В. М. Московкин

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ БЕРЕГОВЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрим новый, в геоморфодинамике берегов, круг задач управления береговыми динамическими системами: клиф (береговой уступ)-пляж, связанный с переводом системы из заданного начального состояния в конечное при одновременной минимизации времени перевода и общего объема подсыпаемого (изымаемого) на пляж материала.

В наиболее общем виде постановка такой задачи выглядит следующим образом

$$\frac{dW}{dt}=af(W)H-\varphi(W)+u(t),$$
$$\frac{dS}{dt}=f(W),\quad |u(t)|\leqslant\beta,$$
$$S(0)=0,\quad W(0)=W_0,\quad S(T)=S_1,\quad W(T)=W_{\text{ст}},\tag{1}$$
$$\int\limits_0^T(1+|u|)\,dt\to\min,$$

где W — объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии, м^2; a — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег $(0<a<1)$; H — высота клифа, м; $f(W)$ — скорость отступания клифа, м/год; $\varphi(W)$ — интенсивность истирания пряжеобразующего материала в результате волнового воздействия, м^2/год; $u(t)$ — управляющий фактор, ограниченный по абсолютной величине, который соответствует подсыпке $(u>0)$ или изъятию $(u<0)$ материала, м^2/год; T — время перевода из состояния $(S,\ W)=(0,\ W_0)$ в состояние $(S_1,\ W_{\text{ст}})$, год; t — время, год; $W_{\text{ст}}$ — стационарный объем пляжеобразующего материала в условиях отсутствия управления (устойчивая стационарная точка уравнения баланса пляжеобразующего материала при $u(t)=0$); S — расстояние на которое отступает клиф, м.

Рассматривая линейную задачу оптимального управления при

$$f(W)=\gamma(W_m-W),\quad 0\leqslant W\leqslant W_m,\quad \varphi(W)=kW,\quad \gamma,\ W_m,\ k=\text{const}>0$$

можно свести ее с помощью замен $W'=\frac{W-W_{\text{ст}}}{\beta}$, $S'=\frac{S-S_1}{\beta}$, $u'=\frac{u}{\beta}$ к канонической форме

$$\frac{dW'}{dt}=-AW'+u',\quad A=aH\gamma+k,$$
$$\frac{dS'}{dt}=\frac{\gamma}{\beta}(W_m-W_{\text{ст}}-\beta W'),\quad |u'|\leqslant 1,$$
$$S'(0)=-\frac{S_1}{\beta},\quad W'(0)=\frac{W_0-W_{\text{ст}}}{\beta},\quad W'(T)=S'(T)=0,\tag{2}$$
$$\int\limits_0^T(1+\beta|u'|)\,dt\to\min.$$

Отметим, что близкий круг линейных задач оптимального быстродействия рассматривается в работах [1, 2].

Отчетливо видна аналогия задачи (2) с более простой линейной задачей одновременной экономии времени и топлива на поездку [3].

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=u,\quad |u|\leqslant 1,$$
$$x_1(0)=x_0,\quad x_2(0)=v_0,\quad x_1(T)=x_2(T)=0,\tag{3}$$
$$\int\limits_0^T(1+\varepsilon|u|)\,dt\to\min.$$

В работе [3] намечен путь решения таких задач, состоящий в: 1. построении функции Лагранжа; 2. построении и решении уравнения Эйлера для лагранжаниана; 3. использовании принципа максимума; 4. проверке условия трансверсальности по пространственной переменной для терминанты; 5. проверке условия стационарности по T. Все эти условия являются необходимыми для существования решения вышеуказанных задач. Одной из особенностей их решения является наличие двух точек переключения при следующих режимах управления: $u=-1;\ 1;\ 0$. Для задачи (2) все необходимые условия существования ее решения выполняются, но процедура получения окончательного решения достаточно сложна. Не останавливаясь на ней рассмотрим одну из постановок задачи в упрощенном варианте, решаемой без использования методов теории оптимального управления (такая постановка задачи имеет наибольшее практическое значение)

$$\frac{dW}{dt}=aHf(W)-\varphi(W)+u,\quad |u|\leqslant\beta,$$
$$W(0)=W_0,\quad W(T)=W_{\text{ст}},\tag{4}$$
$$\int\limits_0^T(1+|u|)\,dt\to\min.$$

Задачу (4) будем рассматривать в постоянном по интенсивности классе управляющих воздействий ($u=\text{const}$ — параметр, не зависящий от времени). Путь решения этой задачи следующий. Из уравнения (4) находится время перевода из состояния W_0 в состояние $W_{\text{ст}}$

$$T=F(u)=\int\limits_{W_0}^{W_{\text{ст}}}\frac{dW}{aHf(W)-\varphi(W)+u},\tag{5}$$

и определяется минимум функционала

$$\Phi(u)=\int\limits_0^T(1+|u|)\,dt=(1+|u|)F(u),\tag{6}$$

(который представляет собой функцию от параметра u) с учетом ограничения $|u|\leqslant\beta$ обычными методами математического анализа.

Ниже рассмотрим конкретную линейную задачу в условиях подсыпки материала (наращивания пляжа), когда $u>0$, $W_0<W_{\text{ст}}$. В этом случае, при ранее указанных линейных функциях $f(W)$ и $\varphi(W)$ выражение (6) примет вид

$$\Phi(u)=\frac{(1+u)}{A}l_n\left[1+\frac{A(W_{\text{ст}}-W_0)}{u}\right],$$
$$A=aH\gamma+k,\quad W_{\text{ст}}=\left(\frac{A-k}{A}\right)W_m.\tag{7}$$

Экстремумы этой функции находятся из решения следующего трансцендентного уравнения

$$l_n\left(1+\frac{B}{u}\right)=\frac{B(1+u)}{u(B+u)}, \tag{8}$$

где $B=A(W_{ст}-W_0)$.

Исследуем выражение (7) как функцию, зависящую от параметра B при $A=\text{const}$. Рассмотрим функцию $\Phi^*(u, B)=A\Phi(u, B)$ экстремумы которой находятся из уравнения (8). Это уравнение с помощью замены $\xi=\frac{B}{U}$ приведем к виду

$$l_n(1+\xi)=\frac{\xi}{B}\left(\frac{B+\xi}{1+\xi}\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет нулевое тривиальное решение ($\xi=0$), соответствующее $u=\infty$. Легко показать, что $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi^*(u, B)=\lim\limits_{\xi\to 0}\Phi^*(\xi, B)=B$. Таким образом, функцию $\Phi^*(u, B)$ имеет вертикальную ($u=0$) и горизонтальную ($\Phi^*(u, B)=B$) асимптоты. Определим условия существования локального минимума и его вырождения. Для этого используем методы теории особенностей гладких функций (теории катастроф). Функция $\Phi^*(\xi, B)$ в окрестности $\xi=0$ согласно лемме Морса [4] имеет вид

$$\Phi^*(\xi, B)\approx\left(1+\frac{B}{\xi}\right)\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}\right)=\frac{\xi^3}{3}+\xi^2\left(\frac{B}{3}-\frac{1}{2}\right)+\xi\left(1-\frac{B}{2}\right). \tag{10}$$

Экстремумы этой кубической формы определяются из условия

$$\frac{d\Phi^*(\xi, B)}{d\xi}=0;$$

$$\xi_{1,2}=-\left(\frac{B}{3}-\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{B}{3}-\frac{1}{2}\right)^2-\left(1-\frac{B}{2}\right)}. \tag{11}$$

Условие вырождения положительного корня $\xi_1>0$ (слияние его с нулевым корнем уравнения (9)) имеет вид $1-\frac{B}{2}=0$ ($\xi_1=0$ в выражении (11)). Таким образом, получено критическое значение параметра $B=B_{кр}=2$ при котором локальный минимум функции $\Phi^*(u, B)$ исчезает при $u=\infty$ ($\xi=0$). То же самое может быть показано следующим образом. Кубический трехчлен (10) приводится к канонической катастрофе складки [4] $\left(U(\xi)=\frac{\xi^3}{3}+\tilde{u}\xi,\ \tilde{u}\sim\left(1-\frac{B}{2}\right),\ \text{где}\ \sim - \text{знак пропорциональности}\right)$ для которой $\frac{dU}{d\xi}=\xi^2+\tilde{u}$. Откуда следует, что слияние двух особых точек происходит при $\tilde{u}=0$, что эквивалентно $1-\frac{B}{2}=0$ ($B_{кр}=2$). Отметим, что получение этого критического условия элементарными методами исследования функций требует гораздо больших усилий.

Вышеизложенное иллюстрируется численными расчетами функции $\Phi^*(u, B)$ при $A=0{,}2$ год$^{-1}$ (рис. 1). При $B>2$ исследуемая функция имеет локальный минимум.

Проделаны численные эксперименты по определению минимума функции

$$\Phi(u, B)=\left(\frac{1+u}{A}\right)ln\left(1+\frac{B}{u}\right), \tag{10}$$

при $A=\frac{B+kW_m}{W_m-W_0}$, 3В 20 м^2/год, $30\leqslant W_m\leqslant 50$ м^2, $0{,}05\leqslant k\leqslant 0{,}2$ год$^{-1}$, $0\leqslant W_0\leqslant 45$ м^2 (реально возможные значения параметров для условий рыхлых глинистых пород, слагающих берег, и песчаных пляжей). Расчеты показали, что функция $u_{min}(B)$ почти не зависит от изменения параметров W_m, W_0, k, в отличие от функции $\Phi_{min}(B)=\Phi(u_{min}(B), B)$. С учетом критериального значения $B=2$ была получена конкретная

гиперболическая регрессионная зависимость при единичном корреляционном отношении

$$u_{min}(B)=0{,}2455+\frac{1{,}425}{B-2}. \tag{13}$$

Рассмотрим конкретный пример. Аппроксимация данных натурных измерений Ю. Д. Шуйского [5] для рыхлых глинистых пород в районе

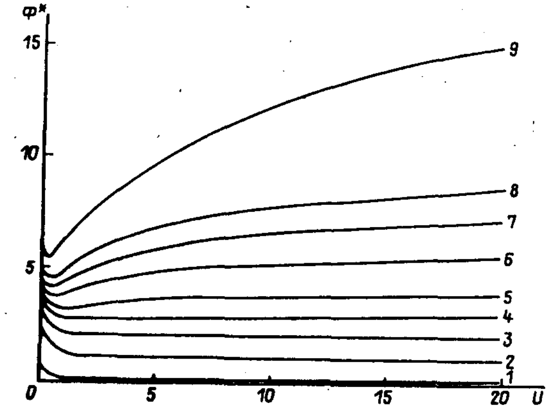

Рис. 1. Функция при различных значениях B. Соответствие номеров кривых со значениями B следующие: 1l 0,1; 2-1; 3-2; 4-3; 5-4; 6-6; 7-8; 8-10; 9-20.

мыса Бурнас (Черное море, СССР) приводит к следующим параметрам функции $f(W)$: $\gamma=\frac{1}{3}$(м·год)$^{-1}$, $W_m=30$ м^2; остальные значения параметров для этого района равняются [1, 2, 6] $a=0{,}02$; $k=0{,}1$ год$^{-1}$; $H=1\div 50$ м. В этом случае имеем следующий диапазон изменения параметра A: $0{,}107\leqslant A\leqslant 0{,}433$.

С учетом выражения $B=A(W_mW_0)-kW_m$ получим интервал изменения B: $0\leqslant B\leqslant 9$. Например при $B=9$ м^2/год по формуле (13) получим $u_{min}(9)=0{,}459$ м^2/год.

Решение исходной поставленной задачи для данного примера будет выглядеть следующим образом. Пусть, например, $u\leqslant\beta=1$ м^2/год, тогда при $0<B<2$, когда $\Phi(u, B)$ монотонно убывает до нуля при увеличении u, в качестве оптимального искомого значения u следует взять $u_{опт}=\beta=1$ м^2/год и для него найти оптимальное время по формуле (5). Если $B>2$, тогда следует выбрать минимальное из чисел β и u_{min} (рассчитанное по формуле (13)), то есть $u_{опт}=\min\{\beta, u_{min}\}$. Например, при $B=3$ получим $u_{опт}=\min\{1;\ 1{,}65\}=1$, при $B=9$ — $u_{опт}=\min\{1;\ 0{,}459\}=0{,}459$. Соответствующее оптимальное время (T) и объем подсыпки ($W_{под}$) находится по формуле (5) и $W_{под}=T\cdot u_{опт}$.

Рассмотрена аналогичная нелинейная задача при $f(W)=\frac{b}{W}$ $\varphi(W)=k$ для которой получена функция $T=F(u)$.

$$F(u)=C-\frac{1}{2k}ln\left[\left|kW_{ст}^2-uW_{ст}-aHb\right|\left|\frac{2kW_{ст}-u-\sqrt{u^2+4kaHb}}{2kW_{ст}-u+\sqrt{u^2+4kaHb}}\right|^m\right],$$

$$C=\frac{1}{2k}ln\left[\left|kW_0^2-uW_0-aHb\right|\left|\frac{2kW_0-u_0-\sqrt{u^2+4kaHb}}{2kW_0-u_0+\sqrt{u^2+4kaHb}}\right|^m\right], \tag{14}$$

где $W_{ст}=\sqrt{\frac{aHb}{k}}$, $m=\frac{u}{\sqrt{u^2+4kaHb}}$.

Проделана большая серия численных экспериментов по расчету функций $F(u)$, $\Phi(u)$ при $b=40$ м³/год [6], $0{,}05\leqslant k\leqslant 0{,}2$ год$^{-1}$, $1\leqslant H\leqslant$ $\leqslant 100$ м, $1\leqslant u\leqslant 50$ м²/год, $a=0{,}02$.

Вырождение минимума функции $\Phi(u)$ было отмечено в интервале $2\leqslant u\leqslant 3$ м²/год. Теоретическое условие вырождения минимума функции $\Phi(u)$, в зависимости от ее параметров, может быть получено аналогично предыдущему рассмотрению.

При наличии локального минимума функции $\Phi(u)$ решение поставленной задачи (4) будет иметь вид $u_{опт}=\min\{\beta, u_{min}\}$.

Таким образом, разработана конкретная методология для получения оптимальной интенсивности подсыпки материала с целью одновременной минимизации времени и общего объема подсыпаемого материала. Такая же методология может найти практическое применение при проектировании искусственных пляжей в условиях полностью укрепленных берегов ($f(W)=0$), что актуально для условий курортных регионов Черного моря.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Московкин В. М., Есин Н. В.* Оптимальное управление абразионным процессом.— ДАН, 1985, том 284, № 3, С. 731—734.
2. *Московкин В. М., Есин Н. В.* К теории оптимального управления береговыми процессами.— Водные ресурсы, 1986, № 4, С. 172—175.
3. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи.— М.: Наука, 1984.— 288 с.
4. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 607 с.
5. *Шуйский Ю. Д., Шевченко В. Я.* Динамика берегов Черного моря в районе мыса Бурнас.— *Геоморфология*, 1975, № 4, С. 98—104.
6. *Есин Н. В., Савин М. Т., Жиляев А. П.* Абразионный процесс на морском берегу.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 200 с.