяем \mathbf{W}_s и p_s на следующем временном шаге. Цикл повторяется.

Учитывая поведение жидкости на границе с упругим скелетом и, решая систему уравнений (18)–(20), получим результат, из которого видно изменение положения двух жидкостей относительно друг друга.

При расчете движения жидкостей в порах использовались разностные схемы, описанные выше. Принцип построения разностной схемы для метода частиц в ячейках для уравнения Ламэ имеет ту же структуру, что и для системы уравнений Стокса.

Особого внимания заслуживает конечно-разностная аппроксимация граничных условий на поверхности «жидкость – упругий скелет», так как они существенно отличаются от рассмотренных ранее.

В результате численного моделирования этой модельной задачи получили картину, совершенно отличающуюся от случая "абсолютно твердый скелет".

Сравнивая их визуально, при усреднении, то есть при увеличении количества капилляров четкой границы раздела двух жидкостей не наблюдается. При этом становится различимой переходная фаза, которую можно легко заметить на рисунках, приведенных ниже. Если же



учитывать упругие свойства твердого скелета, то перемещение более тяжелой жидкости вниз происходит при наличии свободной поверхности.

При расчетах обеих задач начальные значения брались одинаковые для оценки скорости протекания процесса фильтрации:

$$\rho_f^+ = 1000, \rho_f^- = 500, \mu = 1, \tau = 0.02, g = 9.81, L = 100, \rho_s = 2000, \lambda = 0.5$$

Расчеты для одного капилляра размера ε проводились в области масштаба 1×200 . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ (ε – характерный размер поры) доказано, что существует единственное решение задачи, в которой граница раздела двух жидкостей есть липшицева поверхность [15].

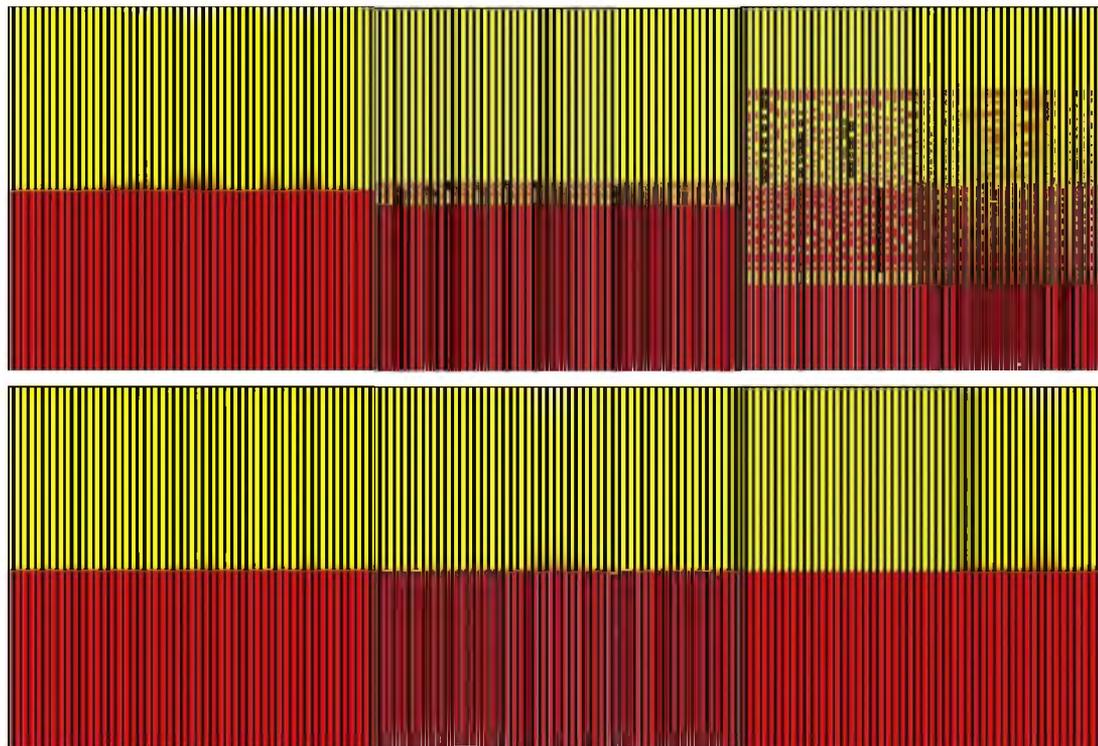


Рис.4. Сравнение результатов случая абсолютно твердого и упругого скелета в момент времени $t = 10, t = 110, t = 750$, слева – абсолютно твердый скелет, справа – упругий скелет.

Для случая, в котором учитывается перемещение твердого скелета также характерно условие, что важно везде соблюдать условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (за исключением поверхности раздела), иначе возникнут возмущения, которые могут исказить картину развития неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Также анализ поведения жидкостей при перемешивании проводился на геометрии в виде прямоугольной области Ω , заполненной неподвижными квадратами Ω_s – твердый скелет и жидкостью Ω_f .

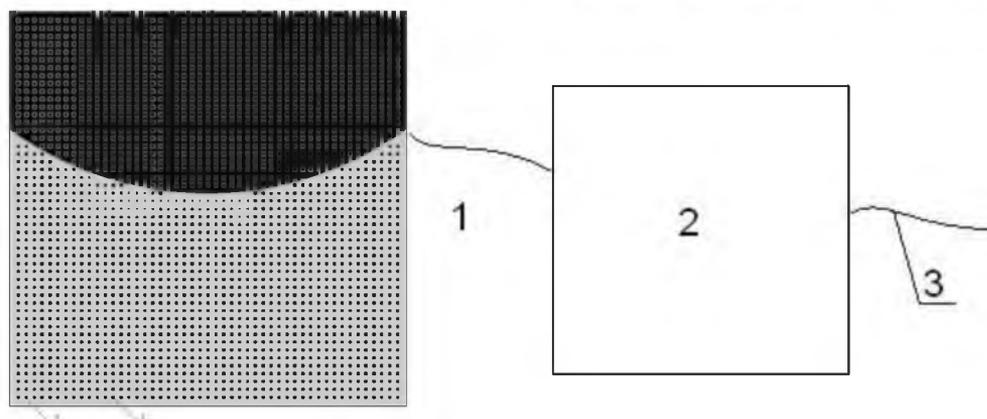


Рис. 5. 1 – Область занятая жидкостью (Ω_f), 2 – твердый скелет (Ω_s),
3 – граница раздела верхней и нижней жидкостей (Γ)

Для указанной геометрии расчетной области автором рассматривалось два случая взаимодействия жидкости и твердого скелета (по аналогии с уже рассмотренной геометрией в виде изолированных капилляров):

- Абсолютно твердый скелет.
- Упругий скелет.

Существует много работ, посвященных как симметричному обтеканию твердых тел, так и несимметричными течениями. Например симметричное обтекание кругового цилиндра описано в [13]. Как известно, при вязком обтекании даже симметричных тел симметрия течения часто нарушается, а в нашем случае оно изначально несимметрично в виду заданной геометрии раздела жидкостей.

В работах Гущина В.А. и Белоцерковского С.О. была проведена огромная работа в этом направлении для задач обтекания конечных тел вязкой жидкостью, что позволило выявить основные эффекты явления и оценить влияние краевых условий.

На рис.6 приведено векторное поле скоростей в зоне огибания элемента твердого скелета.

Можно хорошо видеть, что при большом времени процесса завихрений в области предположительного срыва потока не наблюдается.

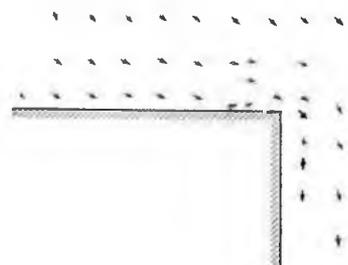


Рис.6. Поле скоростей в зоне огибания тела.

При решении поставленной задачи был использован метод расщепления. Разностная схема аналогична той, которая использовалась в случае с геометрией в виде изолированных капилляров. Огромное влияние на форму раздела двух жидкостей влияют граничные условия. Оставив те же граничные условия, что и в предыдущих случаях, на рисунке легко увидеть развитие срывных течений, которые приводят к "рассыпанию" более тяжелой жидкости. При этом Физические свойства жидкостей

выбирались такие же, как и в случае геометрии в виде изолированных капилляров.



Картина развития неустойчивости Рэля-Тейлора меняется кардинально, если применить упомянутый выше алгоритм решения задачи с учетом упругих свойств скелета. При перемешивании жидкостей свободная граница раздела двух фаз сохраняется.

В ходе численного моделирования было выявлено, что:

При фиксированном значении коэффициента упругости λ (для твердой компоненты) и при разности плотностей жидкостей ($\delta = \rho^+ / \rho^-$) происходит очень медленное перемешивания двух фаз.

- При $\delta \rightarrow \infty$ скорость фильтрации увеличивается.

- При фиксированном δ и при изменении значения λ видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ (т.е. $\lambda > 1 \cdot 10^4$) процесс перемешивания протекает более медленно.

Таким образом, основываясь на первых двух фактах, чем меньше δ (при фиксированном λ), тем ниже скорость процесса перемешивания. А третье утверждение говорит о том, что чем тверже скелет, тем медленнее протекает процесс перемешивания.

На рис.7 приведено сравнение двух случаев развития рэлей-тейлоровской неустойчивости для данной геометрии.

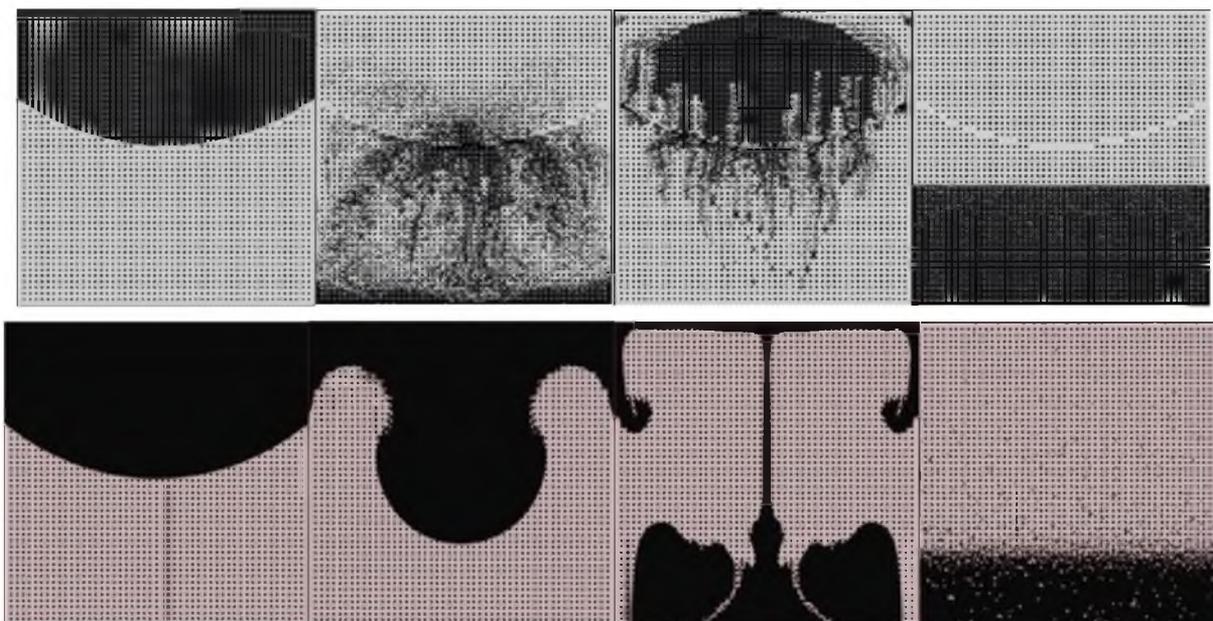


Рис.7. Сравнение результатов случая абсолютно твердого и упругого скелета в момент времени, сверху – абсолютно твердый скелет, снизу – упругий скелет.

Список литературы

1. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора. – В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, с. 68–94.
2. Inogamov N.A., Turbulent phase of the Rayleigh-Taylor instability. – Черноголовка: Институт теоретич. физ. им.
3. Lord Rayleigh, Theory of sound. – N.Y.: Dover Publications Inc., 1984. V.2
4. Taylor G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. I. – Proc. Roy. Soc., 1950, 201, Ser. A, №1065, p. 192–196
5. Lewis D.G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. II. – Proc. Roy. Soc., 1950, 202, Ser. A, №1068, p. 81–96
6. Birkhoff G., Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-1982. Los Alamos, 1955



7. Ферми Э. Научные труды. – М.: Наука, 1972. Т.2
8. Беленьких С.З., Фрадкин Е.С. Теория турбулентного перемешивания. – Тр. ФИАН СССР, 1965, 29, с. 207–238.
9. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 520 с.
10. Владимирова Н.Н., Кузнецова Б.Г., Яненко Н.Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. – В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1996, с. 186–192.
11. Daly B.J., Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. – Phys. Fluids, 1967, 10, №2, p.297–307.
12. Burridge R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure, – Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, (1981) 1140–1146.
13. Гушин В.А., Щенников В.В., Об одном численном методе решения уравнений Навье – Стокса. – ЖВМ и МФ, 1974, 14, №2, с. 512 – 520.
14. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B. V., A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413–424
15. Гальцев О.В., Неустойчивость Рэлея-Тейлора в задаче Маскета со свободной границей. – Научные ведомости БелГУ, 2012, №5, с. 70 – 87.

References

1. Birkhoff G. Neustoychivost Helmholtz Teylora.- Proc.: Hydrodynamic instability. М.: Mir, 1964, p. 68–94.
2. Inogamov N.A., Turbulent phase of the Rayleigh-Taylor instability.–Черноголовка: Институт теоретич. физ. им.
3. Lord Rayleigh, Theory of sound. – N.Y.:Dover Publications Inc., 1984. V.2
4. Taylor G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. I. – Proc. Roy. Soc., 1950, 201, Ser. A, №1065, p. 192–196
5. Lewis D.G., The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. II. – Proc. Roy. Soc., 1950, 202, Ser. A, №1068, p. 81–96
6. Birkhoff G., Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-1982. Los Alamos, 1955
7. Fermi E. Nauchnye trudy.- М.: Science, 1972. Vol.2
8. SZ Belenky, Fradkin E.S. Teoriya turbulent mixing. – Tr. FIAN, 1965, 29, pp. 207–238.
9. Belotserkovskii O.M. Chislennoe modeling in continuum mechanics sred.- М.: Nauka. Glavnaya revision of physical and mathematical literature, p. 1984.–520
10. Vladimirov NN Kuznetsov, BL, Yanenka NN Numerical calculations of symmetrical flat plate flow of a viscous incompressible fluid. – In the book.: Some problems of computational and applied mathematics. Nauka, Novosibirsk, 1996, p. 186–192.
11. Daly B.J., Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. – Phys. Fluids, 1967, 10, №2, p.297–307.
12. Burridge R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure, – Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, (1981) 1140–1146.
13. VA Gushchin, Shennikov VV, On a numerical method for solving the Navier – Stokes equations. – Zh, 1974, 14, №2, p. 512 – 520.
14. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B. V., A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413–424
15. Maltsev, OV, Rayleigh-Taylor instability in Muskat problem with a free boundary. – Scientific statements BSU, 2012, №5, p. 70 – 87.