MSC 11M25

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ L–ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г. Белгород, 308007, Россия, e-mail: doductam140189@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается линейные комбинации функций, аналогов функции Харди, соответствующих L-функциям Дирихле. Исследуется распределение нулей, которые лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. Для функций указанного типа доказаны утверждения, аналогичные результатам А.А. Карацубы для дзета-функции Римана.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая, L-функция Дирихле.

1. Введение

Пусть $Z(t,\chi) = e^{i\theta(t,\chi)}L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$, где функция $\theta(t,\chi)$ подобрана так, что $Z(t,\chi)$ вещественна при вещественных t [1, с. 485]. Пусть далее

$$G(t) = a_1 Z(t,\chi_1) + a_2 Z(t,\chi_1) + \cdots + a_l Z(t,\chi_l)\,, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \cdots, a_l$ – произвольные вещественные числа, $\chi_1, \cdots, \chi_l$ – примитивные характеры Дирихле по модулям соответственно $k_1, k_2, \cdots, k_l$. $Z(t,\chi)$ представляет собой аналог функции Харди [2, гл. 2].

В 1991 году А.А. Карацуба [1] поставил и решил своим методом задачу о нижней оценке числа нулей нечетного порядка функции $G(t)$ на отрезке $(T, T+H)$, где $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, ε – произвольное малое положительное число.

В настоящей работе получены оценки для числа нулей функции $G(t)$ на почти всех промежутках вида $(T, T+H)$, где $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \le T \le 2X$, ε_1– сколь угодно малое фиксированное положительное число. Доказательства проводятся по схеме работы А.А. Карацубы [1]. Пусть $[k_1, k_2, \cdots, k_l]$ – наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, \cdots, k_l$. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $\beta = 1/\varphi(K)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \leqslant T \leqslant 2X$. Если E_1 – множество тех T из промежутка $[X, 2X]$, для которых не выполняется неравенство*

$$N_0(T+H,\chi) - N_0(T,\chi) \ge c_1 H \left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon}\,, \tag{2}$$

то для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^{1-0,5\varepsilon_1}$.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $M = [XH^{-1}]$. При $m = M+1, M+2, \cdots, 2M$ рассмотрим интервалы вида $[mH, mH+H]$. Тогда в каждом из этих интервалов, за исключением не более $M^{1-0.5\varepsilon_1}$ из них, содержится более чем $c_2 H(\ln X)^{\beta-\varepsilon}$ нулей нечетного порядка функции $G(t)$.*

2. Вспомогательные утверждения.

Для доказательств теорем нам понадобятся леммы. Эти леммы близки к известным леммам [3, с. 1215].

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, h_1$ – положительные числа с условиями $\varepsilon_1 < 0.01$, $\varepsilon_2 < 1$, $h_1 < 1$, r – натуральное число, $H = X^{\varepsilon_1}$. $P = \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}$, $P_0 = \sqrt{\frac{kX}{\pi}}$. При $j = 0, 1, 2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} e^{-\left(\frac{H+1}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_2(T) = \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2\le P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $B(\lambda) = \left((P\lambda^{-1})^{ih_1} - 1\right)^r \left(\ln(P\lambda^{-1})\right)^{-r}$, $a(\lambda)$– числа из приближеного функционального уравнения для аналога функции Харди-Сельберга $F(t,\chi)$ [1, с. 490].

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{j=0}^{2} \int_X^{2X} W_j^2(T) \ll r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X H^{-1} Y^{12} L^7,$$

где $L = \ln X$.

Следствие 1. *Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких из интервала $[X, 2X]$, для которых*

$$\sum_{j=0}^{2} W_j^2(T) \ge r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^7. \tag{3}$$

Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^\delta$.

Лемма 2. *При обозначениях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{m=M}^{2M} W_j^2(mH) \ll r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M H^{-1} Y^{12} L^8. \tag{4}$$

Следствие 2. *Пусть δ– произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких $M \le m \le 2M$, для которых*

$$\sum_{j=0}^{2} W_j^2(mH) \ge r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^8. \tag{5}$$

Тогда для количества элементов этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка $\mu(E_1) \ll M^\delta$.

3. Схема доказательства теоремы 1.

Возьмем в Следствии 1 $\delta = 1-0.5\varepsilon_1$. Докажем, что для T, не принадлежащих множеству E_1, выполняется неравенство (2). Тогда из следствия 1 легко следует утверждение теоремы.

Для T, не принадлежащих множеству E_1, выполняется неравенство

$$W_0^2(T)+W_1^2(T)+W_2^2(T) < r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r}h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^4H^{-0.5}Y^{12}L^7\,. \qquad (6)$$

Посредством символа $\varkappa$ обозначим величину

$$r^2(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{2r}h_1(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^2H^{-0.25}Y^6L^{3.5}\,.$$

1) По аналогии с работой [1], определим функцию

$$F(t) = G(t)\left|g\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,$$

где $G(t)$ определяется равенством (1),

$$g(s) = g_j(s,\chi) = \sum_{\nu\le Y}\frac{\beta(\nu)\chi_j(\nu)}{\nu^s},\ j=1,2,\cdots,l,$$

и

$$\beta(\nu) = \begin{cases}\alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln Y}\right) & \text{если}\ \ 1\le\nu<Y=H^{0.01}\,,\\ 0 \quad \text{если}\ \ \nu\ge Y\,;\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv 1\pmod K}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{1/2} \quad \text{при}\ \ \mathrm{Re}s>1\,.$$

Посредством E обозначим подмножество $(T,T+H)$, на котором выполняется неравенство

$$\int_0^{h_1}\ldots\int_0^{h_1}|F(t+u_1+\ldots+u_r)|\,du_1\ldots du_r > \left|\int_0^{h_1}\ldots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\ldots+u_r)du_1\ldots du_r\right|,$$

Далее, следуя рассуждениям А.А. Карацубы [1] получаем неравенство:

$$I_1+I_2\ge I_3\,, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_E\left(\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\cdots+u_r)du_1\cdots du_r\right)^a dt\,,\\ I_2 &= \int_T^{T+H}\left|\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}F(t+u_1+\cdots+u_r)du_1\cdots du_r\right|^a dt\,,\\ I_3 &= \int_T^{T+H}\left(\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1}|F(t+u_1+\cdots+u_r)|du_1\cdots du_r\right)^a dt\,,\end{aligned}$$

a – число из отрезка $(0,1)$.

2) Для I_3 из [1] имеем оценку снизу

$$I_3 \geq c_4 h_1^{ra} H\,.$$

3) Для I_1 из [1] имеем оценку сверху

$$I_1^{2/a} \leq (\mu(E))^{2/a-1}\, h_1^{2r} H \left(\Sigma_0 + |W_0| + T^{-0,2}\right)\,, \tag{8}$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}\,,$$

W_0– тригонометрическая сумма из леммы 2.
Сумма Σ_0 оценивается аналогично тому, как это было сделано в [1] с учетом леммы 5 [1, с. 505]:

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda} \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^{\beta}}\,. \tag{9}$$

Для суммы W_0 справедливо неравенство (6), поэтому

$$W_0 \ll \varkappa\,. \tag{10}$$

Таким образом из (8)-(10) получаем

$$I_1 \leq c_5\, (\mu(E))^{1-a/2}\, h_1^{ar} H^{a/2} \left(\frac{\ln T}{(\ln Y)^{\beta}}\right)^{a/2}\,.$$

4) Подобно тому как это сделано в [1], для I_2 получаем оценку сверху

$$I_2^{2/a} \ll H^{2/a-1}\left(I_{21} + I_{22} + HT^{-0.2} h_1^{2r}\right)\,,$$

где

$$I_{21} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \ldots \int_0^{h_1} F_1(t+u_1+\ldots+u_r,\chi)\,du_1 \ldots du_r \right|^2 dt\,,$$

$$I_{22} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \ldots \int_0^{h_1} F_2(t+u_1+\ldots+u_r,\chi)\,du_1 \ldots du_r \right|^2 dt\,,$$

$$F_1(t,\chi) = 2\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon(\chi)}\, e^{i\varphi_1(t)} \sum_{\lambda \leq P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it}\,,$$

$$F_2(t,\chi) = 2\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon(\chi)}\, e^{i\varphi_1(t)} \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it}\,.$$

Для I_{21} справедливо неравенство

$$I_{21} \ll H\left(\Sigma_1\left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T}\right)^{2r} + |W_1|\right), \tag{11}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda \le P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda},$$

W_1– тригонометрическая сумма леммы 2.

Сумма Σ_1 оценивается аналогично сумме Σ_0:

$$\Sigma_1 \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta}. \tag{12}$$

Используя (6), получаем оценку суммы W_1:

$$W_1 \ll \varkappa. \tag{13}$$

Из (11)-(13) следует

$$I_{21} \ll H\left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T}\right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right).$$

Аналогично тому, как это было сделано в 3) для оценки I_1, для I_{22} получаем неравенство

$$I_{22} \ll Hh_1^{2r}\left(\varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right). \tag{14}$$

Таким образом, получаем:

$$I_2 \ll Hh_1^{ar}\Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 h_1 \ln T}\right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + h_1^{-2r}\varkappa + \varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa\right)^{a/2}.$$

Из полученных оценок для I_1, I_2 и I_3 с учетом неравенством (7) найдем нижнюю границу для $\mu(E)$. Из этой оценки уже легко будеть следовать, что для T выполняется (2).

Доказательство теоремы 2 с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Литература

1. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1991. – 55;3. – С.483-514.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
3. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1984. – 48; 6. – С.1214-1224.

4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльброна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия Математическая. –1990. – 54;2, – С.303-315.

ON ZERO DISTRIBUTION OF LINEAR COMBINATIONS OF L-DIRICHLET FUNCTIONS LYING ON THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:doductam140189@gmail.com

Abstract. Linear combinations of functions which are analogous Hardy's functions, corresponding L-Dirichlet functions are studied. It is investigated the zero distribution which are on the critical line $\Re s = 1/2$. Assertions which are analogous some Karatsuba's results concerning Riemann's zeta-function have been proved for functions pointed out.

Key words: Rieman's zeta-function, non-trivial zeros, critical line, L-Dirichlet function.