MSC 35Q05

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследована зависимость решений абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных от коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, фредгольмов оператор, возмущение.

В работе [1] при $t > 0$ и $k \geq 0$ установлена разрешимость задачи Коши для следующих уравнений с фредгольмовым оператором A при производных:

$$A\left(t^k u'(t)\right)' = t^k Bu(t)\,, \tag{1}$$

$$\left(t^k Av'(t)\right)' = t^k Bv(t)\,, \tag{2}$$

$$\left(t^k (Aw(t))'\right)' = t^k Bw(t)\,. \tag{3}$$

Для всех этих уравнений начальное условие имеет вид

$$u(0) = U_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \tag{4}$$

В настоящей работе исследуются вопросы поведения решений рассматриваемых задач при изменении либо операторных коэффициентов уравнений, либо параметра k. Все используемые нами обозначения введены в [1].

Условие 1. Пусть $B \in L(E_1, E_2)$, а оператор A — линейный, замкнутый, фредгольмовый оператор и при этом для достаточно малых по модулю λ оператор $A + \lambda B$ обратим.

Если выполнено условие 1 и $U_0 \in \mathfrak{M}$, то задача (1), (4) при любых $k \geq 0$ имеет единственное решение (см. [1]) $u_k(t) = Y_k(t; T_p)U_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1 и* $U_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда равномерно по* $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ *для любого* $k \geq 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to k} u_m(t) = u_k(t)\,. \tag{5}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013

□ Для определённости будем считать, что $m > k$. В силу формулы сдвига по параметру (см. [2]) для $U_0 \in \mathfrak{M}$, $t \in [0, t_0]$ и $\delta > 0$ имеем

$$u_m(t) - u_k(t) =$$

$$= \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \int\limits_0^{1-\delta/t_0} s^k \, (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \left(Y_m(ts;T_p) - Y_k(t;T_p)\right) U_0 \, ds +$$

$$+ \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \int\limits_{1-\delta/t_0}^{1} s^k \, (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \left(Y_m(ts;T_p) - Y_k(t;T_p)\right) U_0 \, ds \, .$$

В силу сильной непрерывности операторной функции $Y_k(t;T_p)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|Y_m(ts;T_p)U_0 - Y_k(t;T_p)U_0\| < \varepsilon$, если только $|1-s| < \delta/t_0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$ и пусть $M(t_0) = \sup_{[0,t_0]} \|Y_k(t;T_p)U_0\|$. Тогда

$$\|u_m(t) - u_k(t)\| \le \frac{2}{B\left((k+1)/2, (m-k)/2\right)} \times$$

$$\times \left(2M(t_0) \int\limits_0^{1-\delta/t_0} (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \, ds + \varepsilon \int\limits_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} \, ds \right) \le$$

$$\le \frac{4M(t_0)\, \Gamma((m+1)/2)}{\Gamma((k+1)/2)\, \Gamma((m-k)/2)} \left(\frac{2\delta}{t_0} - \frac{\delta^2}{t_0^2} \right)^{(m-k-2)/2} + \varepsilon \, .$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to k} \Gamma((m-k)/2 = \infty$, то, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, из последнего неравенства получим (5). ■

Аналогично доказываются и следующие две теоремы о разрешимости соответственно задач (2), (4) и (3), (4).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1 и* $U_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда равномерно по* $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ *для любого* $k \ge 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to k} v_m(t) = v_k(t) \, .$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 1 и*

$$S_0 U_0 = 0, \quad Q_j S_{j-1} F_{j-1} (I_1 - P_0) U_0 = 0 \, , \quad j = 1, \ 2, \ \ldots, p-1 \, .$$

Тогда равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$ *для любого* $k \ge 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to k} w_m(t) = w_k(t) \, .$$

В дальнейшем мы, используя результаты гл. 2 из [3], исследуем влияние на решение возмущений коэффициентов только для уравнения (1). Для уравнений (2) и (3) результаты формулируются и устанавливаются аналогично.

При $k \geq 0$ рассмотрим уравнение

$$(A - \varepsilon C)\left(t^k u'(t)\right)' = t^k B u(t) \tag{6}$$

с параметром $\varepsilon \in \mathbb{C},\ 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$.

Условие 2. Пусть $B,\ C \in L(E_1, E_2)$, а оператор A — линейный, замкнутый, фредгольмовый оператор, причём $\dim \ker A = 1$.

Отметим, что предположение $\dim \ker A = 1$ лишь упрощает изложение результатов. Пусть e — элемент из $\ker A$, $\varphi \in \operatorname{coker} A$. В одномерном пространстве $\operatorname{coker} A$ введём скалярное произведение $< \cdot, \cdot >$ так, чтобы $< \varphi, \varphi >= 1$.

В рассматриваемом случае лемма 1 из [1] формулируется следующим образом.

Лемма 1 [3]. *Пусть выполнено условие 2, $x \in D(A),\ y \in E_2$. Тогда уравнение $Ax = y$ эквивалентно системе*

$$< Q_0 y, \varphi >= 0, \quad x = H_0 y + ce,$$

где c — произвольная постоянная из $\mathbb{C}$.

Следуя [3] (п. 2.2.1), для $x \in E_1$ и $\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \|H_0 C\|^{-1}$ введём в рассмотрение операторы

$$K_0(\varepsilon)x = \varepsilon < Q_0 C x, \varphi >, \quad x \in E_1,$$

$$K_1(\varepsilon)x = \varepsilon < Q_0 C (I_1 - \varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 B x, \varphi > + < Q_0 B x, \varphi >,$$

$$K_j(\varepsilon) = K_{j-1}(I_1 - \varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 B, \quad j = 2, 3, \dots .$$

Введём также в рассмотрение элемент $\tau(\varepsilon) = (I_1 - \varepsilon H_0 C)^{-1} e$ и пусть r — минимальное число, при котором $K_r(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \neq 0$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \Upsilon(\varepsilon) u(t)\,, \tag{7}$$

где

$$\Upsilon(\varepsilon)x = (I_1 - \varepsilon H_0 C)^{-1} H_0 B x - \frac{K_{r+1}(\varepsilon)x}{K_r(\varepsilon)\tau(\varepsilon)}(I_1 - \varepsilon H_0 C)^{-1} e\,,$$

и при этом для $j = 1, 2, ..., r$ выполняются тождества

$$K_j(\varepsilon) u(t) \equiv 0\,. \tag{8}$$

Учитывая лемму 1, также как и в п. 2.2.1 [3] доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Решение задачи (6), (4) существует и единственно только тогда, когда существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $K_j(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \neq 0$ для $\varepsilon \in \mathbb{C}$ и таких, что $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_1 > 0$, а для U_0 выполнены условия согласования $K_j(\varepsilon)U_0 = 0,\ j = 1, 2, ..., r$. При этом решение имеет вид $u(t) = Y_k(t; \Upsilon(\varepsilon))U_0$ и обладает свойством (8).*

Из теоремы 1 [1] вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие 1. Решение задачи (6), (4) существует и единственно только том случае, когда при каждом* $\varepsilon \in \mathbb{C}: \ 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1$ *существует* $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ *такое, что оператор* $A - \varepsilon C - \lambda B$ *обратим при* $0 < |\lambda| < |\lambda_1|$.

Исследование обратимости оператора $A - \varepsilon C - \lambda B$ содержится в п. 2.2.2 [3], а поведение решения задачи (6), (4) при $\varepsilon \longrightarrow 0$ исследуется аналогично пункту 2.3.5 [3]. Отметим, что даже малая добавка εC может оказать существенное влияние на существование решения задачи (6), (4).

Наконец, рассмотрим случай сингулярного возмущения уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных, когда множителем при старшей производной вводится параметр $\varepsilon \longrightarrow +0$.

Теорема 6. *Пусть* $k > 0$, *выполнено условие 1 и* $U_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда равномерно по* $t \in [0, t_0]$ *решение задачи*

$$\varepsilon A U''(t) + \frac{k}{t} U'(t) = BU(t)\,, \quad U(0) = U_0\,, \quad U'(0) = 0 \tag{9}$$

стремится при $\varepsilon \longrightarrow +0$ *к решению задачи*

$$\frac{k}{t} V'(t) = BV(t)\,, \quad V(0) = U_0\,, \tag{10}$$

при этом $\|U(t) - V(t)\| = O(\varepsilon)$.

□ В силу теоремы 3 [1] и теоремы 3 из [4] решения задач (9) и (10) имеют вид

$$U(t) = Y_{k/\varepsilon}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}; T_p\right) U_0\,, \quad V(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2k} T_p\right) U_0\,,$$

и требуемое нам утверждение вытекает из теоремы 3 [5]. ■

Литература

1. Глушак А.В. Уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – Вып. 37. – С.5-18.
2. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352, № 5. – С.587-589.
3. Зубова С.П. Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений / Дис. докт. физ.-мат. наук. Белгород. 2013.
4. Зубова С.П., Чернышов К.И. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. – Вып. 14. Вильнюс. Институт физики и математики АН Литовской ССР. – 1976. – С.21-39.
5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математ. заметки. – 1999. – 66, вып.3. – С.364-371.

SOLUTIONS DEPENDENCE ON COEFFICIENTS OF EULER-POISSON-DARBOUX's EQUATION WITH FREDHOLM's OPERATOR AT DERIVATIVES

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is investigated the dependence of solutions of an abstract Euler-Poisson-Darboux equation with Fredholm's operator at the derivatives the equation coefficients.

Key words: abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, Fredholm's operator, perturbation.