УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

BOUNDARY PROBLEM FOR THE MODIFIED EQUATION MOISTURE WITH FRACTIONAL TIME DERIVATIVE IN MULTIDIMENSIONAL DOMAINS

М.А. Керефов[1], С.Х. Геккиева[2]
M.A. Korefov, S.H. Gekkiyeva

[1]Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
Kabardino-Balkarian State University, 173 Chernyshevsky St, Nalchik, 3600004, Russia
[2]Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360004, г Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 a Shortanova St, Nalchik, 3600004, Russia
E-mail: kerefov@mail.ru; gekkieva_s@mail.ru

Ключевые слова: модифицированное уравнение влагопереноса, производная дробного порядка, априорная оценка.
Key words: modified equation of moisture transfer, a derivative of fractional order, a priori estimate.

Аннотация. В данной работе рассматриваются краевые задачи первого и третьего рода для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области. С помощью энергетических неравенств получены априорные оценки для решений рассматриваемых задач.
Resume. In this paper we consider boundary value problems of the first and third order for the modified equation of moisture transfer with a fractional derivative with respect to time in the multidimensional field. With energy inequalities, a priori estimates for solutions to the problems.

Введение

Перенос влаги в почво-грунтах приводит к модифицированному уравнению диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right), \tag{1}$$

которое предполагает сплошность среды. Уравнению (1) при различных краевых условиях посвящены работы [1], [7]-[10].

Исходя из того, что почва является примером фрактальной среды, где имеет место зависимость потока $q=q(x,t)$ от структуры (геометрии) фрактала возникает возможность обобщения уравнения (1) с помощью введения дробной по времени производной. Подобное обобщение можно сделать, определяя поток по формуле [6]

$$q(x,t)=-D_{0t}^{\alpha}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right), \tag{2}$$

где k, α - положительные величины, α зависит от структуры и хаусдорфовской размерности фрактала, D_{0t}^{α} – оператор дробного дифференцирования [5].

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет производную по t порядка α, $(0<\alpha\le 1)$, по x до второго порядка. Тогда из (2) и уравнения неразрывности $\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial t}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)$$

Подействовав на обе части последнего уравнения оператором дробного дифференцирования порядка α, получим обобщенное уравнение влагопереноса с регуляризованной производной [2], [3] в виде:

$$D_{0t}^{1-\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) + \frac{u(x,0)}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}} .$$

Априорная оценка для решения первой краевой задачи в многомерной области

В цилиндре $Q_T = G \times (0,T]$, где $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_h): 0 < x_k < l_k, k = 1,2,\ldots,p\}$ – p мерный параллелепипед с границей Γ рассмотрим задачу

$$D_{0t}^{\alpha}u = Lu + f(x,y), \quad x \in G,\ 0 < t \le T \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t \le 0 \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G} \tag{5}$$

где

$$D_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \ 0 < \alpha < 1,$$

$$Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k u, \ L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + A\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - q_k(x,t)u,$$

$$b_k \ge c_k > 0, \ A > 0, \ q_k \ge m > 0 .$$

Единственность решения первой краевой задачи для уравнения (3) реализуем методом априорных оценок. Для чего умножим уравнение (3) скалярно на u:

$$(D_{0t}^{\alpha}u, u) = \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k} + Au_{x_k x_k t} - q_k u\right), u\right) + (f,u), \tag{6}$$

где $(u,v) = \int_G uv dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Правую часть тождества (6), с учетом граничных условий перепишем следующим образом. Так как

$$\int_0^{l_k}\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k} u dx_k = b_k u_{x_k}(x_1,\ldots x_{k-1}, l_k, x_{k+1},\ldots,x_p,t)\, u(x_1,\ldots x_{k-1}, l_k, x_{k+1},\ldots,x_p,t) -$$

$$-u_{x_k}(x_1,\ldots x_{k-1}, 0, x_{k+1},\ldots x_p,t)\, u(x_1,\ldots x_{k-1}, 0, x_{k+1},\ldots x_p,t) - \int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 dx_k = -\int_0^{l_k} b_k u_{x_k}^2 dx_k ,$$

то

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k}, u\right) = -\sum_{k=1}^{p}\int_G b_k u_{x_k}^2 dx_k ,$$

$$A\int_0^{l_k} u_{x_k x_k t} u dx_k = Au_{x_k t}u\Big|_0^{l_k} - A\int_0^{l_k} u_{x_k t}u_{x_k} dx_k = -\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_k} u_{x_k}^2 dx_k ,$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left(Au_{x_k x_k t},u\right)=-A\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{p}\int_G u_{x_k}^2\,dx_k\ ,$$

$$(qu,u)\geq m\|u\|_0^2.$$

Для оценки (f,u) воспользуемся неравенством Коши-Буняковского $|(u,v)|\leq\|u\|\|v\|$ и ε-неравенством Юнга $|ab|\leq\varepsilon a^2+\frac{1}{4\varepsilon}b^2$:

$$(f,u)\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2\ ,$$

где $\varepsilon=const>0$.

Подставляя полученные соотношения в (6), получим

$$(D_{0t}^{\alpha}u,u)+\sum_{k=1}^{p}\int_G b_k u_{x_k}^2\,dx_k+A\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{p}\int_G u_{x_k}^2\,dx_k+m\|u\|_0^2\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2$$

или в силу $b_k\geq c_k>0$ имеем

$$(D_{0t}^{\alpha}u,u)+c\|u_x\|_0^2+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|_0^2+m\|u\|_0^2\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2, \tag{7}$$

где $\|u_x\|_0^2=\int_G u_x^2dx\ =\sum_{k=1}^{p}\int_G u_{x_k}^2\,dx_k$.

Проинтегрируем полученное в результате неравенство от 0 до t и учтем положительность оператора дробного дифференцирования $\int_0^t(D_{0t}^{\alpha}u,u)d\tau\geq 0$, доказанную для функции одной переменной в [4]. Тогда получим

$$c\|u_x\|_{2,Q_t}^2+\frac{A}{2}\|u_x\|_0^2+\upsilon_1\|u\|_{2,Q_t}^2\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{2,Q_t}^2+\frac{A}{2}\left\|u_0{}'(x)\right\|_0^2.$$

$$\|u_x\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|u(x,t)\|_0^2\,d\tau\ ,\ \upsilon_1=m-\varepsilon\ .$$

При достаточно малом ε, вводя обозначение $\upsilon=\min\left(\frac{A}{2},c,\upsilon_1\right)$, находим

$$\|u_x\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2+\|u\|_{2,Q_t}^2\leq M\left(\|f\|_{2,Q_t}^2+\left\|u_0{}'(x)\right\|_0^2\right),$$

где $M=const>0$, зависящая от коэффициентов уравнения и размеров области Q_{t_0}, $\|u\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|u(x,t)\|_0^2\,d\tau$.

Из этой априорной оценки следует единственность решения задачи (3)-(5).

Априорная оценка для решения третьей краевой задачи в многомерной области

В цилиндре $Q_T=G\times(0,T]$, рассмотрим третью краевую задачу:

$$D_{0t}^{\alpha}u=Lu+f(x,y),\ \ x\in G,\ 0<t\leq T\ , \tag{3}$$

$$\begin{cases} b_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}+A\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\beta_{-k}u-\mu_{-k}(t), & x_k=0, \\ -b_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}+A\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\beta_{+k}u-\mu_{+k}(t), & x_k=l_k, \end{cases} \tag{8}$$

$$u(x,0)=0, \tag{9}$$

$$\beta_{-k},\beta_{+k}\ge 0,\quad \beta_{-k}+\beta_{+k}>0,\quad k=1,2,\dots,p,\ b_k\ge c_k>0,\ A>0,\ q_k\ge m>0.$$

Умножим уравнение (3) скалярно на u:

$$(D_{0t}^{\alpha}u,u)=(\sum_{k=1}^{p}\left(\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k}+Au_{x_kx_kt}-q_k u\right)u)+(f,u). \tag{10}$$

Правую часть тождества (10) перепишем следующим образом:

$$\int_0^{l_k}\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k}u\,dx_k=-\int_0^{l_k}b_k u_{x_k}^2\,dx_k$$

$$A\int_0^{l_k}u_{x_kx_kt}u\,dx_k=Au_{x_kt}\left(x_1,\dots x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots x_p,t\right)u\left(x_1,\dots x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots x_p,t\right)-$$
$$-Au_{x_kt}\left(x_1,\dots x_{k-1},0,x_{k+1},\dots x_p,t\right)u\left(x_1,\dots x_{k-1},0,x_{k+1},\dots x_p,t\right)-A\int_0^{l_k}u_{x_kt}u_{x_k}\,dx_k.$$

С учетом граничных условий (8), имеем

$$\int_0^{l_k}\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k}u\,dx_k+A\int_0^{l_k}u_{x_kx_kt}u\,dx_k=b_k u_{x_k}\left(x_1,\dots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)u\left(x_1,\dots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)+$$
$$+Au_{x_kt}\left(x_1,\dots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)u\left(x_1,\dots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)-$$
$$-Au_{x_kt}\left(x_1,\dots,x_{k-1},0,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)u\left(x_1,\dots,x_{k-1},0,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)-$$
$$-b_k u_{x_k}\left(x_1,\dots,x_{k-1},0,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)u\left(x_1,\dots,x_{k-1},0,x_{k+1},\dots,x_p,t\right)-$$
$$-\int_0^{l_k}b_k u_{ч_л}^2 u\,dx_k+A\int_0^{l_k}u_{x_kt}u_{ч_л}\,dx_k.$$

Отсюда

$$\int_G\left(b_k u_{x_k}\right)_{x_k}u\,dx_k+A\int_G u_{x_kx_kt}u\,dx_k=$$
$$=\int_{G'}\beta_{+k}u^2\left(x_1,\dots x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots x_p,t\right)dx'+\int_{G'}\mu_{+k}u\left(x_1,\dots x_{k-1},0,x_{k+1},\dots x_p,t\right)dx'-$$
$$-\int_{G'}\beta_{-k}u^2\left(x_1,\dots x_{k-1},l_k,x_{k+1},\dots x_p,t\right)dx'+\int_{G'}\mu_{-k}u\left(x_1,\dots x_{k-1},0,x_{k+1},\dots x_p,t\right)dx'-$$

$$-\int_G b_k u_{ч_л}^2 u\,dx+A\int_G u_{x_kt}u_{ч_л}\,dx,$$

где $dx'=dx_1\dots dx_{k-1}dx_{k+1}\dots dx_p$, $G'=\left\{x=\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right):0<x_\alpha<l_\alpha,\alpha=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,p\right\}$;

$$(qu,u)\ge m\|u\|_0^2;$$

$$(f,u)\le\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2,$$

где $\varepsilon=const>0$.

Подставляя полученные соотношения в (10), получим

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u,u\right)\leq\sum_{k=1}^{p}\left(\int_{G'}\mu_{+k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'+\int_{G'}\mu_{-k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'-\right.$$

$$-\int_{G'}\beta_{+k}u^2\left(x_1,\ldots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'+\int_{G'}\beta_{-k}u^2\left(x_1,\ldots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'-$$

$$\left.-\int_G b_k u_{x_k}^2dx-A\int_G u_{x_k t}u_{x_k}dx\right)-m\|u\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2,$$

или в силу $b_k\geq c_k>0$,

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u,u\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+c\|u_x\|_0^2+m\|u\|_0^2\leq\sum_{k=1}^{p}\left(\int_{G'}\mu_{+k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'+\right.$$

$$\left.+\int_{G'}\mu_{-k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'\right)+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u\|_0^2, \tag{11}$$

где $c=\min\limits_{1\leq k\leq p}c_k$.

Суммы, стоящие в правой части неравенства (11), оценим следующим образом

$$\mu_{-k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)\leq\frac{1}{2}\mu_{-k}^2+\frac{1}{2}u^2\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\mu_{-k}^2+\frac{1}{2}\left[\varepsilon\|u_{x_k}\|_{L_2(0,l_k)}^2+c_\varepsilon\|u\|_{L_2(0,l_k)}^2\right],$$

где $\varepsilon=const>0,\ \ c_\varepsilon=const$, зависящая от ε.

Откуда имеем

$$\int_{G'}\mu_{-k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'\leq\frac{1}{2}\int_{G'}\mu_{-k}^2dx'+\frac{1}{2}\int_{G'}\|u_{x_k}\|_{L_2(0,l_k)}^2dx'+$$

$$+\frac{c_\varepsilon}{2}\int_{G'}\|u\|_{L_2(0,l_k)}^2dx'\leq\frac{1}{2l_k}\int_G\mu_{-k}^2dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_G u_{x_k}^2dx+\frac{c_\varepsilon}{2}\int_G u^2dx. \tag{12}$$

Аналогично, оценим

$$\int_{G'}\mu_{+k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'\leq\frac{1}{2l_k}\int_G\mu_{+k}^2dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_G u_{x_k}^2dx+\frac{c_\varepsilon}{2}\int_G u^2dx \tag{13}$$

Сложим (12) и (13) и просуммируем полученное соотношение по $к$ от 1 до p

$$\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\mu_{-k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'+\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\mu_{+k}u\left(x_1,\ldots,x_{k-1},l_k,x_{k+1},\ldots,x_p,t\right)dx'\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2l_k}\int_G\left(\mu_{-k}^2+\mu_{+k}^2\right)dx+\varepsilon\|u_x\|_0^2+c_\varepsilon p\|u\|_0^2.$$

Подставляя полученное неравенство в тождество (11), с учетом положительности оператора дробного дифференцирования, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\nu_1\|u_x\|_0^2+\nu_2\|u\|_0^2\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2l_k}\left(\|\mu_{-k}\|_0^2+\|\mu_{+k}\|_0^2\right), \tag{14}$$

где

$$\nu_1 = c - \varepsilon, \quad \nu_2 = m - (\varepsilon + c_\varepsilon p).$$

Проинтегрируем полученное в результате неравенство (14) от 0 до t

$$\|u(x,t)\|_0^2 + 2\nu_1 \|u_x\|_{2,Q_t}^2 + 2\nu_2 \|u\|_{2,Q_t}^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{2,Q_t}^2 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{l_k}\left(\|\mu_{-k}\|_{2,Q_t}^2 + \|\mu_{+k}\|_{2,Q_t}^2\right)$$

или

$$\|u\|_{2,Q_t}^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|u_x\|_0^2 \le M(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \int_0^t (\mu_{-k}^2(\tau) + \mu_{+k}^2(\tau))d\tau\right).$$

Из этой априорной оценки следует единственность решения третьей краевой задачи (3), (8), (9).

Заключение

В работе исследованы краевые задачи первого и третьего рода для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной Римана-Лиувилля в многомерной области. С помощью энергетических неравенств получены априорные оценки для решений рассматриваемых задач.

Список литературы

1. Керефов М.А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Нальчик, 2000. –75 с.
2. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1990. Т. 26, №4. С. 660–670.
3. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1989. Т. 25, №8. С. 1359–1368.
4. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче для уравнения $sign|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференц. уравнения, 1976. Т. 12, №1. С. 79–88.
5. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение.Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. – 299 с.
6. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады АМАН, 1996. Т. 2, №6. С. 43–45.
7. Шхануков М.Х. Исследование краевых задач для уравнения третьего порядка методом функции Римана // Сообщение АН ГССР, 1983. С. 241–246.
8. Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задачах для уравнения третьего порядка // ДАН СССР, 1982. Т. 265, №6. С. 1327–1330.
9. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, №4. С. 689–699.
10. Янгарбер В.А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // ЖПМиМФ, 1967. №1. С. 247–254.

References

1. Kerefov M.A. Boundary Value Problems for moisture modified equation with fractional derivative with respect to time: Dis. ... Cand. Sci. Sciences. – Nalchik, 2000. -75 p.
2. Kochubei A.N. Diffusion fractional // Differ. equation. 1990. V. 26. №4. Pp 660-670.
3. Kochubei A.N. The Cauchy problem for evolution equations of fractional order // Differ. equation. 1989. Vol. 25. №8. Pp 1359-1368.
4. Kumykova S.K. On a boundary problem for the equation // Differ. Equation, 1976. V. 12. №1. Pp 79-88.

5. Nahushev A.M. Elements of fractional calculus and their application. – Nalchik Univ KBSC RAS, 2000. – 299 p.

6. Shogenov V.H., Kumykova SK Shhanukov-Lafishev MH Generalized transport equations and fractional // Reports of AMAN, 1996. Vol. 2. №6. Pp 43-45.

7. Shhanukov M.H. Investigation of boundary problems for an equation of the third order by the Riemann function // Message Academy of the GSPC, 1983. Pp 241–246.

8. Shhanukov M.H. On a method of solving boundary value problems for a third-order equation // Dokl, 1982. Vol. 265, №6. Pp 1327-1330.

9. Shhanukov M.H. On some boundary value problems for the equations of the third poryadka. occurring in modeling of fluid flow in porous media // Differ. equation, 1982. V. 18. №4. Pp 689-699.

10. Yangarber V.A. On a mixed problem for the modified equation // ZhPMiMF moisture, 1967. №1. Pp 247–254.