



## О НОВОМ КЛАССЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОЧНЫХ ЛИНИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

**О.М. ПИГНАСТЫЙ**

*Национальный  
Технический  
Университет "ХПИ"*

*e-mail:  
pom7@bk.ru*

В статье обсуждается введенный автором (2003 г.) класс моделей производственных систем с поточным способом организации производства, широко используемый в настоящее время для построения эффективных систем управления производственными линиями. Модели класса, определяющие поведение параметров производственной линии с помощью уравнений в частных производных, получили название PDE-моделей производственных систем, в последнее десятилетие успешно использованы для описания квазистатических, так и некоторых неустойчивых переходных процессов.

Ключевые слова: PDE-модель, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, система управления, балансовые уравнения, производственной линии, уравнение состояния, дискретно-событийная, модель, теория массового обслуживания, модель жидкости, Clearing- функция, квазистатический процесс, переходный процесс, стохастический процесс.

### Введение

Мировые тенденции развития производственных систем в разных отраслях промышленности требуют повышения гибкости производственных линий. Функционирование промышленного предприятия в условиях неопределенности и неустойчивости внешней среды и потребность в регулярных изменениях номенклатуры выпускаемой продукции обуславливают необходимость построения эффективной системы управления предприятием, разработки новых математических моделей производственных линий [1-6]. Производство в условиях современного рынка достаточно быстро меняет ассортимент, качество и количество выпускаемой продукции [6, с. 12], функционирует в неустойчивых переходных режимах. Снижение себестоимости продукции достигается не традиционным увеличением выпуска продукции, как в случае установившегося производственного процесса, а в результате синхронизации материальных потоков вдоль технологического маршрута. Характерной чертой развития современного промышленного производства является то, что длительность цикла производства занимает существенную часть жизненного цикла изделия. При длительности производственного цикла в несколько месяцев для предприятий, например, с поточным методом организации производства полупроводниковой продукции жизненный цикл изделий не превышает одного года [5], [6, с. 51]. Это приводит к тому, что производственные линии значительную часть времени функционирует в переходном неустойчивом режиме. В связи с этим при проектировании систем управления производственными линиями в последнее десятилетие особо актуальной стала задача построения моделей управления для переходных неустойчивых режимов производства. Актуальность задачи настолько высока, что ведущие мировые предприятия (Intel [5]) создали экспериментальные лаборатории по исследованию переходных неустойчивых режимов.

*Таблица 1*

**Основные параметры производственных линий**

Наименование параметра	Значение	Источник
Кол-во техн. операций, единиц техн. оборудования	$M=150..1500$ шт.	[5, с. 4589]
Кол-во изделий в незавершенном производстве	$N=104..105$ шт.	[7, с. 242]
Кол-во производимых номенклатур изделий	$K=1..10$ шт.	[8, с. 940]
Продолжительность жизненного цикла изделий	12 мес.	[5, с. 4589]
Длительность производственного цикла	$Td=3..6$ мес.	[5, с. 4589]
Время принятия управленческого решения	0,5..1.0 час	[9, с. 7]

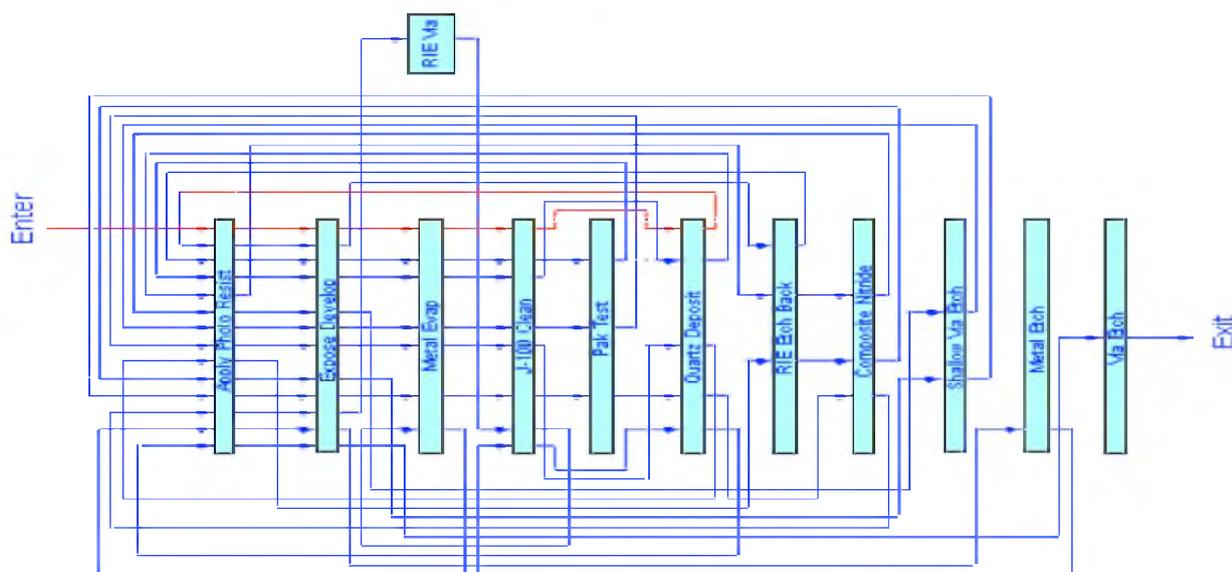


Рис. 1. Структура производственной линии по изготовлению полупроводников [7]

Процесс управления современным многопоточным производством усложняется тем, что производственные линии предприятий являются многономенклатурными, состоят из значительного количества технологических операций, использующих для обработки изделий множество разных видов технологических ресурсов, содержат в незавершенном производстве большое число распределенных вдоль технологического маршрута предметов труда (Табл. № 1). Технологические маршруты изделий разных номенклатур пересекаются, используют для выполнения технологических операций используется одно и то же оборудование, требуя расстановки приоритетов обработки и потребления ресурсов [2].

Дальнейшее развития теории систем управления потоковыми параметрами производственных линий для неустановившихся переходных режимов привело к тому, что в последнее десятилетие были разработаны качественно новые типы моделей, сочетающие самосогласованные предметно-технологическое на микроуровне и потоковое на макроуровне описания производственной линии [1]. Опыт построения моделей физических систем, состоящих из множества объектов, подсказывает, что дальнейшее развитие теории моделей производственных систем может быть основано на статистическом подходе [11, 12], фундаментом которого является механизм стохастического воздействия оборудования на предмет труда и коллективного взаимодействия предметов труда между собой, и феноменологическом, позволяющем установить основные закономерности технологических явлений [2-5] на основе наблюдений и статистики без использования модельных представлений [1, 12] о характере взаимодействия предметов труда и оборудования. Общие закономерности большинства установившихся технологических процессов известны. Разным технологическим процессам соответствуют разные уравнения состояния [2-5]. Определенные с помощью обработки статистических данных уравнения состояния являются фундаментом феноменологического подхода построения квазистатических моделей производственных линий. Однако, представление переходного неустановившегося производственного процесса последовательной цепочкой квазистатических равновесных уравнений состояния [2-5] приводит к значительной погрешности. В общем виде уравнения состояний могут быть получены в рамках статистического подхода, который позволяет однозначно связать макроскопические потоковые характеристики технологического процесса с микроскопическими предметно-технологическими параметрами достаточно большого количества предметов труда [1, 12].

Цель исследования настоящей статьи – обосновать концептуальные положения и теоретические основы построения континуальных моделей производственных линий для переходных и установившихся режимов.



### Построение единой теории производственных линий

Наличие однообразных задач планирования и управления производством привело исследователей к идее создания единой теории производственных систем. Graves S.C. (1986) [13], Karmarkar U.S. (1989) [14] предложили использовать в качестве основных параметров состояния производственных линий объем незавершенного производства (WIP: work in process)  $W$ , пропускную способность (capacity, throughput)  $[\chi]_l$  и длительность производственного цикла (lead time)  $T_d$ . Корректно определенное Karmarkar U.S. (1989) [14] уравнение состояния производственной линии  $[\chi]_l = \Phi(W)$ , получившее название clearing-функции, задавало для устойчивых установившихся производственных процессов мгновенную связь между пропускной способностью  $[\chi]_l$ , производственным циклом  $T_d$  и объемом незавершенного производства  $W$ .

Clearing-функция может быть определена для группы машин, оборудования, производственной линий, одного или нескольких заводов, включенных в единый производственный процесс. Clearing-функция (Fixed Capacity)

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = const \tag{1}$$

ставит фиксированную границу выпуска продукции, предполагая мгновенное наращивание мощности производства. Constant Proportion Clearing-функция (Graves S.C., 1986, [13])

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = a \cdot W, \quad a = const \tag{2}$$

предполагает фиксированное время выхода производства на полную мощность, а при наличии ограничения выпуска продукции для промежутка планирования  $\Delta t_i$ , известна как комбинированная clearing-функция (combined, Karmarkar U.S., 1989) [14]:

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = a \cdot W \leq \Phi_{max}, \quad a = const. \tag{3}$$

Важный класс составляют нелинейные clearing-функции, используемые для построения однопродуктовых моделей производственных систем, функциональная форма которых для простых случаев описания поточной линии производственной системы определена как:

а) TQ-модель M/M/1 очереди для стационарного состояния (рис. 2) [21] (2009)

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = \frac{\mu \cdot W}{1 + W}; \tag{4}$$

б) модель фундаментальной диаграммы трафика для стационарного состояния

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = \mu \cdot W - W^2, \tag{5}$$

в) двухмоментная модель G/M/1 очереди для стационарного состояния (Mehdi J., 1991) [22, с. 350]:

$$W = \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{6}$$

где  $c_a^2$  и  $c_s^2$  характеризуют среднеквадратичное отклонение поступления требований на изготовления изделий и времени их обработки,  $\mu$  – темп обработки предметов труда,  $\lambda$  – интенсивность поступления предметов труда на первую технологическую операцию.

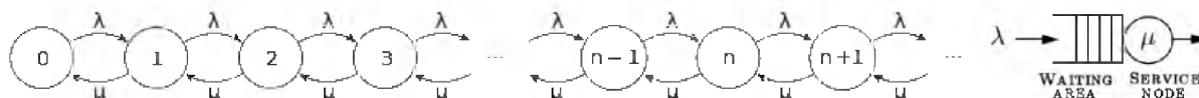


Рис. 2. Схема M/M/1-модели очереди поточной линии производственной системы

Модель G/M/1 очереди для стационарного состояния (6) является развитием модели (4) для описания движения предметов труда по технологическому маршруту с



последовательным расположением технологического оборудования. Устойчивое состояние для модели (1.10) обеспечивается при выполнении условия  $\rho = (\lambda/\mu) < 1$  [23, с. 6]. При  $\lambda \rightarrow \mu$  межоперационные заделы становятся бесконечно большими,  $W \rightarrow \infty$ , а при  $\lambda > \mu$  уравнение (6) не может быть использовано, т.к. при его выводе предполагалось  $\rho = (\lambda/\mu) < 1$ . Решение (6) относительно  $\rho = (\lambda/\mu) < 1$  может быть представлено в виде:

$$\rho = \frac{\sqrt{(W+1)^2 + 4W(c^2 - 1)} - (W+1)}{2(c^2 - 1)}, \quad \text{при} \quad c = \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} > 1, \quad (6)$$

При  $c \rightarrow 1$  модель M/M/1 очереди (4) является предельным случаем модели (6) G/M/1:

$$\lim_{c \rightarrow 1} \rho = \frac{W}{(W+1)}, \quad \lim_{c \rightarrow 1} [\chi]_{CL} = \frac{\mu \cdot W}{1+W} \quad (7)$$

Asmundsson J.M [21] предложил распределенные АС-функции (allocated clearing function) для моделирования многопродуктовых производственных систем. АС-функции предполагают модели, в которых производится совокупный продукт, агрегирующий в себе используемые технологические ресурсы для производства отдельных продуктов. Альтернативный подход заключается в представлении clearing-функции производственной системы в виде суммы clearing-функций, описывающих выпуск отдельного продукта. Экспериментальные данные свидетельствуют об удовлетворительных результатах использования АС-функций для продуктов, схожих по характеру потребления ресурсов. Интенсивности потребления ресурсов при этом выражаются в единицах времени обработки. Однако, если модели переноса технологических ресурсов для каждой номенклатуры предметов труда являются сложными, использование АС-функций не позволяет удовлетворительно описать производственные процессы. Selçuk B., Fransoo J.C., Gok A.G. (2007) аппроксимировали clearing-функцию кусочно-линейной функцией, что позволило использовать для оптимизации параметров производственной системы аппарат линейного программирования.

Clearing-функция может быть получена как аналитически так и численно с использованием стационарных или переходных TQ-моделей, DES-моделей, Fluid-моделей производственных систем или определена эмпирически. Selçuk, B., Fransoo J.C., Gok A.G. (2007) представили методику построения переходных clearing-функций аналитически. В связи с тем, что оперативная информация как о выпуске продукции, так и о состоянии незавершенного производства на предприятии является закрытой, то в большинстве исследований для построения clearing-функции вместо эмпирических данных используется TQ-, DES- и Fluid-модели. Исключением являются работы Haeussler S., Missbauer H. (2012), в которых для построения clearing-функции применены полученные с производственной линии цифровые носители. Kasar N. (2012) использовал для построения clearing-функции оптимизированные параметры производственной линии. Обширные вычислительные эксперименты, связанных с расчетом параметров поточных линий по производству полупроводниковых изделий компании Intel, показали хорошее приближение расчетных и экспериментальных данных для установившихся процессов [22].

Для вывода уравнение состояния использовано множество моделей, из которых следует выделить основные типы моделей и их комбинации: модели массового обслуживания (TQ-model) [15], дискретно-событийные модели (DES-model) [16], модели жидкости (fluid-model) [17]. Каждый тип имеет преимущества, но ни один не подходил в полной мере для моделирования как установившихся, так и переходных процессов работы производственной системы [2-4, 9].

**Модели теории массового обслуживания** (TQ-model) (рис. 3) используются для описания производственных линии в установившемся режиме [15]. Применение TQ-моделей для переходных режимов приводит к чрезмерному усложнению задачи. Существенным ограничением их применения является то, что современные производственные линии состоят из большого числа технологических операций. Как



правило, используются одномоментные модели теории массового обслуживания. Двухмоментные модели теории массового обслуживания, учитывающие дисперсию параметров обработки предметов труда, для описания производственных линий практически не встречаются в связи их сложностью построения. Следующим ограничением для применения TQ-model является то обстоятельство, что основные формулы получены для установившихся режимов ( $t \rightarrow \infty$ ), что автоматически подразумевает выполнение неравенства  $\lambda < \mu$  (рис. 4.), где  $\lambda$  – интенсивность поступления предметов труда на обработку;  $\mu$  – интенсивность обработки предметов труда. В действительности, большинства производственных линий с конечным производственным циклом справедливо неравенство  $\lambda \geq \mu$ , что не позволяет использовать хорошо разработанный аппарат теории массового обслуживания для установившихся процессов. Решение указанных проблем приводит к высокой размерности задачи, громоздким вычислениям, требует значительных вычислительных ресурсов.

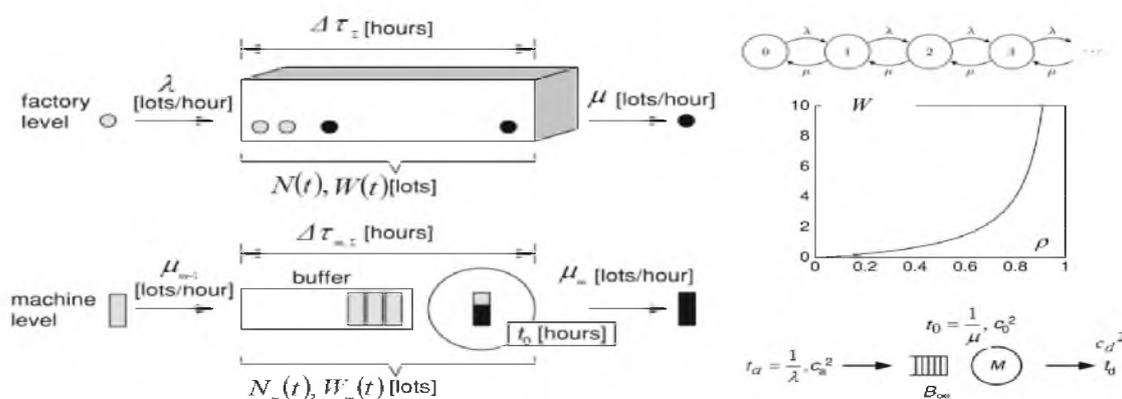


Рис. 3. Базовые модели теории массового обслуживания

**Дискретно-событийные модели** (DES-модели) удачно применены для описания работы поточных линий в переходном и стационарном режиме, содержащих малое количество технологических операций и обрабатывающих партии предметов труда небольших размеров. Требуемое процессорное время для расчета параметров производственной линии для партии деталей  $N=10^4 \cdot 10^5$  шт. и 100 технологических операций при миллионе имитаций [8, с. 242] составляет несколько дней, что делает невозможным использования DES-модели при проектировании систем управления производственными линиями. Существенным ограничением использования DES-моделей является сложность построения аналитических зависимостей между входными и выходными данными производственной линии для указанного количества технологических операций и размера партии предметов труда. Значительные вычислительные ресурсы необходимы для реализации алгоритмов генерации случайных чисел с заданным законом распределения параметров обработки предмета труда. Особое внимание следует уделить вопросам устойчивости вычислительных схем. Объем испытаний, необходимый для получения оценок наблюдаемой величины с заданной степенью точности зависит от вида закона распределения случайной величины, корреляции элементов выборки, наличия и длительности переходного режима функционирования моделируемой системы. Недостатком DES-модели является медленная сходимость выборочных средних значений к истинным. На достоверность результатов влияет выбор генератора псевдослучайных чисел и зависимость результатов численного эксперимента от плана проведения эксперимента [20, с. 16]. Большое внимание при анализе результатов численных экспериментов уделяется оценке соответствия дискретно-событийной модели реальной производственной линии с использованием статистических критериев.

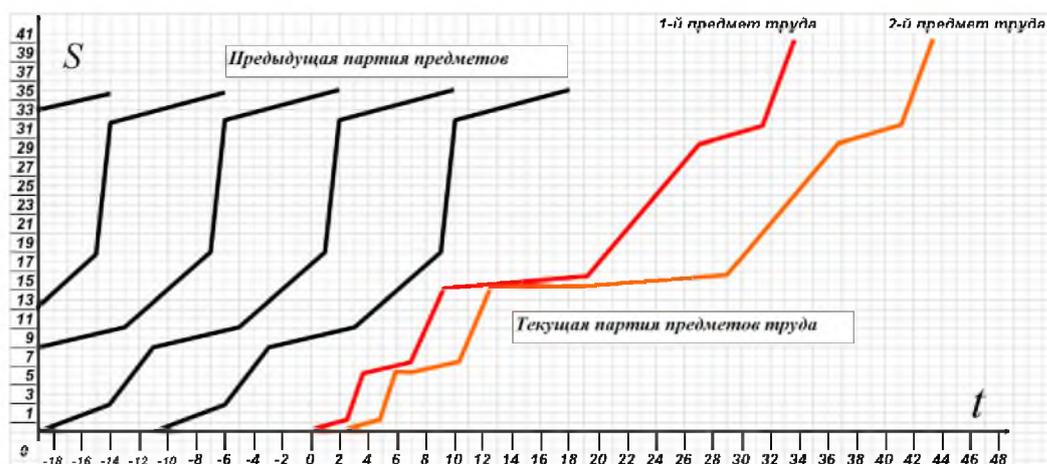


Рис. 4. Базовые дискретно-событийные модели

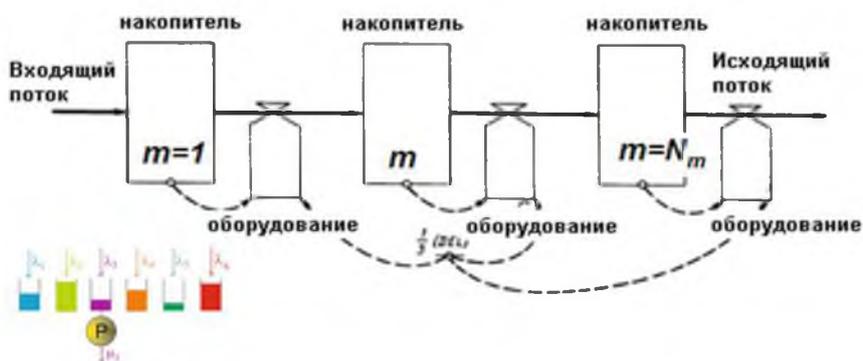


Рис. 5. Концептуальное представление модели жидкости (Форрестер Дж., 1961 [18])

**Дискретные и непрерывные жидкостные модели** производственных линий (Fluid-модели) ориентированы на малое количество технологических операций и линейные стационарные решения [16, 17]. Основное применение нашли при изучении переходных режимов работы производственной линии. Повышение количества технологических операций приводит к увеличению размерности системы дифференциальных уравнений, что значительно усложняет вычисления. Основная сложность построения Fluid-моделей заключается в выводе уравнений состояния для параметров производственной линии [17]. В подавляющем большинстве случаев Fluid-модели представлены одномоментным уравнением переноса, дополненным квазистатическим уравнением состояния. В отличие от DES-моделей они менее пригодны для описания стохастических производственных процессов [7].

Предложенный Кармаркаром (Karmarkar U.S) механизм clearing-функций позволил упорядочить процесс описания производственных линий, выделив основные потоковые параметры, которые являются общими для разных типов моделей. Однако, clearing-функции унаследовали недостатки:

- малая эффективность при описании производственных линий, состоящих из большого количества разнообразного технологического оборудования (случай  $M \gg 1$ );
- сложность построения многомоментных моделей (2-х моментных);
- сложность построения многоресурсных и многопродуктовых моделей;
- сложность описания переходных режимов работы линии. Используются для описания квазистатических производственных систем;
- сложность моделирования межоперационного состояния линии, которыми обладали существующие TQ -, DES-, Fluid-модели, положенные в основу их построения.



Для устранения противоречий необходим новый тип моделей, который с одной стороны был бы лишен указанных недостатков, а с другой стороны обладал бы преимуществами используемых моделей.

### Развитие теории производственных линий

В последнее десятилетие для проектирования производственных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model). Введенный в [1] (2003) новый в класс моделей объединил преимущества TQ-моделей, DES-моделей и Fluid-моделей, что значительно расширило возможности проектирования систем управления производственными линиями. PDE-модели позволили учесть влияние внутренних факторов производства на пропускную способность поточной линии с учетом ограничений, которые определяются максимальной производительностью оборудования и емкостью накопителя [1-5]. Существенным преимуществом PDE-моделей является то, что они подробно позволили описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не требуют значительных вычислительных ресурсов. При построении PDE-моделей выделилось два подхода: статистический (Пигнастый О.М, Азаренков Н.А., Ходусов В.Д., Демущкий В.П. [1, 12]) и феноменологический (Arnbruster D., Berg R.A., Lefebber E., Ringhofer C., Rooda J., [2-5]). Основным уравнением PDE-модели при феноменологическом описании является уравнение сохранения количества предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки



Рис. 6. Использование DES-,TQ- и Fluid-моделей в качестве уравнений состояния для замыкания балансовых уравнений PDE-моделей

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx, \quad x \in [0, 1] \quad (8)$$

где  $x$  – технологическая позиция предмета труда в технологическом маршруте;  $\rho(t, x)$  – плотность расположения предметов труда по позициям в тех. маршруте;  $F(t, x)$  – поток предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции;  $W(t)$  – объем незавершенного производства;  $v(t, x)$  – скорость движения предметов труда вдоль технологического маршрута. Уравнение (8), записанное в обозначениях, введенных в работах [3-5], является незамкнутым. Замыкание уравнения (8) многими авторами обеспечено с помощью уравнения состояния (clearing-функций). Ниже представлен анализ основных PDE-моделей производственных линий.



Для описания синхронизированных конвейерных линий довольно часто используется PDE-модель, содержащая Graves-уравнение состояния  $v(t, x) = c = const$ :

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad v(t, x) = c = const \quad x \in [0, 1] \quad (9)$$

Модель (9) позволяет получить основные потоковые параметры конвейера, движение предметов труда на котором происходит с постоянной скоростью  $v(t, x)$ .

Для описания производственных линий с ограниченной пропускной способностью удачно зарекомендовала себя нелинейная PDE-модель Lighthill–Whitham:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(\rho(t, x)) = \rho(t, x) \cdot v(\rho(t, x)), \quad v(t, x) = v_0 \left(1 - \frac{\rho(t, x)}{R}\right), \quad v_0 = const \quad (10)$$

в которой пропускная способность ограничена максимальной плотностью межоперационных заделов  $R$ . При достижении плотности предметов труда в межоперационном заделе критического значения движение предметов труда по технологическому маршруту останавливается. LW PDE-модель (10) нашла широкое применение в задачах передачи трафика и при описании движущего потока автомобилей.

Заслуживает внимания квазистатическая PDE-модель, использующая нелинейное Karmarkar-уравнение состояния

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x), \quad v(t) = \frac{\mu}{M + W}, \quad (11)$$

где  $M$ -количество единиц технологического оборудования вдоль технологического маршрута,  $\mu$ -интенсивность обработки предмета труда,  $W$ -объем незавершенного производства. Скорость движения предметов труда  $v(t)$  в отличие от модели (9) является зависимой от времени. Модель используется для проектирования конвейерных линий с переменной скоростью движения. При увеличении количества предметов труда  $W$  в незавершенном производстве скорость конвейера снижается. PDE-модель (11) предложена Д.Армбрустером (Arnbruster), получила дальнейшее развитие в работах Э.Лефебера (Lefebber):

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad v(t, x) = \frac{\mu}{M + \rho(t, x)} \quad (12)$$

Модель (12) учитывает в уравнении состояния для установившегося процесса зависимость распределения предметов труда по технологическим позициям. Увеличение количества предметов труда в межоперационном заделе приводит к снижению скорости обработки изделий. Шагом в развитии двухмоментных моделей стала предложенная Э.Лефебером (Lefebber) двухмоментная PDE-модель, в которой уравнение состояния заменено уравнением Бюргерса.

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x), \quad \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v(t, x)^2}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Скорость движения предметов труда в двухмоментной PDE-модели (13) так же, как и в одномоментной PDE-модели (12) зависит технологической позиции обработки. Однако в отличие от (12) скорость движения предметов труда в модели (13) определяется не из уравнения состояния для установившегося процесса, а путем решения балансового уравнения Бюргерса. Для описания поведения производственных линий при наличии экспериментальных данных Д.Армбрустером (Arnbruster) предложена диффузионная PDE-модель [5]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = C(t) \cdot \rho(t, x) - D(t) \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad (14)$$

в которой для расчета коэффициентов  $C(t)$  и  $D(t)$  использованы статистические данные, определяющие технологические траектории предметов труда. Точность вычислительных результатов, полученных с использованием диффузионной PDE-модели определяется точностью имеющихся статистических данных. Одномоментная модель (12) успешно применяется для описания производственных линий с накопленной статистикой данных о



процессе обработки предметов труда. Однако использование диффузионной PDE-модели для проектирования новых производственных линий не представляется возможным. Перспективы развития диффузионной модели тесно связаны с теорией подобия производственных систем [12]. Описанные выше модели используют при замыкании уравнение состояния для установившихся режимов работы производственной линии. Построение уравнений состояния для переходных неустойчивых режимов связано со значительными трудностями [2-5].

Использование автором статистического подхода позволило выразить параметры производственной линии выразить через состояния большого количества предметов труда и построить замкнутую многомоментную PDE-модель для переходных неустойчивых режимов (2003) [1]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = \int_0^{\infty} G(t, S, \mu) d\mu, \quad k > 0, \quad \int_0^{\infty} \mu^k \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_k(t, S) \quad (15)$$

$$\frac{\partial [\chi]_k(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}(t, S)}{\partial S} + k \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) [\chi]_{k-1}(t, S) = \int_0^{\infty} \mu^k G(t, S, \mu) d\mu$$

где  $S$  – технологическая позиция предмета труда в технологическом маршруте,  $S \in [0, S_d]$ ;  $[\chi]_0(t, S) = \rho(t, S)$  – плотность расположения предметов труда по позициям в тех. маршруте;  $[\chi]_1(t, S) = F(t, S)$  – поток предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции;  $\chi(t, S, \mu)$  функции распределения предметов труда по состояниям;  $[\chi]_{1\psi}(t, S)$  – темп обработки предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции  $S$ ;  $G(t, S, \mu)$  – функция, определяющая процесс переноса оборудованием технологических ресурсов на предмет труда [1]. Для производственной линии с количеством предметов труда в незавершенном производстве  $N \gg 1$  и большим количеством технологических операций (таблица №1) система уравнений (15) в двухмоментном приближении принимает вид [12]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial t} + \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = ([\chi]_{1\psi}(t, S) - [\chi]_1(t, S)) \frac{\partial}{\partial S} \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)}. \quad (16)$$

Замкнутая двухмоментная система уравнений (16) определяет поведение параметров производственной линии для переходных неустойчивых режимов. Для синхронизированной конвейерной производственной линии, работающей в установившемся режиме, система уравнений (16) упрощается [1]:

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial t} + v(t, S) \cdot \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} = v(t, S) \quad (17)$$

принимает вид (13), а для одномоментного приближения (12):

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad [\chi]_1(t, S) = [\chi]_{1\psi}(t, S) \quad (18)$$

Для синхронизированной линии  $\mu = v(t, S) \cdot [\chi]_0(t, S)$ , откуда скорость движения предметов труда по технологическому маршруту выразим через интенсивность обработки предметов труда  $\mu$

$$v(t, x) = \frac{\mu}{\rho(t, x)}, \quad (19)$$

откуда получим систему уравнений (19) в форме (12). Если скорость движения предметов труда по технологическому маршруту представить усредненной величиной то система уравнений (19) может записана в форме (11).



$$V(t) = \frac{\int_0^{S_d} v(t, S) \cdot [\chi]_0(t, S) dS}{\int_0^{S_d} [\chi]_0(t, S) dS} = \frac{\mu(t)}{W(t)}, \quad S \in [0, S_d] \quad (20)$$

Статистический подход позволяет обосновать существующие PDE-модели производственных линий для установившихся режимов и определить условия их применимости и построить новые для переходных, также построить модели для переходных режимов.

### Выводы

При построении нового типа моделей производственных линий использованы два подхода – феноменологический подход (Armbruster D., Berg R.A., Lefeber E., Ringhofer C., Rooda J.) и статистический (Пигнастый О.М., Азаренков Н.А, Ходусов В.Д., Демуцкий В.П.). Феноменологический подход дал возможность построить ряд моделей производственных линий, дополнив уравнения переноса, уравнением состояния в форме clearing-функции. Это позволило построить PDE-модели производственных линий для наиболее простых случаев функционирования. Обоснованность применения определялась сравнительным анализом результатов, полученных с помощью DES-модели и исследуемой PDE-моделью. Однако, хотя построенные PDE-модели с помощью феноменологического подхода и являются прогрессивными, дальнейшее их развитие ограничено. Ограничение обусловлено тем, что уравнения переноса и дополняющие их уравнения состояния для более сложных случаев не могут быть выведены из феноменологического представления. Для построения таких моделей необходимо использовать статистический подход. Показательно то, что общий характер статистических закономерностей не зависит от того, каким способом описывается поведение отдельного предмета труда. При весьма большом числе предметов труда появляются новые своеобразные статистические закономерности. Статистические закономерности обусловлены именно наличием большого числа предметов труда, ни в коем случае нельзя свести к закономерностям поведения отдельного элемента. Использование статистического подхода позволяет получить замкнутые многомоментные балансовые уравнения (уравнения переноса) не из феноменологических соображений, а исходя из законов движения отдельных предметов труда по технологическому маршруту, определенных технологией производства.

Дальнейшее развитие и использование PDE-моделей требует решения вопросов:

1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования.
2. Построение многомоментных замкнутых балансовых моделей для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования производственной линии.
3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда.

### Список литературы

1. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О.М. Х.: ХНУ, 2003. – С. 272.
2. Лысенко Д.Э. Автоматизированный синтез моделей технологических процессов на основе прецедентного подхода / Д.Э. Лысенко // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2013. – № 1 (172). – Вып. 29/1. – С. 121-129
3. Berg R.A. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. IEEE Transaction on Control Systems Technology / Berg R.A., Lefeber E., Rooda J.E. – Boston, 2008. – P. 130-136.
4. Lefeber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems / E.Lefeber, R.A.Berg, J.E. Rooda – (Proceeding of the 2004 American Control Conference). – Massachusetts, 2004. – P. 4583-4588.



5. Armbruster D. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference / Armbruster D., Ringhofer C., Jo T-J. – Boston, MA, USA, 2004. – P. 4589-4594.
6. Лысенко Ю.Г. Моделирование технологической гибкости производственно-экономических систем / Ю.Г.Лысенко, Н.В. Руменцев. – Донецк: ДонДУ, 2007. – С. 238.
7. Bramson M. Stability of queueing networks, lecture notes in mathematics, Journal of Probability Surveys / M. Bramson. – Netherlands, 2008. – Vol. 5. – P. 169-345.
8. Schmitz J.P. Chaos in Discrete Production Systems / Schmitz J.P., Beek D.A., Rooda J.E. – Journal of Manufacturing Systems, 2002. – Vol. 21, no. 3. – P. 236-246.
9. Kempf K. A Continuum Model for a Re-entrant Factory. Operations research / K. Kempf, D.Marthaler, C.Ringhofer, D.Armbruster, J.Tae-Chang. – 2006. – Vol 54. – № 5. – P. 933-950.
10. Vollmann T.E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management / T.E.Vollmann, L.Berry, D.C.Whybark, F.R.Jacobs. McGraw-Hill, New York, 2005. – P. 520.
11. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем / А. А. Красовский. – М.: Наука, 1974. – С. 232.
12. Азаренков Н.А. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н.А.Азаренков, О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов – Доповіді Національної академії наук України, 2011. – №2. – С. 29-35, <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/37227/>
13. Graves S.C. A tactical planning model for a job shop. Operations Research 34 (4). /S.C. Graves. New York, 1986. – P. 522-533.
14. Karmarkar U.S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes. / U.S. Karmarkar. Journal of Manufacturing and Operations Management 2, 1989. – P.105-123.
15. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory / D.Gross, C.M.Harris. – New York, 1974. – P. 490.
16. Ramadge P.J.The control of discrete event systems. Proceedings of IEEE / P.J. Ramadge, W.M. Wonham. – 1989. – Vol. 77(1). – P. 81-98.
17. Perturbation analysis for on-line control and optimization of stochastic fluid models / C.Cassandras ,Y.Wardi ,B.Melamed ,G.Sun, C.Panayiotou IEEE Trans.Autom.Control. – Netherlands, 2002. – Vol. 47, – № 8. – P. 1234-1248.
18. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия / Дж. Форрестер. – М.: Прогресс, 1961. С. 341.
19. Коробецкий Ю.П. Имитационные модели в гибких системах / Ю.П. Коробецкий, С.К. Рамазанов. – Луганск: Изд. ВНУ, 2003. – С. 280.
20. Asmundsson J.M. Production planning models with resources subject to congestion. / Asmundsson J. M., Rardin R. L., [et al]. Naval Res Logist 56, 2009. – P. 142-179.
21. Mehdi J. Stochastic Models in Queueing Theory / J. Mehdi. – New York, 1991. – P. 482.
22. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems / R. Berg. Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. – P. 157.

## A NEW CLASS OF DYNAMIC MODELS FLOW LINES OF PRODUCTION SYSTEMS

**O.M. PIGNASTY**

*National Technical University  
"KhPI"*

*e-mail:  
pom7@bk.ru*

This paper discusses a class of models of production systems [1]. Models are widely used today for building effective systems of production lines [2, 3]. Class model parameters determine the behavior of the production line with the help of partial differential equations (PDE-model) [2-4], in the last decade successfully used to describe the quasi-static and transient transients The article analyses the shortcomings, appeared in Russia on the whole and Altai Region in particular, of the municipal self-government model and defines some perspectives of the municipal system development[5].

Keywords: PDE-model, production line, mass production, work in progress, management system, balance equations of the production line, equation of state, discrete-event model, queueing theory, model fluid, Clearing-function, quasi-static process, transient process, stochastic process.