РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ, 1999, том 26, № 3, с. 264–270

РЕСУРСЫ, РЕЖИМ ВОД СУШИ, ПРОГНОЗ ИХ ИЗМЕНЕНИЙ

УДК 551.468

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ПРИБРЕЖНЫХ МОРСКИХ ЭКОТОНАХ

© 1999 г. В. М. Московкин

Харьковский государственный университет
301077 Харьков, пл. Свободы, 4

Поступила в редакцию 25.02.97 г.

Развита модель динамики береговой экогеосистемы обломочный материал – биомасса донного биоценоза с учетом процесса продуцирования биогенного пляжеобразующего материала. Определены условия возникновения бифуркации Хопфа в рассматриваемой системе. Построена математическая модель баланса наносов береговой зоны терригенно-биогенного типа в виде динамической системы четвертого порядка. Для одного частного двумерного случая этой системы получены условия возникновения бифуркации Хопфа, т.е. автоколебательных режимов.

В связи с проблемой экотонов возникает задача моделирования динамики и устойчивости прибрежных экосистем в узкой контактной (береговой) зоне, где наиболее сильно проявляются абразионные и другие литодинамические процессы. В области моделирования таких процессов в береговой зоне с помощью балансовых динамических моделей достигнуты определенные успехи [3, 4, 7, 8]. Однако большие сложности возникают здесь при учете биологических факторов, например биомассы донного биоценоза и продуцирования биогенного обломочного материала. В данной статье делается попытка учета этих факторов в рамках математических моделей динамических систем.

Рассмотрим линейное уравнение баланса обломочного наносообразующего материала в береговой зоне [7], в котором дополнительно учтем биогенную продукцию этого материала, а коэффициент его истираемости за счет волнового воздействия поставим в линейную зависимость от биомассы донного биоценоза [6]:

$$\frac{dW}{dt} = aH\gamma(W_m - W) - \left[C_0\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) + C_{\min}\right]W + u + \delta B, \qquad (1)$$

где W, м^3 – объем пляже- и наносообразующего обломочного материала (начиная с песчаных фракций) на единицу длины береговой линии ($0 \le W \le W_m$); a – доля пляже- и наносообразующего материала в породах, слагающих берег ($0 < a < 1$); H, м – высота берегового уступа; u, м^2/год – интенсивность поступления ($u > 0$) или уноса ($u < 0$) материала за счет естественных (транспорт наносов течениями) или искусственных (подсыпка, изъятие) факторов; B, т/м – биомасса донного биоценоза на единицу ширины абразионной отмели (шельфа) ($0 \le B \le B_{\max}$); δ, м^3/(т год) – коэффициент биогенного продуцирования обломочного материала (количество обломочного материала, получаемого из 1 т биомассы в год); $\gamma(W_m - W)$, м/год – скорость отступания берегового уступа, $\gamma = \mathrm{const} > 0.1$ (м год)$^{-1}$; C_0, $C_{\min} = \mathrm{const} > 0$, год$^{-1}$; $k = C_0\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) + C_{\min}$ – коэффициент истираемости материала, год$^{-1}$ (линейная аппроксимация между двумя характерными его значениями: $k(B = 0) = k_{\max} = C_0 + C_{\min}$, $k(B = B_{\max}) = k_{\min} = C_{\min}$); t, год – время.

Для замыкания уравнения (1) введем для динамики биомассы уравнение [6]

$$\frac{dB}{dt} = K_1 B\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - K_2 W, \qquad (2)$$

в основу которого положены следующие экологические и литодинамические особенности рассматриваемого процесса:

известный в экологии саморегулируемый рост биомассы, описываемый уравнением Ферхюльста (при $K_2 = 0$), его решение – выпукло-вогнутая логистическая кривая, выходящая на стационарный уровень $B = B_{\max}$;

уменьшение прироста биомассы при увеличении объема обломочного материала в береговой зоне (он способствует угнетению и деградации донного биоценоза).

Переходя к безразмерным переменным ($t' = K_1 t$, $B' = B/B_{\max}$, $W' = W/W_m$), получаем нелинейную динамическую систему второго порядка, которая ранее была проанализирована при $\tilde{K}_5 = 0$, т.е. в отсутствие продуцирования биогенного материала [6]:

$$\frac{dW'}{dt'} = -\tilde{K}_1 W' + \tilde{K}_2 B'W' + \tilde{K}_5 B' + \tilde{K}_3,$$

$$\frac{dB'}{dt'} = B'(1 - B') - \tilde{K}_4 W',$$

$$\tilde{K}_1 = \frac{1}{K_1}(aH\gamma + C_0 + C_{\min}) > 0, \qquad (3)$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{C_0}{K_1} > 0, \quad \tilde{K}_3 = \frac{aH\gamma}{K_1} + \frac{u}{K_1 W_m} \gtrless 0,$$

$$\tilde{K}_4 = \frac{K_2 W_m}{K_1 B_{\max}} > 0, \quad \tilde{K}_5 = \frac{\delta B_{\max}}{K_1 W_m} > 0.$$

Координаты особых точек системы (3) определяются из выражений

$$W'_* = \frac{B'_*\left(1 - B'_*\right)}{\tilde{K}_4}, \quad B'_* = \frac{\tilde{K}_1 W'_* - \tilde{K}_3}{\tilde{K}_5 + \tilde{K}_2 W'_*},$$

$$0 \le B'_* \le \frac{\tilde{K}_1 - 4\tilde{K}_3\tilde{K}_4}{\tilde{K}_2}, \quad 0 \le W'_* \le \frac{1}{4\tilde{K}_4} \le 1, \qquad (4)$$

$$0 \le \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_1} \le W'_* \le \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2} \le 1, \quad \tilde{K}_1 > \tilde{K}_2.$$

Значения W'_* с помощью параметр системы (3) определяются из решения кубического уравнения

$$(W'_*)^3 + \frac{[2\tilde{K}_2\tilde{K}_4\tilde{K}_5 + \tilde{K}_1(\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2)]}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4}(W'_*)^2 + \frac{[\tilde{K}_4\tilde{K}_5^2 - \tilde{K}_1\tilde{K}_5 + \tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)]}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4}W'_* + \frac{\tilde{K}_3^2 + \tilde{K}_3\tilde{K}_5}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4} = 0.$$

Матриц линеаризованной системы (3) имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 B'_* & \tilde{K}_2 W'_* + \tilde{K}_5 \\ -\tilde{K}_4 & 1 - 2B'_* \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Из условия $\det\tilde{A} = 0$ определяется бифуркационное множество для точек седлового типа (граница седел) [2]. Для поиска бифуркации рождения цикла приравняем след матриц (5) нулю:

$$\mathrm{tr}\tilde{A} = 1 - \tilde{K}_1 - 2B'_* + \tilde{K}_2 B'_*. \qquad (6)$$

Отсюда

$$0 \le B'_* = \frac{\tilde{K}_1 - 1}{\tilde{K}_2 - 2} \le 1, \quad 0 \le \tilde{K}_2 \le \tilde{K}_1, \qquad (7)$$

$$\det\tilde{A} = [(\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1)\tilde{K}_1(\tilde{K}_2 + 4) + \tilde{K}_2(1 - 2\tilde{K}_2) + \lambda_0\tilde{K}_5(\tilde{K}_2 - 2)^2]/(\tilde{K}_2 - 2)^2, \qquad (8)$$

$$\lambda_0 = \tilde{K}_{4\text{биф}} = [(\tilde{K}_1 - 1)(\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1 - 1)(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)]/(\tilde{K}_2 - 2)^2 \times [\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2) + \tilde{K}_5(\tilde{K}_1 - 1)]. \qquad (9)$$

Последнее выражение (граница устойчивости узлов и фокусов [2]) получено из (4), (6). С учетом (7) и положительности бифуркационного параметра λ_0 получим, что

$$\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2) + \tilde{K}_5(\tilde{K}_1 - 1) < 0 \longleftrightarrow \tilde{K}_3 > \frac{(1 - \tilde{K}_1)\tilde{K}_5}{\tilde{K}_2 - 2} < 0.$$

Для осуществления бифуркации рождения цикла необходимо, чтобы соблюдались условия $\det\tilde{A} > 0$ и $0 \le \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \le 1$

или

$$\frac{-(4\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2^2 + 1 - 4\tilde{K}_5\lambda_0) + \sqrt{D}}{2(\tilde{K}_1 - 2 + \tilde{K}_5\lambda_0)} < \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \qquad (10)$$

при $\tilde{K}_2 - 2 + \tilde{K}_5\lambda_0 < 0$ и $0 \le \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \le 1$ при $\tilde{K}_2 - 2 + \tilde{K}_5\lambda_0 > 0$ (здесь $\tilde{K}_5\lambda_0 \ge 1$), $D = (4\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1^2 + 1 - 4\tilde{K}_5\lambda_0)^2 + 16(\tilde{K}_1^2 - \lambda_0\tilde{K}_5)(\tilde{K}_1 - 2 + \lambda_0\tilde{K}_5)$.

При увеличении $\tilde{K}_5$ от нуля (отсутствие поступления материала биогенного происхождения) криволинейная область ($\det\tilde{A} > 0$) в треугольнике $0 \le \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \le 1$ постепенно увеличивается и при $\tilde{K}_2 - 2 + 2\tilde{K}_5\lambda_0 > 0$ покрывает его полностью. Сама бифуркация происходит на граничной бифуркационной кривой (9), проходящей через вышеуказанную область параметров $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$.

С помощью аналитико-вычислительной техники [11] получены (в обозначениях этой работы) характеристики предельного цикла:

$$\mathrm{Re}\,C_1(0) = \frac{A}{8\tilde{\gamma}^2}\left(1 + \frac{A^2}{\tilde{\gamma}^2}\right)(2 + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_2^2) > 0,$$

$$A = \frac{\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2 - 2} > 0, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\sqrt{\det\tilde{A}}}{|\tilde{K}_2 - 2|}$$

($\det\tilde{A}$ – вычисляется по формуле (8)),

$$\operatorname{Im}C_1(0) = -\frac{(\tilde{K}_2+1)}{8\tilde{\gamma}^3}(4A^2+\tilde{\gamma}^2+3A^2\tilde{K}_2^2) -$$

$$-\frac{1}{24}(\tilde{K}_2+1)\left(1+\frac{2A^2}{\tilde{\gamma}^2}+\frac{10A^4}{\tilde{\gamma}^4}\right)<0,$$

$$\mu_2 = -\operatorname{Re}C_1(0)/\alpha'(0), \quad \beta_2 = 2\operatorname{Re}C_1(0)>0,$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\tilde{\gamma}}\left[\operatorname{Im}C_1(0)-\frac{\operatorname{Re}C_1(0)}{\alpha'(0)}\omega'(0)\right],$$

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\gamma}}(1+\tau_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)), \quad \varepsilon^2 = \frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_2}+O(\lambda-\lambda_0)^2,$$

$$\alpha(\lambda) = \operatorname{Re}\lambda_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{A},$$

$$\omega(\lambda) = \operatorname{Im}\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4\det\tilde{A}-(\operatorname{tr}\tilde{A})^2}>0,$$

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha(\lambda)+i\omega(\lambda), \quad \lambda = \tilde{K}_4.$$

Выражения для $\alpha'(0)$ и $\omega'(0)$ через параметры модели ввиду их громоздкости не приводятся.

Так как показатель Флоке β больше нуля, то предельный цикл неустойчив. Период предельного цикла T при увеличении $\tilde{K}_5$ от 0 до ∞ (при $\varepsilon^2 \approx 0$) уменьшается от $T_0 = 2\pi/\tilde{\gamma}_0$ до

$$T(\tilde{K}_5=\infty) = 2\pi\Big/\sqrt{\tilde{\gamma}_0^2+\frac{(\tilde{K}_2-\tilde{K}_1-1)(\tilde{K}_2-2\tilde{K}_1)}{(\tilde{K}_2-2)^2}},$$

где $\tilde{\gamma}_0^2$ определяется по формуле (8) при $\tilde{K}_5 = 0$ (получено из (8), (9) при $\tilde{K}_5 \longrightarrow \infty$).

При $\tilde{K}_5 = 0$, $K_1 = 0.5–0.6$ год$^{-1}$, когда $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ лежат в сегменте (10), получим $\tilde{\gamma} \approx 0.1–0.2$. Следовательно, размерный период колебаний T при $\varepsilon^2 \approx 0$ составит $2\pi/\tilde{\gamma}K_1 \approx 50–100$ лет. При $\tilde{K}_5 > 0$ этот период может уменьшиться на порядок.

Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы может быть получено по предложенной в [11] схеме.

Для реальных значений исходных размерных параметров $C_0 = 0.05$ год$^{-1}$, $C_{min} = 0.01$ год$^{-1}$ (интенсивность истирания гальки 1–6% в год), $a = 0.02$, $\gamma = 1/3$ (м год)$^{-1}$, $H = 3$ м, $W_m = 30$ м^2 (условия рыхлых глинистых пород в районе м. Бурнас, Черное море, Украина), $K_1 = 0.6$ год$^{-1}$ (прирост биомассы в отсутствие обломочного материала при малых значениях биомассы B составляет 60% в год), $\delta = 0$ по формуле (9) получим

$$\tilde{K}_{4\text{биф}} = \frac{0.02369}{\tilde{K}_3}>0.$$

Отсюда с учетом $\tilde{K}_3 > 0$ получим $u > -0.5989$ м^2/год [6].

Таким образом, бифуркация Хопфа в данном случае возникает при подпитке материала или его уносе (изъятии) с интенсивностью, не превышающей 0.6 м^2/год. Отметим, что точка $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = (0.13333, 0.08333)$ находится в сегменте (10).

Поиск устойчивых предельных циклов (установившихся автоколебаний), возникающих при бифуркации Хопфа, следует вести для балансового уравнения (1) при нелинейных функциях интенсивностей абразии клифа и истираемости наносообразующего материала от W. В наиболее общем виде они могут иметь вид [4]

$$f(W) = \frac{\tilde{B}(W+\tilde{\varepsilon})}{(W+\tilde{r})^2},$$

$$\varphi(W,B) = \left[C_0\left(1-\frac{B}{B_{max}}\right)+C_{min}\right]\frac{W}{(W+\gamma_1)}.$$

В [4] нелинейная функция вводилась без учета B. В этом случае аналитическая техника, предложенная в [5, 11] для поиска бифуркаций Хопфа, затруднена ввиду сложностей нахождения особых точек системы (1), (2) в явном виде. Вычислительные алгоритмы и программа BIFOR-2 [11] помогут решить эту задачу.

В модели (1), (2) при малых периодических неавтономных (зависящих от времени) возмущениях бифуркационного параметра возможно возникновение стохастических режимов ("странных аттракторов") [2].

Для проверки и уточнения данной модели, которая является развитием модели динамики морских береговых экосистем типа обломочный материал в береговой зоне – биомасса донного биоценоза, необходимо провести натурные литодинамические и гидробиологические исследования [6]. Дополнительно введем уравнение баланса взвесеобразующего материала и будем раздельно учитывать терригенный и биогенный наносообразующий (пляжеобразующий) материалы.

Качественная концептуальная модель (на структурном логическом уровне) баланса наносов береговой зоны терригенно-биогенного типа рассмотрена в [1]. Математико-регресионная модель этого баланса для условий Азовского моря в рамках имитационной модели бентоса предложена в [9].

Здесь сделана попытка построить математическую модель баланса наносов береговой зоны терригенно-биогенного типа в виде динамической системы четвертого порядка. Основные фазовые переменные в этой системе следующие: объемы терригенного W_T и биогенного W_B пляжеобразующих материалов в береговой зоне на единицу длины береговой линии, м^3/м; объем взвешенного вещества V_S, находящегося в водной толще береговой зоны в пересчете на единицу длины береговой линии, м^3/м; биомасса зообентоса (моллюсков-фильтраторов) B на единицу длины береговой линии, кг/м.

Уравнение баланса терригенного пляжеобразующего материала запишем согласно [4, 7] в виде

$$\frac{dW_T}{dt} = aHf(W_T+W_B)-\varphi_T W_T+u_1, \tag{11}$$

где $f(W_T + W_B)$ – скорость отступания клифа в зависимости от суммарного объема терригенного и биогенного материалов, м/год; $\varphi_T(W_T)$ – интенсивность истирания терригенного материала в береговой зоне в зависимости от его объема, м^2/год; u_1 – интенсивность поступления ($u_1 > 0$) или уноса ($u_1 < 0$) терригенного материала из береговой зоны за счет естественных (транспорт наносов течениями, твердый сток рек) или искусственных (подсыпка, изъятие) факторов, м^2/год.

Уравнение баланса биогенного пляжеобразующего материала в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\frac{dW_B}{dt} = \delta_1 B-\varphi_B(W_B), \tag{12}$$

где δ_1 – коэффициент продуктивности биогенного материала при отмирании зообентоса (объем биогенного материала, образующегося за год из 1 кг биомассы зообентоса); $\varphi_B(W_B)$ – интенсивность истирания биогенного пляжеобразующего материала, м^2/год.

Отметим, что удельная интенсивность истирания (для единичного объема материала) биогенного материала выше, чем терригенного ($\varphi_T < \varphi_B$).

Линейный характер функции продуктивности биогенного пляжеобразующего материала от биомассы моллюсков (Азовский кардиум) был получен при статистической обработке материалов натурных наблюдений на косах Бирючьей и Долгой (Азовское море) [1].

Уравнение динамики биомассы зообентоса (2) с учетом ввода новых переменных предлагается в виде

$$\frac{dB}{dt} = K_1B\left(1-\frac{B}{B^*}\right)-K_2W_T-K_3W_B+ \\ +K_4V_S\left(1-\frac{V_S}{V_S^*}\right), \tag{13}$$

где первый член связан с известным уравнением Ферхюльста при самоограничении роста биомассы

$$\lim_{t\to\infty}B(t) = B^* \quad \text{при} \quad K_2 = K_3 = K_4 = 0,$$

второй и третий члены показывают, что биомассы моллюсков сокращаются с разной скоростью ($K_2 \neq K_3$) для терригенного и биогенного материалов (подвижный обломочный материал в береговой зоне способствует угнетению зообентоса), четвертый член аналогичен по своей структуре первому члену и показывает, что при относительно малом количестве взвешенного вещество последний способствует росту биомассы зообентоса (моллюски используют взвешенное вещества в качестве питания), при $V_S < V_S^*$ скорость прироста биомассы уменьшается, а при $V_S > V_S^*$ происходит сокращение биомассы. Здесь K_1, K_2, K_3, K_4 = const > 0 (K_1, год$^{-1}$, K_2, K_3, K_4, кг/(м^3 год)).

Угнетение зообентоса при чрезмерном увеличении мутности воды связывается с уменьшением кислорода в водной толще (интенсивное его потребление свежевыпавшим детритом), забиванием взвесью створок (сифонов) моллюсков-фильтраторов, уменьшением потока солнечного света в толщину воды из-за плохой ее прозрачности, что снижает продуктивность фитопланктона, а следовательно, и зообентоса.

Уравнение баланса взвешенного в водной толще материала представим в виде

$$\frac{dV_S}{dt} = (1-a)Hf(W_T+W_B)+ \\ +\varphi_T(W_T)+\varphi_B(W_B)-\delta_2B-K_5V_S+u_2, \tag{14}$$

где первый член – интенсивность поступления взвесеобразующего материала с берегового уступа при его размыве, второй и третий – интенсивности поступления взвесеобразующего материала за счет истирания терригенного и биогенного материалов, четвертый – интенсивность изъятия взвешенного вещества в процессе биофильтрации, пятый – интенсивность седиментации взвешенного вещества, шестой – интенсивность поступления ($u_2 > 0$) или уноса ($u_2 < 0$) взвешенного вещества, м^2/год, обусловленная различными факторами (речной сток, аэрозольное осаждение, течения, техногенные воздействия и др.); δ_2 – коэффициент биофильтрации, м^3/(кг год); K_5 – коэффициент седиментации, год$^{-1}$, зависящий от плотности частиц, их дисперсного состава и других факторов.

Общий вид функций f и φ приведен в [4], но в первом приближении можно пользоваться и линейными функциями. При более строгом рассмотрении следует иметь в виду, что

$$f(W_T+W_B) = f_T(W_T)+f_B(W_B),$$

т.е. функции скоростей отступания берега от объемов терригенного и биогенного материалов могут различаться.

При линейных функциях f и φ система уравнений (11)–(14) примет вид

$$\begin{cases} dW_T/dt = aH\gamma(W_m - W_T - W_B) - k_T W_T + u_1, \\ dW_B/dt = \delta_1 B - k_B W_B, \\ dB/dt = K_1 B\left(1 - \dfrac{B}{B^*}\right) - \\ - K_2 W_T - K_3 W_B + K_4 V_S\left(1 - \dfrac{V_S}{V_S^*}\right), \\ dV_S/dt = (1-a)H\gamma(W_m - W_T - W_B) + k_T W_T + \\ + k_B W_B - \delta_2 B - K_5 V_S + u_2. \end{cases}$$

Перейдя к безразмерным переменным

$$t' = K_1 t,\ x = \frac{B}{B^*},\ y = \frac{k_B W_B}{\delta_1 B^*},\ z = \frac{V_S}{V_S^*},\ u = \frac{W_T}{W_m},$$

получим следующую динамическую систему четвертого порядка:

$$\begin{cases} dx/dt' = x(1-x) - \tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 z(1-z) - \tilde{K}_3 u, \\ dy/dt' = \tilde{K}_4(x-y), \\ dz/dt' = -\tilde{K}_5 x + \tilde{K}_6 y - \tilde{K}_7 z + \tilde{K}_8 u + \tilde{K}_9, \\ du/dt' = -\tilde{K}_{10} y - \tilde{K}_{11} u + \tilde{K}_{12}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\tilde{K}_1 = \frac{K_3\delta_1}{K_1 k_B},\ \tilde{K}_2 = \frac{K_4 V_S^*}{K_1 B^*},\ \tilde{K}_3 = \frac{K_2 W_m}{K_1 B^*},\ \tilde{K}_4 = \frac{k_B}{K_1},$$

$$\tilde{K}_5 = \frac{\delta_2 B^*}{K_1 V_S^*},\ \tilde{K}_6 = \frac{\delta_1 B^*}{K_1 V_S^*} - \frac{(1-a)H\gamma\delta_1 B^*}{k_B K_1 V_S^*},$$

$$\tilde{K}_7 = \frac{K_5}{K_1},\ \tilde{K}_8 = \frac{k_T W_m}{K_1 V_S^*} - \frac{W_m(1-a)H\gamma}{K_1 V_S^*},$$

$$\tilde{K}_9 = \frac{u_2}{K_1 V_S^*} + \frac{W_m(1-a)H\gamma}{K_1 V_S^*},\ \tilde{K}_{10} = \frac{aH\gamma\delta_1 B^*}{k_B K_1 W_m},$$

$$\tilde{K}_{11} = \frac{aH\gamma + k_T}{K_1},\quad \tilde{K}_{12} = \frac{aH\gamma}{K_1} + \frac{u_1}{K_1 W_m}.$$

При этом выполняется условие $W_T + W_B < W_m$, эквивалентное

$$u + \frac{\delta_1 B^*}{k_B W_m} y < 1.$$

Для системы (15) удается в явном виде определить координаты особых точек (x_*, y_*, z_*, u_*) в фазовом четырехмерном пространстве (x, y, z, u):

$$(x_*)_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\quad y_* = x_*,\quad z_* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_*,$$

$$u_* = \frac{\tilde{K}_{12} - \tilde{K}_{10} x_*}{\tilde{K}_{11}},$$

$$p = \frac{\tilde{K}_1 - 1 + \tilde{K}_2\varepsilon_2(\varepsilon_1 - 1) - \tilde{K}_3\tilde{K}_{10}/\tilde{K}_{11}}{1 + \tilde{K}_2(\varepsilon_2)^2},$$

$$q = \frac{\tilde{K}_2\varepsilon_1(\varepsilon_1 - 1) - \tilde{K}_3\tilde{K}_{12}/\tilde{K}_{11}}{1 + \tilde{K}_2(\varepsilon_2)^2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{K}_8\tilde{K}_{12} + \tilde{K}_9\tilde{K}_{11}}{\tilde{K}_7\tilde{K}_{11}},\quad \varepsilon_2 = \frac{\tilde{K}_6\tilde{K}_{11} - \tilde{K}_5\tilde{K}_1 - \tilde{K}_8\tilde{K}_{10}}{\tilde{K}_7\tilde{K}_{11}}.$$

Матрица линеаризованной системы (15) имеет ли вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 1 - 2x_* & -\tilde{K}_1 & \tilde{K}_2(1 - 2z_*) & \tilde{K}_3 \\ \tilde{K}_4 & -\tilde{K}_4 & 0 & 0 \\ -\tilde{K}_5 & \tilde{K}_6 & -\tilde{K}_7 & \tilde{K}_8 \\ 0 & -\tilde{K}_{10} & 0 & -\tilde{K}_{11} \end{vmatrix}.$$

След этой матрицы равен $\mathrm{tr}\tilde{A} = 1 - 2x_* - \tilde{K}_4 - \tilde{K}_7 - \tilde{K}_{11}$,

$$\det\tilde{A} = -\tilde{K}_4[\tilde{K}_2(1 - 2z_*)(K_{11}(K_6 - K_5) - \tilde{K}_8\tilde{K}_{10}) + \tilde{K}_7(\tilde{K}_3\tilde{K}_{10} + \tilde{K}_{11}(1 - 2x_* - \tilde{K}_1))].$$

Дальнейший анализ (15) довольно затруднителен даже при использовании аналитико-вычислительной техники [11].

В явном виде координаты особых точек определяются и для динамической системы третьего порядка в фазовом пространстве (x, y, z), что позволяет эффективно использовать аналитико-вычислительную технику [11] для поиска бифуркаций Хопфа и определения характеристик предельных циклов.

Чтобы проиллюстрировать возможности аналитико-вычислительной техники [5, 11], рассмотрим детально двумерный случай в фазовой плоскости (x, y):

$$\begin{cases} dx/dt' = x(1-x) - \tilde{K}_1 y, \\ dy/dt' = \tilde{K}_4(x - y). \end{cases}$$

Сделаем замены

$$x' = x - x_*,\ y' = y - y_*,\ \mu = \lambda - \lambda_0 = \tilde{K}_1 - \tilde{K}_{1\text{биф}}.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} dx'/dt' = x'(1 - 2x_*) - (\mu + \lambda_0)y' - (x')^2, \\ dy'/dt' = \tilde{K}_4(x' - y'), \end{cases} \quad (16)$$

где $x_* = y_* = 1 - \tilde{K}_1 > 0$ – ненулевая особая точка.

Матрица линеаризованной системы (16) в момент бифуркации Хопфа ($\mu = 0$) в обозначениях [5] примет вид

$$dX_0(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 - 2x_* & -\lambda_0 \\ \tilde{K}_4 & -\tilde{K}_4 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

где $\mathrm{tr}\,dX_0(0, 0) = 1 - 2x_* - \tilde{K}_4$. Следовательно, бифуркационное множество точек неседлового типа примет вид

$$\tilde{K}_4 = 2\tilde{K}_1 - 1 = 2\lambda_0 - 1,\quad 1/2 < \tilde{K}_1 = \lambda_0 < 1. \quad (18)$$

Детерминант нормированной (на $\tilde{K}_4$) матрицы (17) при бифуркации Хопфа должен быть положительным:

$$\det\tilde{X}_0(0, 0) = \tilde{\gamma}^2 = -1 + \lambda_0/\tilde{K}_4 > 0. \quad (19)$$

Собственные числа матрицы $d\tilde{X}_0(0, 0)$ имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm i\tilde{\gamma} = \pm i\sqrt{(\lambda_0/\tilde{K}_4) - 1},\quad \lambda_0 > \tilde{K}_4.$$

Собственный вектор этой матрицы (u_1) для собственного числа $\lambda_1 = i\tilde{\gamma}$ определяется из матричного уравнения

$$(d\tilde{X}_0(0, 0) - \lambda_1 I)u_1 = 0,$$

где I – единичная матрица. Отсюда получаем

$$u_1 = \hat{e}_1 + i\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1/\tilde{\gamma} \\ -1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Далее, выражение $X_0(x'\hat{e}_1 + y'\hat{e}_2) = X_0(x' - 1/\tilde{\gamma}, -y'/\tilde{\gamma})$ раскладывается по новому базису:

$$A(x', y')\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B(x', y')\begin{pmatrix} -1/\tilde{\gamma} \\ -1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} = $$
$$= X_0(x' - 1/\tilde{\gamma}, -y'/\tilde{\gamma}) = $$
$$= [\tilde{K}_4(x' - y'/\tilde{\gamma}) + \lambda_0 y'/\tilde{\gamma} - (x' - y'/\tilde{\gamma})^2, \tilde{K}_4 x'].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A(x', y') &= X^1(x', y') = \tilde{K}_4\tilde{\gamma}y' - (x' - y'/\tilde{\gamma})^2, \\ B(x', y') &= X^2(x', y') = -\tilde{K}_4\tilde{\gamma}x'. \end{aligned} \quad (20)$$

На основе выражений (20) определяется критерий устойчивости предельного цикла методом Марсдена и Мак-Кракена:

$$V'''(0) = \frac{3\pi(1 + \tilde{\gamma}^2)}{4\tilde{K}_4\tilde{\gamma}^5} > 0. \quad (21)$$

Так как этот критерий положительный, то возникающий при бифуркации предельный цикл неустойчив. Частота колебаний этого цикла равна $\omega_0 = \tilde{K}_4\tilde{\gamma}$.

Область параметров ($\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_4$), где возможна бифуркация Хопфа ($\det\tilde{X}(0, 0) > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$, $\tilde{K}_1 > 0$, $\tilde{K}_4 > 0$), представляет собой трапецию:

$$\tilde{K}_1 > \tilde{K}_4,\quad 1/2 < \tilde{K}_1 < 1.$$

Бифуркация возникает при прохождении прямой (18) в этой области. Аналитические характеристики этого предельного цикла определяются согласно [11]. Для этого делается замена

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\tilde{\gamma} \\ 0 & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix},$$

откуда

$$x' = \tilde{x} + \tilde{y}/\tilde{\gamma},\quad y' = \tilde{y}/\tilde{\gamma}.$$

Исходная система уравнений (16) в новых переменных при $\mu = 0$, $1 - 2x_* = \tilde{K}_4$ примет вид

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt' = -\tilde{K}_4\tilde{\gamma}\tilde{y} - \tilde{x}^2 - (\tilde{y}/\tilde{\gamma})^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}/\tilde{\gamma} = F_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ d\tilde{y}/dt' = \tilde{K}_4\tilde{\gamma}\tilde{x} = F_2(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{cases}$$

На основе функций F_1 и F_2 при $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ определяются характеристики g_{11}, g_{02}, g_{20}, g_{21} и выражение $C_1(0)$ [11], откуда

$$\mathrm{Re}C_1(0) = \frac{1 + \tilde{\gamma}^2}{4\tilde{K}_4\tilde{\gamma}^4} > 0,\quad \mathrm{Im}C_1(0) = \frac{(1 + \tilde{\gamma}^2)(8 + 5\tilde{\gamma}^2)}{12\tilde{K}_4\tilde{\gamma}^5}.$$

Далее находятся

$$\mu_2 = -\mathrm{Re}C_1(0)/\alpha'(0) = \frac{-(1 + \tilde{\gamma}^2)}{4\tilde{K}_4\tilde{\gamma}^4} < 0,$$

$$\beta_2 = 2\mathrm{Re}C_1(0) > 0,$$

$$\tau_2 = -\left(\frac{1}{\omega_0}\right)\left[\operatorname{Im}C_1(0) - \frac{\operatorname{Re}C_1(0)\omega'(0)}{\alpha'(0)}\right] =$$

$$= \frac{-(1+\tilde{\gamma}^2)(11+5\tilde{\gamma}^2)}{12\tilde{K}_4^2\tilde{\gamma}^6} < 0,$$

$$\alpha'(0) = \left.\frac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 1,$$

$$\alpha(\lambda) = \operatorname{Re}\lambda_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{A} = \frac{1}{2}[1 - 2(1-\lambda) - \tilde{K}_4],$$

$$\tilde{A} = dX_0(0,0), \quad \lambda = \bar{\lambda} = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda),$$

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{4\det\tilde{A} - (\operatorname{tr}\tilde{A})^2} > 0,$$

$$\omega'(0) = \left.\frac{d\omega}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\det\tilde{A}}}\left.\frac{d(\det\tilde{A})}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{1}{\tilde{\gamma}} < 0,$$

$$\det\tilde{A}\big|_{\lambda=\lambda_0} = \tilde{\gamma}^2\tilde{K}_4^2, \quad \left.\frac{d(\det\tilde{A})}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -\tilde{K}_4.$$

Период предельного цикла вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \tau_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)),$$

где

$$\omega_0 = \tilde{K}_4\tilde{\gamma}, \ \varepsilon^2 = (\lambda - \lambda_0)/\mu_2 + 0(\lambda - \lambda_0)^2.$$

С использованием зависимостей (18), (19), получим

$$\min\left\{\frac{2\pi}{\omega_0}\right\} = 2\pi\sqrt{8} \quad \text{при} \quad \tilde{K}_4 = \frac{1}{2}.$$

Так как $\mu_2 < 0$, то периодическое решение существует при $\lambda < \lambda_0$ ("докритическая" бифуркация), а так как $\beta = \beta_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) > 0$, то наблюдается неустойчивый предельный цикл, что согласуется с критерием устойчивости (21). Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы может быть легко записано с помощью предложенной в [11] процедуры. Отметим, что согласно [10] из-за неустойчивости и бифуркации возможно возникновение упорядоченных периодических структур в морских экотонах.

Полученные результаты позволяют осуществлять дальнейший анализ динамической системы (16)–(19) и использовать ее в имитационных системах для регионального экологического прогноза и экологической экспертизы схемных и проектных решений, а также будут способствовать более широкому использованию вышеуказанной аналитико-вычислительной техники при экосистемном анализе и моделировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артюхин Ю.В.* Антропогенный фактор в развитии береговой зоны моря. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1989. 144 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
3. *Есин Н.В., Дмитриев В.А., Московкин В.Н.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 1. С. 223.
4. *Есин Н.В., Московкин В.М., Дмитриев В.А.* // Природные основы берегозащиты. М.: Наука, 1987. С. 5.
5. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 384 с.
6. *Московкин В.М.* // Вод. ресурсы. 1994. Т. 21. № 1. С. 115.
7. *Московкин В.Н., Есин Н.В.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 731.
8. *Московкин В.Н., Есин Н.В., Ковтун Е.А.* // Океанология. 1989. Т. 29. Вып. 1. С. 108.
9. *Некрасов Н.Я., Домбровский Ю.А.* // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1978. № 1. С. 105.
10. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979. 512 с.
11. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.