УДК 51-74

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА КВАНТОВАНИЯ НА ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СУБОПОЛОСНОЙ МАТРИЦЫ

ASSESSMENT OF QUANTIZATION STEP ON THE SUBBAND MATRIX EIGENVECTORS ORTHOGONALITY

Д.В.Урсол, Ю.И.Киселёв
D.V.Ursol, Y.I.Kiselev

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: ursol@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной статье производится оценка ортогональности базиса на основе собственных векторов в зависимости от уровней квантования

Resume. This article evaluates the orthogonality of the basis depending on the quantization levels of subband matrix eigenvectors.

Ключевые слова: оценка уровня квантования, субполосные матрицы, ортогональность, базисные функции.
Keywords: assessment of the level of quantization, subband matrix, orthogonality, basis functions.

Введение

Для формирования цифровых сигналов и их обработки используются вычислительные устройства, будь то микроконтроллер, программируемая логическая интегральная схема или сигнальный процессор. Такой элемент должен обеспечивать должную скорость формирования и обработки данных. Процессор по формированию сигналов работает с данными, хранящимися в оперативной памяти или другом запоминающем устройстве. Однако скорость работы оперативной памяти и процессора существенно различаются: если бы процессор напрямую общался с оперативной памятью (читал или записывал данные), то большую часть времени попросту простаивал бы. Именно для сокращения задержек доступа к оперативной памяти и применяется кэш-память, которая значительно более скоростная в сравнении с оперативной. . Фактически если оперативная память используется для того, чтобы сгладить задержки доступа к данным на накопителе, то кэш-память процессора применяется для нивелирования задержек доступа к самой оперативной памяти. Для того, чтобы кэш процессора мог выполнять свою основную задачу он должен работать гораздо быстрее, чем оперативная память.

Для обработки и форматирования оптимальных канальных сигналов [1], с точки зрения минимального уровня внеполосного излучения, требуется скорость обработки превышающая скорость потока данных, поэтому требуется хранить базисные вектора в быстро доступным для процессора месте. Так как оперативная память просто не успеет справиться с поступающими в неё данными то необходимо будет использовать кэш-память, но у кэш-памяти есть и свои минусы, она имеет небольшой объем и размещается непосредственно на процессорном кристалле.

В связи с этим появляется необходимость сжатия и оптимизации базисных функций для возможности хранения в запоминающем устройстве. В данной статье рассматривается одним из методов уменьшение битового объема информации с помощью квантования по уровню.

Экспериментальная часть

Из [1] известно, что субполосный базис обладает свойствами оптимальности с точки зрения минимального уровня внеполосного излучения. В качестве исследуемых сигналов были выбраны собственные векторы субполосных матриц. Свойство ортогональности собственных векторов позволяет записать равенство:

$$Q^t \cdot Q = 1 \tag{1}$$

где матрица $Q_1 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots \vec{q}_J\}$ имеет размерность $[N \times J]$.

Поэтому восстановление передаваемой информации может быть осуществлено на основе операции:

$$\vec{e} = Q^T \times \vec{x} = Q^T \times Q^T \times \vec{e} = 1 \times \vec{e} \tag{2}$$

В реальных условиях, однако, необходимо формировать непрерывные сигналы, а не дискретные. Для этого естественно воспользоваться аналогией вида:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{J}e_i q_i(t), t\in[0,T] \tag{3}$$

где $q(t)$ - собственные функции субполосного ядра [2] вида:

$$A(t-t_1)=(\sin[\Omega_2(t-t_1)]-\sin[\Omega_2(t-t_1)])/\pi(t-t_1) \tag{4}$$

так, что по определению должно выполняться равенство:

$$\lambda_i q_i(t)=\int_o^T A(t-t_1)q_i(t_1)dt_1 \tag{5}$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 границы частотного интервала в Герцах.

Вычисления показывают, что одному и тому же собственному числу соответствуют две ортогональных собственных функции, модули трансформант Фурье которых не отличаются. Поэтому представляется целесообразным использовать аппроксимации:

$$\hat{q}_{2k-1}(t)=u_k(t)\cos(\Omega_c t) \tag{6}$$

$$\hat{q}_{2k}(t)=u_k(t)\sin(\Omega_c t) \tag{7}$$

$$\lambda_я u_k=\int_0^T A_0(t-\tau)u_k(\tau)d\tau \tag{8}$$

$$A_0(\tau)=\sin\left[\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\tau\right]/\pi \tag{9}$$

где $k=1,2,\ldots,J/2$;

$$\Omega_c=(\Omega_2-\Omega_1)/2 \tag{10}$$

$$J=(\Omega_2-\Omega_1)T/2\pi \tag{11}$$

причем предполагается выполнение условия

$$(\Omega_2-\Omega_1)T/2\pi\succ 8 \tag{12}$$

так как, только в этом случае будет порядка $J/2$ собственных чисел мало отличающихся от единицы.

Для вычисления аппроксимаций собственных функций согласно соотношению (5) следует использовать квадратурную формулу, например прямоугольников:

$$\lambda_i q_i(k\Delta t)=\Delta t\sum_{n=0}^{N}A(\Delta t(k-n))q_i(n\Delta t)) \tag{13}$$

выбрав достаточно малый шаг дискретизации

$$\Delta t=T/N \tag{14}$$

Целью дальнейшего является исследование, с точки зрения эффективности формирования канальных сигналов, свойств предлагаемых аппроксимаций, а именно:

- возможность построения на этой основе ортогонального базиса;
- оценивание вероятностей ошибочных решений при приеме сигналов на основе правила и наоборот.

$$z_i=\int_0^T \hat{x}(t)\hat{q}_i(t)dt\succ 0\Rightarrow e_i=1 \tag{15}$$

Здесь $\hat{\bar{x}}=\bar{x}+\bar{\varepsilon}$.

Естественно, что как при формировании так и при обработке канальных сигналов интегралы заменяются суммами, что означает дискретизацию в том числе и огибающих. Поэтому собственные функции выполняются в дискретном наборе точек согласно (5).

В таблице 1 приведены результаты вычислений при выполнении неравенства (10) скалярных произведений аппроксимаций вида (6) и (7). Легко понять, что получаемый таким образом базис будет ортогональным.

Таблица 1
Table 1

Полученная (исходная) матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов
The resulting (default) matrix of scalar products eigenvectors

	$\hat{\vec{q}}_1$	$\hat{\vec{q}}_2$	$\hat{\vec{q}}_3$	$\hat{\vec{q}}_4$	$\hat{\vec{q}}_5$	$\hat{\vec{q}}_6$	$\hat{\vec{q}}_7$	$\hat{\vec{q}}_8$	$\hat{\vec{q}}_9$	$\hat{\vec{q}}_{10}$
$\hat{\vec{q}}_1$	1,0e+00	2,9e-16	4,9e-16	-9,8e-17	6,1e-17	2,7e-17	-9,1e-18	8,4e-17	-6,8e-17	-7,0e-17
$\hat{\vec{q}}_2$	2,9e-16	1,0e+00	-3,3e-17	-8,2e-17	-8,6e-17	-1,9e-17	5,7e-17	-3,0e-17	1,5e-17	9,3e-17
$\hat{\vec{q}}_3$	4,9e-16	-3,3e-17	1,0e+00	3,5e-17	9,7e-17	2,3e-16	1,5e-17	-9,5e-17	-5,8e-17	8,5e-17
$\hat{\vec{q}}_4$	-9,8e-17	-8,2e-17	3,5e-17	1,0e+00	-3,8e-17	5,6e-17	-4,7e-17	3,3e-18	4,6e-17	-1,5e-16
$\hat{\vec{q}}_5$	6,1e-17	-8,6e-17	9,7e-17	-3,8e-17	1,0e+00	-1,5e-16	7,0e-17	7,6e-17	6,0e-17	9,9e-18
$\hat{\vec{q}}_6$	2,7e-17	-1,9e-17	2,3e-16	5,6e-17	-1,5e-16	1,0e+00	-9,7e-17	4,9e-17	-5,9e-17	-6,3e-18
$\hat{\vec{q}}_7$	-9,1e-18	5,7e-17	1,5e-17	-4,7e-17	7,0e-17	-9,7e-17	1,0e+00	6,9e-18	4,2e-17	3,5e-17
$\hat{\vec{q}}_8$	8,4e-17	-3,0e-17	-9,5e-17	3,3e-18	7,6e-17	4,9e-17	6,9e-18	1,0e+00	-7,6e-17	-4,9e-17
$\hat{\vec{q}}_9$	-6,8e-17	1,5e-17	-5,8e-17	4,6e-17	6,0e-17	-5,9e-17	4,2e-17	-7,6e-17	1,0e+00	-3,9e-16
$\hat{\vec{q}}_{10}$	-7,0e-17	9,3e-17	8,5e-17	-1,5e-16	9,9e-18	-6,3e-18	3,5e-17	-4,9e-17	-3,9e-16	1,0e+00

Для проведения экспериментов по изменению уровня квантования собственных функций субполосной матрицы Q был использован математический пакет MatLab.

Квантование по уровню является процессом преобразования сигнала по множеству в сигнал с конечным числом значений и непосредственно связано с операцией округления, реализуемой нелинейным элементом, называемым шагом квантование.

Шаг квантования определяет число уровней квантования или разрешающую способность ЦАП. Для нахождения шага квантования была использована операция:

$$\Delta = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^m} \tag{16}$$

где m – разрядность квантования, а $U_{\max}$ и $U_{\min}$ определяются :

$$U_{\max} = \max(Q(n, j)), n = 1,2,\ldots,N, j = 1,2,\ldots,J \tag{17}$$

$$U_{\min} = \min(Q(n, j)), n = 1,2,\ldots,N, j = 1,2,\ldots,J \tag{18}$$

где $Q(n, j)$ - элемент матрицы с размерностью $[N \times J]$.

Для осуществления операции квантования необходимо выполнить следующее:

$$Q^*(n, j) = sign[Q(n, j)][\frac{Q(n, j)}{\Delta} + 0.5], n = 1,2,\ldots,N, j = 1,2,\ldots,J \tag{19}$$

Изменяя таким образом m (разрядность квантования), т.е. изменяя шаг квантования, были получены различные значения скалярного произведения собственных векторов субполосной матрицы Q.

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q, размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_д = 3.27кГц$
- Ширина полосы - $B_w = 1кГц$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16,8,4,2]$

В таблице 2 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 16$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 2
Table 2

Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов при уровне квантования m=16
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization m = 16

	$\hat{\vec{q}}_1$	$\hat{\vec{q}}_2$	$\hat{\vec{q}}_3$	$\hat{\vec{q}}_4$	$\hat{\vec{q}}_5$	$\hat{\vec{q}}_6$	$\hat{\vec{q}}_7$	$\hat{\vec{q}}_8$	$\hat{\vec{q}}_9$	$\hat{\vec{q}}_{10}$
$\hat{\vec{q}}_1$	0,9312	4,8e-03	4,8e-03	2,7e-03	8,0e-03	1,0e-02	1,7e-03	1,3e-02	1,4e-02	9,4e-03
$\hat{\vec{q}}_2$	4,8e-03	0,8964	-2,0e-2	-1,5e-2	-5,8e-3	-9,9e-3	-1,3e-2	-6,6e-3	-5,3e-3	-6,8e-03
$\hat{\vec{q}}_3$	4,8e-03	-2,0e-2	0,8979	-1,4e-2	-3,9e-3	-5,0e-3	-1,3e-2	-7,1e-03	-1,2e-3	-6,2e-03
$\hat{\vec{q}}_4$	2,7e-03	-1,5e-2	-1,4e-2	0,8976	-6,7e-3	-9,0e-3	-1,1e-02	-6,4e-3	-6,0e-4	-3,0e-03
$\hat{\vec{q}}_5$	8,0e-03	-5,8e-3	-3,9e-3	-6,7e-3	0,9138	-7,0e-4	-4,1e-3	-7,0e-4	3,5e-03	0,0e+00
$\hat{\vec{q}}_6$	1,0e-02	-9,9e-3	-5,0e-3	-9,0e-3	-7,0e-4	0,9059	-1,1e-02	-1,2e-3	5,3e-03	3,3e-03
$\hat{\vec{q}}_7$	1,7e-03	-1,3e-2	-1,3e-2	-1,1e-02	-4,1e-3	-1,1e-02	0,8976	-5,9e-3	9,0e-04	-6,0e-03
$\hat{\vec{q}}_8$	1,3e-02	-6,6e-3	-7,1e-03	-6,4e-3	-7,0e-4	-1,2e-4	-5,9e-3	0,907	7,9e-03	1,5e-03
$\hat{\vec{q}}_9$	1,4e-02	-5,3e-3	-1,2e-3	-6,0e-4	3,5e-03	5,3e-03	9,0e-04	7,9e-03	0,9208	6,6e-03
$\hat{\vec{q}}_{10}$	4,7e-05	-4,2e-5	-2,0e-5	-3,2e-5	-4,5e-6	-2,6e-6	-3,7e-5	-8,4e-6	2,5e-05	9,40e-3

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q, размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_д = 3.27 кГц$
- Ширина полосы - $B_w = 1 кГц$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16,8,4,2]$

В таблице 3 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 8$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 3
Table 3

Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов при уровне квантования m=8
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization m = 8

	$\hat{\vec{q}}_1$	$\hat{\vec{q}}_2$	$\hat{\vec{q}}_3$	$\hat{\vec{q}}_4$	$\hat{\vec{q}}_5$	$\hat{\vec{q}}_6$	$\hat{\vec{q}}_7$	$\hat{\vec{q}}_8$	$\hat{\vec{q}}_9$	$\hat{\vec{q}}_{10}$
$\hat{\vec{q}}_1$	0,9991	0,0029	-0,0030	0,0011	0,0005	-0,0025	0,0029	-0,0028	0,0004	-0,0003
$\hat{\vec{q}}_2$	0,0029	0,9945	0,0036	-0,0003	-0,0075	-0,0001	-0,0015	0,0005	-0,0002	-0,0001
$\hat{\vec{q}}_3$	-0,0030	0,0036	0,9928	-0,0011	0,0000	-0,0021	-0,0006	0,0000	-0,0022	0,0013
$\hat{\vec{q}}_4$	0,0011	-0,0003	-0,0011	0,9958	-0,0019	0,0035	0,0035	0,0008	0,0027	-0,0049
$\hat{\vec{q}}_5$	0,0005	-0,0075	0,0000	-0,0019	0,9886	-0,0024	-0,0028	0,0019	-0,0001	-0,0034
$\hat{\vec{q}}_6$	-0,0025	-0,0001	-0,0021	0,0035	-0,0024	0,9955	0,0006	0,0013	0,0014	-0,0032
$\hat{\vec{q}}_7$	0,0029	-0,0015	-0,0006	0,0035	-0,0028	0,0006	0,9989	-0,0014	0,0005	-0,0002
$\hat{\vec{q}}_8$	-0,0028	0,0005	0,0000	0,0008	0,0019	0,0013	-0,0014	0,9952	0,0010	-0,0023
$\hat{\vec{q}}_9$	0,0004	-0,0002	-0,0022	0,0027	-0,0001	0,0014	0,0005	0,0010	0,9927	0,0000
$\hat{\vec{q}}_{10}$	-0,0003	-0,0001	0,0013	-0,0049	-0,0034	-0,0032	-0,0002	-0,0023	0,0000	0,9911

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q, размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_д = 3.27 кГц$
- Ширина полосы - $B_w = 1 кГц$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16,8,4,2]$

В таблице 4 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 4$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 4
Table 4

Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов при уровне квантования m=4
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization m = 4

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	$\hat{q}_3$	$\hat{q}_4$	$\hat{q}_5$	$\hat{q}_6$	$\hat{q}_7$	$\hat{q}_8$	$\hat{q}_9$	$\hat{q}_{10}$
$\hat{q}_1$	0,7762	0,0140	-0,0629	-0,0070	-0,0210	0,0210	-0,0490	-0,0070	-0,0350	-0,0140
$\hat{q}_2$	0,0140	0,8112	0,0070	-0,0070	-0,0280	-0,0699	0,0490	0,0420	0,0839	0,0140
$\hat{q}_3$	-0,0629	0,0070	0,7832	-0,0210	0,0070	0,0140	-0,0280	-0,0210	0,0140	-0,0350
$\hat{q}_4$	-0,0070	-0,0070	-0,0210	0,7902	-0,0070	0,0559	0,0559	-0,0140	-0,0420	0,0559
$\hat{q}_5$	-0,0210	-0,0280	0,0070	-0,0070	0,7762	-0,0210	0,0070	-0,0070	0,0420	0,0000
$\hat{q}_6$	0,0210	-0,0699	0,0140	0,0559	-0,0210	0,7483	0,0000	0,0070	-0,0140	-0,0420
$\hat{q}_7$	-0,0490	0,0490	-0,0280	0,0559	0,0070	0,0000	0,8112	0,0140	0,0979	0,0070
$\hat{q}_8$	-0,0070	0,0420	-0,0210	-0,0140	-0,0070	0,0070	0,0140	0,7692	0,0000	0,0000
$\hat{q}_9$	-0,0350	0,0839	0,0140	-0,0420	0,0420	-0,0140	0,0979	0,0000	0,8531	0,0000
$\hat{q}_{10}$	-0,0140	0,0140	-0,0350	0,0559	0,0000	-0,0420	0,0070	0,0000	0,0000	0,9231

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q, размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_o = 3.27 кГц$
- Ширина полосы - $B_w = 1 кГц$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16,8,4,2]$

В таблице 5 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 2$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 5
Table 5

Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов при уровне квантования m=2
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization m = 2

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	$\hat{q}_3$	$\hat{q}_4$	$\hat{q}_5$	$\hat{q}_6$	$\hat{q}_7$	$\hat{q}_8$	$\hat{q}_9$	$\hat{q}_{10}$
$\hat{q}_1$	0,8333	0,1667	0,0000	-0,2500	0,0000	-0,0833	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_2$	0,1667	0,8333	-0,0833	0,0000	-0,2500	-0,2500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_3$	0,0000	-0,0833	0,7500	0,0000	0,2500	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_4$	-0,2500	0,0000	0,0000	0,9167	0,0833	-0,0833	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_5$	0,0000	-0,2500	0,2500	0,0833	0,9167	-0,0833	0,0833	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_6$	-0,0833	-0,2500	-0,1667	-0,0833	-0,0833	0,9167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\hat{q}_7$	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000	0,0833	0,0000	0,7500	0,0000	-0,1667	0,0000
$\hat{q}_8$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,1667
$\hat{q}_9$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1667	0,0000	0,6667	0,0000
$\hat{q}_{10}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1667	0,0000	0,6667

Заключение

По результатам скалярных произведений собственных векторов, приведенных в таблице следует, что искажения полученных данных, вызванные квантованием по уровню 2^{16}, являются допустимыми. При уровне квантования 2^8 выявляются заметные, но также допустимые искажения. Начиная с 2^4 уровня квантования и ниже искажения не позволяют использовать такой базис для формирования и обработки сигналов.

Список литературы
References

1. Жиляков Е,Г., Белов С.П., Урсол Д.В. Оптимальные канальные сигналы при цифровой передаче с частотным уплотнением - Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – № 7(62), Вып. 10/1 2009. - с.166 – 172.

Zhilyakov E.G., Belov S.P., Ursol D.V. Optimalniye kanalniye signaly pri cifrovoj peredache s chastotnym uplotneniem - Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika - № 7(62), Vyp. 10/1 2009. - s.166 – 172.

2. Жиляков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: моногр. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

ZHilyakov E.G. Variacionnye metody analiza i postroeniya funkcij po ehmpiricheskim dannym: monogr. – Belgorod: Izd-vo BelGU, 2007. – 160 s.

3. Кузнецов М.А., Абатуров П.С., Никодимов И.Ю., Певцов Н.В., Рыжков А.Е., Сиверс М.А. GPRS – технология пакетной передачи данных в сетях GSM СПб: Судостроение, 2002. – 144с.

Kuznecov M.A., Abaturov P.S., Nikodimov I.YU., Pevcov N.V., Ryzhkov A.E., Sivers M.A. GPRS – tekhnologiya paketnoj peredachi dannyh v setyah GSM SPb: Sudostroenie, 2002. – 144s.