MSC 37J05

О ПОНЯТИИ ОБРАТИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются возможные определения класса конечномерных автономных систем, более широкого, чем класс гамильтоновых систем. Системы этого класса сохраняют основные качественные черты динамики гамильтоновых систем. Такое обобщение основано на свойстве обратимости движения, которое свойственно динамике гамильтоновых систем.

Ключевые слова: обратимые динамические системы, касательная динамическая система, обратимость движения, симметричное спектральное разложение.

1. Введение. В механике и электродинамики сплошных сред, в последние десятилетия, выкристаллизовалась проблема. Она заключается в необходимости разработки метода построения эволюционных уравнений для описания динамики конденсированных сред со сложной внутренней структурой. Возникновение такой проблемы связано с тем, что чисто геометрические построения с применением принципов пространственного баланса основных механических интегралов движения (энергии, импульса, числа частиц), которые используются при конструировании уравнений гидродинамики простых жидкостей (см., например, [1], [2]) оказываются уже недостаточными, при конструировании полной системы динамических уравнений для конденсированных сред, у которых локальное термодинамическое состояние характеризуется параметрами порядка, связанными со спонтанно нарушенными симметриями. Заметим, что эта проблема тесно примыкает к проблеме формулировки достаточно общего теоретического подхода в неравновесной термодинамике (см., например, [3], [4]). Еще в семидесятых годах прошлого столетия для решения указанной проблемы стал применяться так называемый *гамильтонов подход*, который основан на применении в физике конденсированных сред конструкций, принятых в фундаментальной теоретической физики.

Кратко, основная идея гамильтонова подхода заключается в том, что уравнения теории конструируются как бы в два этапа: сначала решается задача о построении адекватной для рассматриваемой физической ситуации бездиссипативной динамики, а затем для учета диссипации уравнения модифицируются в некотором смысле минимальным образом. На первом этапе, как в теоретической механике [5] или в классической теории поля [6], уравнения имеют гамильтонову (лагранжеву) форму. В отсутствии внешних сил, они описывают собственную «инерционную» динамику системы, описание которой в физике конденсированных сред как раз и представляет проблему. Учет диссипативных процессов производится феноменологически в виде «малых» слагаемых, которые, с математической точки зрения, обеспечивают диссипативность суммарного генератора эволюции.

Заметим, что такой путь построения эволюционных уравнений используется и в теоретической механике. Учет диссипации осуществляется видоизменением первоначально бездиссипативных гамильтоновых (лагранжевых) уравнений посредством добавления к ним слагаемых, которые представляются частными производными так называемой диссипативной функции. Последняя вводится феноменологически в виде неотрицательной квадратичной формы по переменным, затухание которых предполагается учесть в динамике, управляемой конструируемыми уравнениями. Реже диссипативная функция определяется так, что к квадратичной форме добавляются форма четвертого порядка, но без нарушения положительности суммарной функции при достаточно больших значений переменных. Такое построение диссипативной функции, в виде полинома от динамических переменных с наинизшими их степенями отражает относительную малость диссипации. В соответствии с таким подходом, при построении динамических уравнений для конденсированных сред, в сконструированные бездиссипативные уравнения, по-видимому, должны быть добавлены диссипативные слагаемые в виде дифференциальных знакоопределенных операторов второго порядка, обеспечивающих феноменологическое описание диссипации.

Итак, следуя описанной стратегии, основная проблема состоит в построении бездиссипативной динамики. Именно эта задача решается в рамках гамильтонова подхода.

По-видимому, первыми работами, в которых для построения бездиссипативной динамики конденсированной среды было предложено использовать лагранжевы уравнения, были статьи Волкова Д.В. с сотрудниками [7-9]. Эти работы были затем заново пересмотрены авторами [10-11], когда возник интерес к этой тематике [12-14]. Во всех указанных работах для построения бездиссипативной динамики магнитоупорядоченных сред использовался лагранжев формализм. При этом, в результате, получались динамические уравнения, обобщающие известное уравнение ферродинамики – уравнение Ландау-Лифшица [15, 16]. На более позднем этапе развития стало ясно, что лагранжев формализм несколько неестественен для решения подобных задач в физике конденсированного состояния. В связи с чем, метод построения бездиссипативных динамических уравнений был сформулирован в терминах гамильтонова формализма.

Как известно, построение гамильтоновых уравнений при заданном гамильтониане можно осуществить двумя способами. Первый из них состоит в определении набора канонически сопряженных пар фазовых переменных так, что производная гамильтониана по каждой из этих переменных определяет скорость изменения сопряженной переменной (в бесконечномерном случае должны, очевидно, использоваться вариационные производные). Второй способ состоит во введении симплектической структуры посредством определения специальной бинарной операции на алгебре функций от фазовых переменных – т.н. скобки Пуассона, которая подчиняется специальному набору аксиом. Технически, последний способ оказывается более предпочтительным для пространственно распределенных динамических систем, ввиду их бесконечномерности, так как разделение на пары сопряженных переменных в бесконечномерном случае может быть довольно искусственным. Поэтому, на следующем этапе разработки гамильтонова подхода к построению бездиссипативных динамических уравнений, его формализм был модифицирован и сформулирован в терминах скобок Пуассона [17, 18].

Развитие гамильтонова формализма на основе техники скобок Пуассона привело к разработке специальных приемов их определения. На этом пути были разработаны алгебры скобок Пуассона для нормальных жидкостей, твердых тел, для сред с магнитным упорядочением [17, 18], для жидкостей с мезофазным состоянием (жидких кристаллов) различного типа [19]. Наконец, такой подход был применен для конденсированных сред, в термодинамике которых проявляется спонтанное нарушение симметрии, имеющее квантовое происхождение – для сверхтекучих жидкостей и квантовых кристаллов [21].

Следует заметить, что в формализме скобок Пуассона имеется одно неприятное положение. В списке аксиом, которым должна удовлетворять конструируемая бинарная операция присутствует так называемое тождество Якоби, которое невозможно прозрачным образом интерпретировать с физической точки зрения. Это затрудняет целенаправленное использование формализма при конструировании динамических моделей, описывающих конкретную физическую ситуацию. Указанное обстоятельство не могло не проявиться при практическом применении формализма скобок Пуассона на каком-то этапе его развития. Действительно, несмотря на то, что гамильтонов подход оказался очень плодотворным при решении многих задач построения динамических уравнений конденсированных сред со сложной структурой, было подмечено, что в его рамках невозможно сконструировать такие эволюционные уравнения для жидкокристаллических сред, чтобы физические предсказания, основанные на этих уравнениях, полностью согласовывались с экспериментальными данными. Впервые на это было указано в монографии [22]. Оказалось, что формализм алгебры скобок Пуассона является в указанном случае слишком стеснительным. При этом оказывается, что именно требование выполнимости тождества Якоби для скобок Пуассона не позволяет ввести достаточно широкий набор феноменологических параметров, чтобы привести характеристики динамики жидких кристаллов, к согласию с экспериментальными данными. В связи с создавшимся положением возникает вопрос о том, как усовершенствовать гамильтонов подход так, чтобы приспособить его к описанию проблемных физических ситуаций.

В процитированной монографии авторы пошли в построении динамики нематических жидких кристаллов по простому пути. Они ограничили рамки построения динамики только самыми общими требованиями: генератор сдвига по времени всякой распределенной в пространстве полевой динамической переменной $\varphi(\boldsymbol{x})$ должен порождаться некоторой бинарной билинейной антисимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Лейбница (то есть она должна представлять собой т.н. операцию алгебраического дифференцирования). Уравнение движения для поля $\varphi(\boldsymbol{x})$ строится применением этого генератора к паре, состоящей из гамильтониана – функционала от полевых переменных и поля $\varphi(\boldsymbol{x})$. При этом не требуется, чтобы вводимая бинарная операция обязательно удовлетворяла тождеству Якоби. Однако, если следовать такому подходу неизбежно приходится сталкиваться с такой ситуацией, что указанным требованиям удовлетворяет динамика систем, которые с физической точки зрения являются диссипативными. В связи с таким положением, возникает вопрос о том, можно ли построить такое обобщение гамильтоновой динамики, чтобы, с одной стороны, она оставалась бездиссипативной, а, с другой стороны, чтобы оно оказалось настолько широким, чтобы имелась возможность согласования ее предсказаний с экспериментальными данными.

В настоящей работе обсуждаются возможности обобщений гамильтоновой динамики, удовлетворяющих указанным требованиям. Мы ограничиваемся только конечномерными динамическими системами, не требующими для своего изучения применения аппарата бесконечномерных алгебр Ли. Кроме того, далее мы, не оговаривая дополнительно, везде изучаем только автономные динамические системы. Основной идеей наших построений является понятие *обратимости* движения, присущее гамильтоновым системам. В предшествующих работах авторов было введено понятие обратимой динамической системы, которое естественно было бы назвать *спектральной обратимостью* [23-30]. А именно, исследовались четномерные динамические системы. Требование обратимости сводилось к тому, чтобы в каждой точке фазового пространства которых генератор линейной динамической системы, касательной к исходной в этой точке, обладал симметричным спектральным разложением.

2. Понятие обратимости динамической системы. Определение класса динамических систем, более широкого чем класс гамильтоновых систем, сохраняющих основные качественные черты динамики последних, связан осознанием того, какие именно свойства динамики гамильтоновых систем при этом нужно взять за основу. С нашей точки зрения, таким качественным свойством, которое отличает поведение гамильтоновых систем и которое мы интуитивно связываем с отсутствием в них диссипативного поведения, является *обратимость движения*.

Будем рассматривать конечномерные автономные динамические системы размерности n. Пусть фазовым пространством каждой из таких систем, не ограничивая общности, является $\mathbb{R}^n$. Пусть $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ и $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Динамическая система, соответствующая диффеорморфизму F, имеет вид

$$\dot{X} = \mathsf{F}(X)\,. \tag{1}$$

Частным случаем динамических систем рассматриваемого типа, который будут служить ориентиром в наших построениях, являются гамильтоновы системы. Они являются четномерными $n = 2m$. Каждая из таких систем порождается некоторой функцией $\mathsf{H} : \mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}$, которая называется гамильтонианом. Система, определяемая гамильтонианом H, имеет вид

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial Q}\,, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial P}\,, \tag{2}$$

где $P = \langle p_1, p-2, ..., p_m \rangle$, $Q = \langle q_1, q_2, ..., q_m \rangle$.

Обсудим, что нужно понимать под понятием обратимости движения. Наши рассуждения будут опираться на следующее положение. Мы считаем, что обратимость движения не является свойством выбора координат описания движения, а, наоборот, это свойство не должно зависеть от их выбора. Это означает, что любая система (1), если она рассматривается как обратимая, то и любая система, которая получается из нее невырожденной заменой координат $\mathsf{V}(X) = Y$,

$$\dot{Y} = \mathcal{W}F(\mathsf{V}^{-1}(Y))\,, \qquad \mathcal{W} = \left(\frac{\partial \mathsf{V}}{\partial X}\right) \text{ – матрица}, \tag{3}$$

также является обратимой.

Обратимся к гамильтоновым системам. Понятие их обратимости можно рассматривать с двух различных точек зрения, которые мы будем, в дальнейшем, называть *локальной* и *глобальной* и которые при изучении гамильтоновых систем совпадают. Локальная точка зрения состоит в том, что в том случае, когда $\mathsf{H}(-P,Q) = \mathsf{H}(P,Q)$, [3] система уравнений (2) инвариантна относительно замены $t \Rightarrow -t$, $P \Rightarrow -P$.

Самое широкое и, вместе с тем, естественное обобщение такой трактовки понятия обратимости заключается в следующем.

Определение 1. *Систему (1) назовем локально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм* V *такой, что он переводит (1) в систему*

$$\dot{Y} = -\mathsf{F}(Y)\,, \qquad Y = \mathsf{V}(X) \tag{4}$$

и при этом $\mathsf{V}^2 = \mathrm{id}$, $\mathsf{V}(\mathsf{V}(X)) = X$, $X \in \mathbb{R}^n$.

Изучение примеров показывает, что определенный таким образом класс локально-обратимых в широком смысле систем оказывается очень широким. Он допускает существование систем такого типа любой размерности. При этом одномерные обратимые системы допускают простое описание. А именно, при $n = 1$ представим (1) в виде

$$\dot{x} = f(x)\,. \tag{5}$$

Согласно определению, система локально обратима в широком смысле, если существует функция v такая, что

$$v'(x)f(x) = -f(v(x))\,, \qquad v(v(x)) = x\,.$$

Из второго соотношения следует $v(x) = v^{-1}(x)$, то есть обратная функция совпадает с исходной. Из простых геометрических соображений следует, что имеется только две возможности $v(x) = x$ и $v(x) = a - x$ с произвольной постоянной a. Первый случай приводит только тривиальной динамической системе $f = 0$. Второй накладывает следующее ограничение на функцию f: $f(x) = f(a-x)$. В частности, при $a = 0$ это требование сводится к тому, что f является четной функцией.

Несмотря на то, что введенный класс локально-обратимых в широком смысле динамических систем может представлять самостоятельный интересный объект для математического исследования, мы сосредоточимся на динамических системах, которые, заведомо, принадлежат этому классу, но составляют в нем специальный более узкий подкласс. Это связано с тем, что класс локально обратимых в широком смысле систем настолько широк, что большая часть из них, по-видимому, не имеет отношения к той физической проблеме, о которой шла речь во введении. В частности, в рассмотренном одномерном примере, только тривиальную систему, описывающую состояние покоя, можно было бы назвать обратимой в физическом смысле. Заметим, что в определении

[3] В механике приходится рассматривать ситуации, когда это свойство не имеет места, например, при наличии внешнего магнитного поля, но мы, упрощая рассмотрения, такие системы не будем рассматривать.

этого класса отсутствует разделение координат системы на два класса, в котором параметры первого класса, которые условно назовем пространственными координатами, и параметры, второго класса, которые условно назовем импульсами. Именно преобразование (обращение знака) параметров второго класса приводит к тому, что движение системы в пространстве параметров первого класса, происходит в обратном направлении. В связи с этим, дадим другое определение локальной обратимости динамической системы (1), в рамках которого уже вводится такое разделение.

Определение 2. *Систему (1) назовем локально-обратимой, если существует диффеоморфизм* U *такой, что преобразованная вектор-функция* $(\mathsf{U}X)(t) = \langle P(t), Q(t), Y(t)\rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_m(t)\rangle$, $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_m(t)\rangle$, $2m \le n$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\dot{P} = \mathsf{A}(P,Q)\,, \qquad \dot{Q} = \mathsf{B}(P,Q)\,, \qquad \dot{Y} = 0\,, \tag{6}$$

где дифференцируемые отображения $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$*;* $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ *обладают свойствами* $\mathsf{B}(-P,Q) = -\mathsf{B}(A,B)$, $\mathsf{A}(-P,Q) = \mathsf{A}(P,Q)$.

Легко видеть, что системы (6) являются локально обратимыми в широком смысле, так как для них отображение V является линейным и представляется матрицей

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & | & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & \mathbf{1} & | & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & | & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Легко видеть также, что системы (6), в общем случае, не являются гамильтоновыми. В этом смысле, локально обратимые системы не сводимы к гамильтоновым системам посредством какого-либо диффеоморфизма U. Для того чтобы система (6) была гамильтоновой, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial P} + \frac{\partial B}{\partial Q} = 0\,. \tag{7}$$

Перейдем теперь к обсуждению глобальной трактовки понятия обратимости динамической системы. Заметим, что для гамильтоновых систем (2) в том случае, когда $\mathsf{H}(-P,Q) = \mathsf{H}(P,Q)$, их решения $P(t) = \mathsf{P}(t;P_0,Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t;P_0,Q_0)$ с начальными данными $P_0 = \mathsf{P}(0;P_0,Q_0)$, $Q_0 = \mathsf{Q}(0;P_0,Q_0)$, удовлетворяют соотношениям

$$P_0 = -\mathsf{P}(t;-P(t),Q(t))\,, \quad Q_0 = \mathsf{Q}(t;-P(t),Q(t))\,. \tag{8}$$

Именно это свойство естественно взять за определение понятия *глобальной обратимости* динамической системы

Определение 3. *Систему (1) назовем глобально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм* W *такой, что* $\mathsf{W}^2 = \mathrm{id}$ *и для решений* $X = \mathsf{X}(t;X_0)$ *с начальными данными* X_0 *имеет место*

$$X_0 = \mathsf{X}(t, \mathsf{W}(X(t)))\,. \tag{9}$$

Класс глобально-обратимых систем в широком смысле оказывается также, как и класс локально-обратимых систем в широком смысле, является очень обширным и, по-видимому, большая часть из систем такого типа не имеет отношения к поставленной во введении задаче математического моделирования. В связи с этим, мы, по аналогии с тем, как было введено понятие локальной обратимости, дадим следующее определение, которое обобщает указанное выше свойство глобальной обратимости гамильтоновых систем.

Определение 4. *Систему (1) назовем глобально-обратимой, если существует диффеоморфизм* U *такой, что эта система преобразованная вектор-функция* $(\mathsf{U}X)(t) = \langle P(t), Q(t), Y(t)\rangle$, $P(t) = \langle p_1(t), ..., p_m(t)\rangle$, $Q(t) = \langle q_1(t), ..., q_m(t)\rangle$, $2m \le n$ *удовлетворяет системе уравнений (6) с дифференцируемыми отображениями* $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$; $\mathsf{A} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ *и ее решения* $P(t) = \mathsf{P}(t; P_0, Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0)$ *с начальными данными* $P_0 = \mathsf{P}(0; P_0, Q_0)$, $Q_0 = \mathsf{Q}(0; P_0, Q_0)$, *удовлетворяют соотношениям (8)*

3. Теорема эквивалентности. Докажем теперь основное утверждение, связанное со введенными понятиями.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) была глобально обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была обратимой локально.*

□ Необходимость. Пусть соотношения (8) выполняются для решений системы уравнений (6) для любой точки $\langle P_0, Q_0\rangle$ в качестве начальных данных. Возьмем решение $\langle P(t), Q(t)\rangle$ с начальной произвольно выбранной точкой. Тогда при $\Delta \to 0$ имеем

$$P(\Delta) = P_0 + \mathsf{A}(P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q(\Delta) = Q_0 + \mathsf{B}(P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,. \tag{10}$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$P_0 = -\mathsf{P}(\Delta; -P(\Delta), Q(\Delta))\,, \qquad Q_0 = \mathsf{Q}(\Delta; -P(\Delta), Q(\Delta))\,,$$

то есть

$$P_0 = P(\Delta) - \mathsf{A}(-P(\Delta), Q(\Delta))\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q_0 = Q(\Delta) + \mathsf{B}(-P(\Delta), Q(\Delta))\Delta + o(\Delta)\,. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\mathsf{A}(-P(\Delta), Q(\Delta)) = \mathsf{A}(-P_0, Q_0) + o(1)\,, \qquad \mathsf{B}(-P(\Delta), Q(\Delta)) = \mathsf{B}(-P_0, Q_0) + o(1)\,,$$

получаем из (11)

$$P_0 = P(\Delta) - \mathsf{A}(-P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,, \qquad Q_0 = Q(\Delta) + \mathsf{B}(-P_0, Q_0)\Delta + o(\Delta)\,.$$

Сравнивая эти выражения с (10), получаем соотношения $\mathsf{A}(-P_0, Q_0) = \mathsf{A}(P_0, Q_0)$, $\mathsf{B}(-P_0, Q_0) = -\mathsf{B}(P_0, Q_0)$, которые, в силу произвольности точки $\langle P_0, Q_0\rangle$, означают локальную обратимость системы.

Достаточность. Представим решения системы (6) с начальными данными $\langle P_0, Q_0\rangle$ в виде

$$\mathsf{P}(t; P_0, Q_0) = P_0 + \int_0^t \mathsf{A}(P(s), Q(s))ds\,, \quad \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0) = Q_0 + \int_0^t \mathsf{B}(P(s), Q(s))ds\,. \qquad (12)$$

где правые части определяют отображения P и Q. Обозначим $P^*(s) = -P(t-s)$, $Q^*(s) = Q(t-s)$, где $P(t) = \mathsf{P}(t; P_0, Q_0)$, $Q(t) = \mathsf{Q}(t; P_0, Q_0)$. Эти функции удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$\dot{P}^*(s) = -\frac{d}{ds}P(t-s) = \frac{d}{dt}P(t-s) = \mathsf{A}(P(t-s), Q(t-s)) =$$
$$= \mathsf{A}(-P(t-s), Q(t-s)) = \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))\,,$$
$$\dot{Q}^*(s) = \frac{d}{ds}Q(t-s) = -\frac{d}{dt}Q(t-s) = -\mathsf{B}(P(t-s), Q(t-s)) =$$
$$= \mathsf{B}(-P(t-s), Q(t-s)) = \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))\,.$$

Тогда, как и в (12),

$$P^*(t) = \mathsf{P}(t; P_0^*, Q_0^*) = P_0^* + \int_0^t \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))ds\,,$$

$$Q^*(t) = \mathsf{Q}(t; P_0^*, Q_0^*) = Q_0^* + \int_0^t \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))ds\,.$$

Подставляя явные выражения для $P^*(t), P_0^*$ и $Q^*(t), Q_0^*$,

$$-P_0 = -P(t) + \int_0^t \mathsf{A}(P^*(s), Q^*(s))ds\,, \qquad Q_0 = Q(t) + \int_0^t \mathsf{B}(P^*(s), Q^*(s))ds\,,$$

что означает $-P_0 = \mathsf{P}(t; -P(t), Q(t))$ и $Q_0 = \mathsf{Q}(t; -P(t), Q(t))$. ■

Таким образом, понятия локальной и глобальной обратимости во введенной нами расширенной негамильтоновой динамике совпадают и поэтому нужно говорить просто об *обратимости* таких систем, если выполняется одно из свойств, указанных, соответственно, в определениях 2 и 4.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика / М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / М: Мир, 1975. – 592 с.

3. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов / М.: Наука, 1978. – 128 с.
4. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы / М.: Мир, 1974. – 404 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика / Теоретическая физика. Учеб. пособие в 10-ти томах. т.1 / М.: Наука, 1988. – 216 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля / Теоретическая физика / М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. Волков Д.В. Феноменологический лагранжиан взаимодействия голдстоуновских частиц / Препринт ИТФ-69-75, Киев, 1969. – 51 с.
8. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ. – 1971. – 13, № 6. –С.1668-1678.
9. Волков Д.В. Феноменологические лагранжианы // ЭЧАЯ. – 1973. – 4, № 1. – С.3-41.
10. Волков Д.В., Желтухин А.А. Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ФНТ. – 1979. – 5, №11. – С.1359-1363.
11. Волков Д.В., Желтухин А.А. О распространении спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ЖЭТФ. – 1980. – 78, № 5. – С.I867-1878.
12. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Макроскопическая теория спиновых волн // ЖЭТФ. – 1976. – 70, № 4. – С.1522-1532.
13. Андреев А.Ф. Магнитные свойства неупорядоченных сред // ЖЭТФ. – 1978. – 74. – № 2. – С.786-797.
14. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. – 1980. – 130, № 1. – С.37-63.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Phys. Zs. Sowjet. – 1935. – 8. – С.153-169.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л.Д. Собрание трудов в 2 т. Под ред. Е.М. Лифшица / М.: Наука, 1969. – Т.1. – С.128.
17. Dsyaloshinskii I.E., Volovick G.E. Poisson brackets in condensed matter physics // Ann. Phys. – 1980. – 125:1. – P.67–97.
18. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред / Проблемы физической кинетики и физики твердого тела / Киев: Наукова думка, 1990. – С.63-77.
19. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред // ТМФ. – 1995. – 102:2. – С.283–296.
20. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход к теории антиферромагнитных систем // ТМФ. – 1993. – 95:1. – С.58–73.
21. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией / Физика элементарных частиц и атомного ядра.– 1996. – 27. – 2. – С.431-492.
22. Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов / М.: Наука, 1988.
23. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
24. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
25. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.
26. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.

27. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.
28. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О классе гамильтоновых матриц // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.183-185.
29. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.337-341.
30. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.65-67.

CONCEPT OF DYNAMIC SYSTEMS REVERSIBILITY

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch48@bsu.edu.ru

Abstract. Some possible generalizations of the class of hamiltonian system are under considerations. Finite dimensional autonomous systems such that some main qualitative features of their dynamics are under study. Generalizations are based on the property of motion reversibility that is connected with dynamics of hamiltonian systems.

Key words: reversible dynamic systems, tangential dynamic system, reversibility, symmetric spectral decomposition.