Ю. П. Вирченко, А. С. Мазманишвили, Формула Каца—Зигерта для осциллляторного случайного процесса, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2023, том 225, 38–58

DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-38-58

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 38–58
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-38-58

УДК 519.218.7

ФОРМУЛА КАЦА—ЗИГЕРТА ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

© 2023 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. С. МАЗМАНИШВИЛИ**

Посвящается светлой памяти нашего учителя академика НАНУ С. В. Пелетминского (1931–2022)

Аннотация. Описана общая схема вычисления характеристических функций случайных величин, представляемых квадратичными функционалами от траекторий элементарных гауссовских процессов, основанная на методе Фейнмана—Каца. Эта схема применена для осцилляторного случайного процесса $\langle \tilde{x}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$. Вычислена характеристическая функция $Q(-i\lambda, t)$ случайной величины $\mathsf{J}_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (d\tilde{x}(s)/ds)^2 ds$ от его случайных траекторий $\tilde{x}(t)$.

Ключевые слова: осцилляторный случайный процесс, матричное уравнение Риккати, белый шум, уравнение Колмогорова, характеристическая функция.

KAC–SIEGERT FORMULA FOR OSCILLATORY RANDOM PROCESSES

© 2023 **Yu. P. VIRCHENKO, A. S. MAZMANISHVILI**

Abstract. A general scheme for calculating the characteristic functions of random variables represented by quadratic functionals of the trajectories of elementary Gaussian processes based on the Feynman—Kac method is described. This scheme is applied to the oscillatory random process $\langle \tilde{x}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$. The characteristic function $Q(-i\lambda, t)$ of the random variable $\mathsf{J}_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (d\tilde{x}(s)/ds)^2 ds$ of its random trajectories $\tilde{x}(t)$ is calculated.

Keywords and phrases: oscillatory random process, matrix Riccati equation, white noise, Kolmogorov equation, characteristic function.

AMS Subject Classification: 60H10, 60G15, 60G35

1. Введение. Системы стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами являются основой математического моделирования, когда возникает необходимость использования случайных функций при описании процессов изменения случайных величин со временем (см., например, [14, 25, 26]). Статистические характеристики случайных процессов, порождаемых совокупностями решений систем такого типа и связанными с ними распределениями вероятностей, используются также в математической статистике при анализе временных рядов (см., например, [12, 22]).

Обозначим посредством $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, случайную вектор-функцию, которая принимает значения в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь и далее знак тильда, поставленный над символом математического объекта, указывает на его случайный характер с точки зрения теории вероятностей. В общем виде стохастические системы указанного типа записываются следующим образом в терминах стохастического дифференциала $d\tilde{\boldsymbol{w}}(t)$ по многомерному винеровскому процессу $\tilde{\boldsymbol{w}}(t) = \langle \tilde{w}_j(t),\ j = 1, \ldots, n\rangle$, $t \geqslant t_0$:

$$d\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)dt + S\,d\tilde{\boldsymbol{w}}(t), \tag{1.1}$$

где A и S — вещественные $n \times n$-матрицы, причем матрица S симметрична, $S^T = S$ и неотрицательно определена, а $\tilde{\boldsymbol{w}}(t) = \langle \tilde{w}_j(t),\ j = 1, \ldots, n \rangle$ — случайная вектор-функция, компонентами которой являются n экземпляров таких статистически независимых стандартных винеровских процессов (см., например, [8]), что

$$\mathsf{E}\ w_j(s) w_k(t) = \delta_{jk} \min\{s, t\}, \tag{1.2}$$

где, здесь и далее, E — функционал математического ожидания по мере рассматриваемого случайного процесса, без конкретизации того, какой процесс имеется в виду, что не должно вызвать недоразумений; δ_{jk} — символ Кронекера, $j, k \in \{1, ..., n\}$. Допустимы различные определения стохастического дифференциала $d\tilde{\boldsymbol{w}}(t) = \langle d\tilde{w}_j(t),\ j = 1, \ldots, n \rangle$ (см., например, [26]). Использование того или иного определения тесно связано с той конкретной задачей, которая решается в рамках формализма стохастических дифференциальных уравнений. Наиболее употребительными в математике являются дифференциал в смысле Ито (см., например, [7]) и дифференциал в смысле Стратоновича [29]. В рандомизированных задачах математической физики, по-видимому, наиболее адекватным является дифференциал Стратоновича, в связи с известной теоремой Вонга-Закаи [30] (см. также [17]), согласно которой стохастическому уравнению с дифференциалом Стратоновича удовлетворяют траектории всякого случайного процесса с непрерывным временем, который является предельным в среднем квадратичном для последовательности случайных процессов $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_m(t),\ t \in [t_0, \infty) \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, траектории каждого из которых подчинены дифференциальному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(m)}(t) = f(\boldsymbol{x}^{(m)}, t) + g(\boldsymbol{x}^{(m)}, t)\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t),$$

где каждый стационарный случайный процесс $\langle \boldsymbol{\varphi}_n(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ непрерывен с вероятностью 1, а вся последовательность этих процессов сходится в смысле сходимости соответствующих характеристических функционалов к предельному характеристическому функционалу, который для любой финитной непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ определяет обобщенный стационарный случайный процесс $\langle \boldsymbol{\varphi}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ так, что при $m \to \infty$ имеет место

$$\mathsf{E} \exp\Big(i \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t), \boldsymbol{u}(t) \Big) dt \to \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u}^2(t) dt \Big) \equiv \mathsf{E} \exp\Big(i \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) dt \Big). \tag{1.3}$$

Здесь и далее, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Этот предельный обобщенный случайный процесс $\langle \boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in \mathbb{R} \rangle$ называется «белым шумом» (стационарным с единичной интенсивностью). Заметим, что в задачах, связанных со стохастическими системами с постоянными коэффициентами, не возникает различия в получаемых результатах при использовании того или иного конкретного типа дифференциала. В этом случае различия проявляются только лишь при проведении доказательств математических утверждений и конкретных вычислений. В частности, такое положение имеет место при решении задачи, которому посвящена настоящая работа.

В связи с вышесказанным, на протяжении статьи, мы, при необходимости проведения явных вычислений, используем стохастический дифференциал Стратоновича. В этом случае уравнение (1.1) допустимо записать в форме обычного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\, \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = A\, \tilde{\boldsymbol{x}}(t) + S\, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t), \tag{1.4}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = d\tilde{\boldsymbol{w}}(t)/dt = \langle \tilde{\varphi}_j(t),\ j = 1, \ldots, n \rangle$. Так как траектории $\tilde{\boldsymbol{w}}(t)$ стандартного винеровского процесса с единичной дисперсией, исходящие из точки $\boldsymbol{x} = 0$ с началом отсчета времени в момент $t = t_0$, с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы (см. [15]), то производную $d\tilde{\boldsymbol{w}}(t)/dt = \boldsymbol{\varphi}(t)$ в уравнении (1.4) нужно понимать в обобщенном смысле.

Так как винеровский процесс гауссовский (см., например, [18]) и его корреляционная функция (1.2) зависит от разности $|s - t|$, то обобщенную случайную вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$, нужно трактовать как обобщенный случайный стационарный гауссовский векторнозначный процесс с нулевым средним значением. Компонентами $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ его векторных значений являются статистически независимые гауссовские случайные процессы, для которых выполняется $\mathsf{E}\ \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_k(t) = 0$ при $j \neq k$ и каждый из которых имеет нулевое среднее значение $\mathsf{E}\, \tilde{\varphi}_j(t) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Корреляционная функция каждой фиксированной компоненты равна $\mathsf{E}\, \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_j(t) = \delta(s - t)$, т.е. каждая из компонент $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ является скалярным обобщенным процессом «белого шума». Здесь

$\delta(t)$ — т.н. обобщенная функция Дирака (см., например, [13]). Если дифференциальное уравнение (1.4) понимается по Стратоновичу, то его можно формально проинтегрировать в смысле Римана

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = e^{(t-t_0)A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(A(t-s)\big) S\, d\tilde{\boldsymbol{w}}(s), \tag{1.5}$$

где интеграл следует понимать как стохастический интеграл Стратоновича. Таким образом, отображение, описываемое формулой (1.5), *индуцирует* случайный процесс $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [t_0,\infty)\rangle$, так как оно определяет класс траекторий этого процесса на основе класса траекторий векторнозначного винеровского процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{w}}(t),\, t \in [t_0,\infty)\rangle$ вместе со структурой измеримости на пространстве всех локально непрерывных вектор-функций на $[t_0,\infty)$. Формула (1.5) также полностью определяет распределение вероятностей случайного процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [t_0,\infty)\rangle$ на σ-алгебре измеримых множеств в пространстве непрерывных функций при учете распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) < \boldsymbol{x}_0\}$ случайного вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$ — т.н. *распределения вероятностей входа в процесс* [7] при учете статистической независимости случайного вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$ от процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{w}}(t),\, t \in [t_0,\infty)\rangle$. Поэтому во всех формулах, в которых вычисляется математическое ожидание E по распределению вероятностей случайного процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [t_0,\infty)\rangle$, можно считать, что оно вычисляется по произведению распределений вероятностей порождающего его случайного процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{w}}(t),$ $t \in [t_0,\infty)\rangle$ и распределению вероятностей случайного вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$. Можно также считать, что вычисление этого математического ожидания по процессу $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$, эквивалентным образом, выполняется на основе распределения вероятностей случайного вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$ и характеристического функционала обобщенного гауссовского случайного процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$, определяемого формулой (1.3), из которой следует

$$\mathsf{E}\ \tilde{\varphi}_j(t) = 0, \quad \mathsf{E}\ \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_{jk}(t) = \delta_{jk}\delta(s-t), \quad j,k \in \{1,...,n\},$$

а также правило усреднения произведений $\varphi_{j_1}(t_1)...\varphi_{j_1}(t_m)$ при попарно неравных друг другу значениях $t_1,...,t_m$, $m \in \mathbb{N}$ (т.н. правило Вика [27]).

В настоящей работе мы рассматриваем т.н. *осцилляторный* случайный процесс $\langle\tilde{x}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$, который порождается двумерным $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \langle\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)\rangle$ гауссовским марковским в случайным процессом на любом полуинтервале $[t_0,\infty)$. Процесс $\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t \in [t_0,\infty)$ определяется формулой (1.5) при $n = 2$ с соответствующей ему 2×2-матрицей A такой, что он обладает при $t_0 \to -\infty$ предельным по мере случайным процессом, который является стационарным, гауссовским процессом с нулевым средним значением и который мы далее будем обозначать тем же самым символом $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),$ $t \in \mathbb{R}\rangle$. Целью работы является получение формулы для характеристической функции

$$Q(-i\lambda, t) = \mathsf{E}\exp\Big(i\lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]\Big) \tag{1.6}$$

распределения вероятностей случайной величины, которая представляется значениями квадратичного зависящего от параметра $t > 0$ функционала

$$J_t[\tilde{x}(s)] = \int\limits_0^t \Big(\frac{d\tilde{x}}{dt}\Big)^2(s)ds, \tag{1.7}$$

определенного на пространстве непрерывно дифференцируемых с вероятностью 1 функций $x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Эта формула аналогична формуле Каца-Зигерта [20], которая имеет место при $n = 1$ для стационарного марковского гауссовского случайного процесса Орнштейна-Уленбека, траектории $\tilde{x}(t)$ которого подчинены стохастическому уравнению Ланжевена $\dot{\tilde{x}}(t) + 2\beta\tilde{x}(t) = \sigma^{1/2}\varphi(t)$ с $\beta > 0$. В этом случае характеристическая функция $Q(-i\lambda, t)$ случайной величины

$$J_t[\tilde{x}(s)] = \int\limits_0^t \tilde{x}^2(s)ds,$$

дается формулой

$$Q(\lambda, t) = \left(\frac{4\beta r e^{2\beta t}}{(\beta+r)^2 e^{2rt} - (\beta-r)^2 e^{-2rt}}\right)^{1/2}, \tag{1.8}$$

$r = (\beta^2 + \lambda\sigma/2)^{1/2}$, которая находит различные применения в задачах статистической радиотехники [20, 28], в задачах статистики фотоотсчетов в квантовой оптике [23] и других областях физики [5]. Для решения задач такого типа разработаны различные методы. Основополагающим в этом отношении является метод, которым впервые была решена задача для функционала $J_t[\tilde{w}(s)]$ от траекторий винеровского процесса [19]. Этот метод, который впоследствии получил название метода Фейнмана-Каца-Дынкина, существенно использует марковость случайного процесса, по мере которого производится усреднение. Более общий подход к решению таких задач основан на т.н. методе Карунена-Лоэва (см. [21, 24]), использующий только лишь гауссовость случайного процесса $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [a,b] \subset \mathbb{R}\rangle$. Он позволяет находить математические ожидания для более сложных квадратичных функционалов от траекторий процесса (см. [1–4]).

2. Осцилляторный случайный процесс. Траектории *осцилляторного случайного процесса* $\langle \tilde{x}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$ подчинены стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\tilde{x} + 2\beta\frac{d}{dt}\,\tilde{x} + \omega^2\tilde{x} = \sigma^{1/2}\tilde{\varphi}(t), \tag{2.1}$$

где $\tilde{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — одномерный белый шум. Введя двухкомпонентный случайный процесс

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \langle \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)\rangle, \qquad \tilde{x}_1(t) = \dot{\tilde{x}}(t)/\omega,\ \ \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}(t)$$

и, аналогично, двухкомпонентный обобщенный случайный процесс $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \langle \tilde{\varphi}(t), 0\rangle$, уравнение (2.1) представим в виде системы уравнений (1.4) первого порядка с $n = 2$ и матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -2\beta & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{\sigma^{1/2}}{\omega}V, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (1.4) определяет случайный процесс $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [t_0, \infty)\rangle$ на каждом полуинтервале $[t_0, \infty)$, где двумерный «белый шум» $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ обладает корреляционной функцией $\mathsf{E}\ \tilde{\varphi}_{j_1}(t_1)\tilde{\varphi}_{j_2}(t_2)\rangle = \delta_{j_1,1}\delta_{j_2,1}\delta(t_1 - t_2)$. Тогда для него справедлива формула (1.5). Следовательно, траектории этого случайного процесса определены при $t_0 \leqslant 0$ и, с вероятностью 1, всюду на $[t_0, \infty)$ непрерывны. В частности, с вероятностью 1, всюду непрерывна его первая компонента $\tilde{x}_1(t)$. Поэтому траектории $\tilde{x}_2(t)$ с вероятностью 1 всюду непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_0, \infty)$. Пусть $t_0 < 0$ и при каждом значении $t > 0$ с вероятностью 1 определено значение функционала (1.7). Вся совокупность этих значений определяет случайную величину с распределением вероятностей, индуцированным распределением вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, t \in [t_0, \infty)\rangle$.

Определение 2.1. Случайный векторнозначный процесс $\langle \tilde{\boldsymbol{z}}(t),\, t \in [t_0, \infty)\rangle$ со значениями из $\mathbb{R}^2$ называется гауссовским, если его характеристический функционал определяется формулой

$$\mathsf{E}\,\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{z}}(t))dt\Big) = \exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{z}_0(t))dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{\infty}C_{jk}(s,t)u_j(s)u_k(t)ds\Big). \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{u}(t)$ — произвольная непрерывная финитная вектор-функция со значениями из $\mathbb{R}^2$.

Гауссовский процесс полностью определяется математическим ожиданием $\boldsymbol{z}_0(t) = \mathsf{E}\ \tilde{\boldsymbol{z}}(t)$, вычисляемым по распределению вероятностей этого процесса, и его корреляционной функцией $C_{jk}(s,t) = \mathsf{E}\,(\tilde{z}_j(s) - (\boldsymbol{z}_0)_j(s))(\tilde{z}_k(t) - (\boldsymbol{z}_0)_k(t))$.

Матричное ядро $C_{jk}(s,t)$ в (2.3) обладает свойством симметрии $C_{jk}(s,t) = C_{kj}(t,s)$ и положительной определенностью, т.е. для любой непрерывной финитной вектор-функции $\boldsymbol{u}(t)$ имеет место

$$\mathsf{E}\ \Big[\int\limits_{t_0}^{\infty}u_j(t)(\tilde{z}_j(t) - (\boldsymbol{z}_0)_j(t))\Big]^2 dt = \int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{\infty}C_{jk}(s,t)u_j(s)u_k(t)ds > 0.$$

Согласно данному определению, обобщенный процесс $\langle \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),\, t \in \mathbb{R}\rangle$ гауссовский, с характеристическим функционалом (1.3). Он является пределом характеристических функционалов гауссовских процессов.

Ввиду формулы (1.5), которая справедлива для траекторий процесса $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t \in [t_0, \infty)\rangle$, он является линейным преобразованием гауссовского случайного процесса $\tilde{\varphi}(s)$, $s \in (t_0 - 0, \infty)$. Поэтому имеет место

Теорема 2.1. *Для любого t_0 и любого вектора $\boldsymbol{x}_0 = \langle x_1(t_0) = \dot{x}(t_0)/\omega, x_2(t_0) = x(t_0)\rangle$ случайный процесс $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t \in [t_0, \infty)\rangle$ гауссовский.*

Доказательство. Поставим в определение характеристического функционала выражение для траекторий (1.5). Так как $\mathsf{E}\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s) = 0$, то

$$\mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} (\boldsymbol{u}(t), \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) dt\Big) =$$

$$= \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} (e^{(t-t_0)A} \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t)) dt\Big)\, \mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{u}(t), e^{A(t-s)}\, S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)) ds\Big). \tag{2.4}$$

Далее, вводя функцию

$$\boldsymbol{v}(s) = \int_{s}^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \boldsymbol{u}(t) dt,$$

вычислим математическое ожидание

$$\mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{u}(t), e^{A(t-s)}\, S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)) ds\Big) = \mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{t} (S e^{A^T(t-s)} \boldsymbol{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)) ds\Big) =$$

$$= \mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} ds \int_{s}^{\infty} (S e^{A^T(t-s)} \boldsymbol{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)) dt\Big) = \mathsf{E} \exp\Big(i \int_{t_0}^{\infty} (\boldsymbol{v}(s), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)) ds\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \boldsymbol{v}^2(s) ds\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \Big(\int_{s}^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \boldsymbol{u}(t) dt\Big)^2 ds\Big). \tag{2.5}$$

Интеграл в показателе экспоненты преобразуем, используя симметрию матрицы S, так, что получающееся в процессе преобразований подинтегральное выражение принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \Big(\int_{s}^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \boldsymbol{u}(t) dt\Big)^2 ds = \int_{t_0}^{\infty} ds \int_{s}^{\infty} \big[S e^{A^T(t_1-s)} \boldsymbol{u}(t_1)\big]_j dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \big[S e^{A^T(t_2-s)} \boldsymbol{u}(t_2)\big]_j dt_2 =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \big[S e^{A^T(t_1-s)} \boldsymbol{u}(t_1)\big]_j ds \int_{t_1}^{\infty} \big[S e^{A^T(t_2-s)} \boldsymbol{u}(t_2)\big]_j dt_2 =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} \big[S e^{A^T(t_2-s)} \boldsymbol{u}(t_2)\big]_j \big[S e^{A^T(t_1-s)} \boldsymbol{u}(t_1)\big]_j ds =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} \big(S e^{A^T(t_2-s)} \boldsymbol{u}(t_2), S e^{A^T(t_1-s)} \boldsymbol{u}(t_1)\big) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} \Big(\Big[\int_{t_0}^{\min\{t_1, t_2\}} e^{A(t_1-s)} S^2 e^{A^T(t_2-s)} ds\Big] \boldsymbol{u}(t_2), \boldsymbol{u}(t_1)\Big) dt_2.$$

Таким образом, подставляя это преобразованное выражение в (2.5), получаем‘

$$\mathsf{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{t}\big(Se^{A^T(t-s)}\boldsymbol{u}(t),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)\big)ds\Big)=\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_0}^{\infty}\big(C(t_1,t_2)\boldsymbol{u}(t_2),\boldsymbol{u}(t_1)\big)dt_2\Big),$$

где матрица-функция $C(t_1,t_2)$ определяется матричным интегральным ядром

$$C_{j_1,j_2}(t_1,t_2)=\int\limits_{t_0}^{\min\{t_1,t_2\}}\Big[e^{A(t_1-s)}S^2e^{A^T(t_2-s)}\Big]_{j_1,j_2}ds. \tag{2.6}$$

Принимая во внимание (2.4) и затем сравнивая с формулой (2.3), определяющей вид характеристического функционала гауссовского процесса, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы, так как по построению ядро (2.6) является корреляционной функцией. □

Следствие 2.1. *Осцилляторный случайный процесс $\langle\tilde{x}(t),\ t\in[t_0,\infty)\rangle$ является гауссовским.*

Доказательство. Процесс $\langle\tilde{x}(t),\ t\in[t_0,\infty)\rangle$ является проекцией гауссовского векторнозначного процесса $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t\in[t_0,\infty)\rangle$. □

Предположим, что носитель функций $\boldsymbol{u}(t)$ в формуле (2.3) совпадает с $[t_0,t]$. Перейдем в этой формуле к пределу на классе непрерывных на $[t_0,t]$ функций таким образом, что $\boldsymbol{u}(s)\to\delta(s-t)\boldsymbol{q}$ с фиксированным вектором $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^2$. В этом случае формула (2.3) принимает вид

$$\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{z}_0,t_0)\equiv\mathsf{E}\exp\Big(i(\boldsymbol{q},\tilde{\boldsymbol{z}}(t))\Big)=\exp\Big(i(\boldsymbol{q},e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{z}_0)-\frac{1}{2}\big(C(t,t)\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\big)\Big), \tag{2.7}$$

где матрица-функция $C(t,t)$, согласно (2.6), определяется формулой

$$C(t,t)=\int\limits_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}S^2e^{A^T(t-s)}ds=\int\limits_{0}^{t-t_0}e^{sA}S^2e^{sA^T}ds. \tag{2.8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функция $\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$, $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию*

$$\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)\xrightarrow[t\to t_0]{}\exp\big(i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_0)\big)$$

и подчинена дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\bigg(\boldsymbol{q},A\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)\bigg)-\frac{1}{2}\big(S^2\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\big)\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0). \tag{2.9}$$

Доказательство. Заметим, что $C(t,t)\xrightarrow[t\to t_0]{}0$ согласно (2.8) и, следовательно,

$$\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)\xrightarrow[t\to t_0]{}\exp\big(i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}_0)\big).$$

Из (2.7) следует, что производная по t функции $\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\Big[i(\boldsymbol{q},Ae^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0)-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}C(t,t)\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\Big)\Big]\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0). \tag{2.10}$$

С другой стороны, вычислим градиент в пространстве $\mathbb{R}^2$ векторов $\boldsymbol{q}$:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\Big[ie^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0-C(t,t)\boldsymbol{q}\Big]\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0).$$

Тогда, симметризовав матрицу, определяющую квадратичную форму

$$\big(AC(t,t)\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\big)=\frac{1}{2}\Big(\big[AC(t,t)+C(t,t)A^T\big]\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\Big),$$

получаем

$$\Big(\boldsymbol{q},A\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\Big)\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\Big[i(\boldsymbol{q},Ae^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0)-\frac{1}{2}\big(\big[AC(t,t)+C(t,t)A^T\big]\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\big)\Big]\bar{f}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{x}_0,t_0). \tag{2.11}$$

Так как, согласно (2.8),

$$AC(t,t) + C(t,t)A^T = \int\limits_0^{t-t_0} \Big(\frac{d}{ds}\, e^{sA} S^2 e^{sA^T}\Big) ds = e^{A(t-t_0)} S^2 e^{A^T(t-t_0)} - S^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t,t) = e^{A(t-t_0)} S^2 e^{A^T(t-t_0)},$$

то, сравнивая (2.11) с (2.10), приходим к (2.7). □

Введем плотность распределения условных вероятностей перехода $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \mathsf{E}\ \delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t))$ для случайного процесса $\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t \in [t_0, \infty)\}$ из точки $\boldsymbol{x}_0$ в момент времени t_0 в точку $\boldsymbol{x}$ в момент времени t. Здесь усредняется двумерная δ-функция на $\mathbb{R}^2$. Записывая представление этой δ-функций в виде интеграла Фурье

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})) d\boldsymbol{q},$$

находим, что образ Фурье по переменной $\boldsymbol{x}$ для плотности $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{x} = \mathsf{E} \exp\big(i(\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{x}}(t))\big) = \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0).$$

Следовательно, эта плотность, согласно (2.7), восстанавливается по образу следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(i(\boldsymbol{q}, e^{(t-t_0)A} \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\big(C(t,t)\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\big)\Big) d\boldsymbol{q}. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *Плотность условных вероятностей перехода $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ является решением параболического дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \Big(-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, A\boldsymbol{x}\Big) f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \tag{2.13}$$

с начальным условием

$$\lim_{t \to t_0} f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Доказательство. Тот факт, что $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ удовлетворяет указанному начальному условию, непосредственно следует из (2.12) при учете того, что $\bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \to \exp\big(i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}_0)\big)$ при $t \to t_0$, согласно утверждению леммы.

Продифференцируем по t плотность $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ в (2.12) и учтем, что функция $f(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big) \Big(\big(\boldsymbol{q}, A\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\big) - \frac{1}{2}\big(S^2\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\big) \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\Big) d\boldsymbol{q}. \tag{2.14}$$

Первое слагаемое в (2.14) преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big) \Big(\boldsymbol{q}, A\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\Big) \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q} =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{jk} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big) \frac{\partial}{\partial q_k} \bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\big) d\boldsymbol{q}. \tag{2.15}$$

Преобразование последнего интеграла по частям, с учетом стремления к нулю интеграла по поверхности шара в $\boldsymbol{q}$-пространстве с неограниченно возрастающим радиусом, приводит его к выражению

$$-\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, A\boldsymbol{x}\Big) f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0).$$

Интеграл же, соответствующий второму слагаемому в (2.14), преобразуется следующим образом:

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big)\big(S^2\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\big)\bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q} =$$

$$= \frac{(-i)}{(2\pi)^2} \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}},\ S^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{q} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big)\bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q}\Big) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}},\ S^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\big)\bar{f}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q} = \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}},\ S^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) d\boldsymbol{q}.$$

Подставив это выражение вместе с выражением (2.15) в (2.14), получаем уравнение (2.13). □

Следствие 2.2. *Гауссовский процесс* $\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t \in [t_0, \infty)\}$, *является марковским процессом, обладающим непрерывными с вероятностью* 1 *траекториями.*

Доказательство. Случайный процесс $\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t \in [t_0, \infty)\}$ является *марковским*, так как плотность $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ условных вероятностей перехода удовлетворяет параболическому уравнению (2.13), которое является так называемым *прямым уравнением Колмогорова* для марковских случайных процессов с непрерывными траекториями. □

3. Стационарный осцилляторный случайный процесс. Вычислим плотность $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$, определяемую (2.12).

Теорема 3.1. *Плотность* $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ *условных вероятностей перехода случайного гауссовского марковского процесса* $\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t);\ t \in [t_0, \infty)\}$ *определяется формулой*

$$f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \big[(2\pi)^2 \det C(t, t)\big]^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(C^{-1}(t, t)\big[\boldsymbol{x} - e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0\big],\ \big[\boldsymbol{x} - e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0\big]\Big)\Big]. \quad (3.1)$$

Доказательство. Так как S^2 — симметричная неотрицательно определенная матрица, то квадратичная форма

$$\big(e^{sA}S^2e^{sA^T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) = \big(S^2[e^{sA^T}\boldsymbol{x}], [e^{sA^T}\boldsymbol{x}]\big) \geqslant 0$$

неотрицательна. Более того, эта форма положительно определена, так как, в противном случае, вектор $e^{sA^T}\boldsymbol{x}$ в $\mathbb{R}^2$ должен быть собственным для матрицы S^2 с нулевым собственным значением, т.е. $e^{sA^T}\boldsymbol{x} = c\langle 1, 0\rangle$. Так как этот вектор не является собственным для матрицы A^T при $\omega \neq 0$, это невозможно. Тогда симметричная матрица $e^{sA}S^2e^{sA^T}$ положительно определена. Следовательно, согласно формуле (2.8) для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство

$$\big(C(t, t)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) = \left(\Big[\int\limits_0^{t-t_0} e^{sA}S^2e^{sA^T}\, ds\Big]\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) = \int\limits_0^{t-t_0} (e^{sA}S^2e^{sA^T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\, ds > 0,$$

т.е. симметричная матрица $C(t, t)$ положительно определена и, следовательно, невырождена при любом $t \in [t_0, \infty)$. Ввиду невырожденности матрицы $C(t, t)$, существует обратная матрица $C^{-1}(t, t)$, и поэтому интеграл в (2.12) конечен. Он вычисляется явным образом, что дает формулу (3.1), так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(C(t, t)\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\big)\Big) d\boldsymbol{q} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\big[\det C(t, t)\big]^{1/2}}.$$

□

Введем в рассмотрение стандартные (2×2)-матрицы Паули

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

набор которых вместе в единичной матрицей E образует базис в пространстве (2×2)-матриц. Разложения матриц A и S по этому базису имеют вид

$$A = -\beta(E + T^{(3)}) - i\omega T^{(2)}, \quad S = \frac{\sigma^{1/2}}{2\omega}\,(E + T^{(3)}). \tag{3.2}$$

В дальнейшем для расчетов нам потребуется формула для разложения по базису E, $T^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, экспоненты от произвольной (2×2)-матрицы M:

$$\exp\big(Mt\big) = e^{M_0 t}\Big(\operatorname{ch}(Mt)\,E + M^{-1}\sum_{l=1}^{3} M_l T^{(l)}\operatorname{sh}(Mt)\Big), \tag{3.3}$$

где M_0, M_l, $l = 1, 2, 3$, — коэффициенты разложения матрицы M по базису и

$$M \equiv \Big(\sum_{l=1}^{3} M_l^2\Big)^{1/2}$$

— ее *характеристика.* Справедливость формулы (3.3) проверяется дифференцированием по t. Так как экспонента $\exp\big(Mt\big)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\exp\big(Mt\big)}{dt} = M\exp\big(Mt\big),$$

которое, вместе с ее значением E при $t = 0$, определяет однозначным образом эту матрицу-функцию, то, используя известные коммутационные соотношения матриц Паули

$$T^{(j)}T^{(k)} + T^{(k)}T^{(j)} = 2\delta_{jk}E, \quad T^{(j)}T^{(k)} = i\sum_{l}\varepsilon_{jkl}T^{(l)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{3.4}$$

где ε_{jkl} — символ Леви-Чивиты, получаем тождество. Заметим, что формула (3.3) верна также в случае, если $M = 0$, в смысле предельного перехода в ней $M \to 0$. Кроме того, заметим, что для любой (2×2)-матрицы M, определяемой коэффициентами разложения $\langle M_0, M_l, l = 1, 2, 3\rangle$, ее детерминант вычисляется по формуле

$$\det M = \det\begin{pmatrix} M_0 + M_3 & M_1 - iM_2 \\ M_1 + iM_2 & M_0 - M_3 \end{pmatrix} = M_0^2 - M^2. \tag{3.5}$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det(\mu E - A) = \mu^2 + 2\beta\mu + \omega^2 = 0.$$

Следовательно, если $\beta^2 \neq \omega^2$, то матрица A диагонализуема, а при $\beta > 0$ вещественная часть каждого из ее собственных чисел $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ отрицательна. В дальнейшем будем анализировать осцилляторный случайный процесс именно при таких ограничениях на параметр β. При этом условии имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если параметры β и ω, определяющие случайный гауссовский марковский процесс $\langle\tilde{\boldsymbol{x}}(t);\ t \in [t_0, \infty)\rangle$ посредством стохастического дифференциального уравнения (1.4) с матрицей A, таковы, что $\beta > 0$ и $\omega^2 \neq \beta^2$, то существует предельный по мере случайный процесс $\lim\limits_{t_0\to-\infty}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, который не зависит от значения $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$ и является стационарным случайным процессом, обладающим частным одномерным распределением вероятностей с плотностью*

$$f(\boldsymbol{x}) = \big[(2\pi)^2\det C\big]^{-1/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\big(C^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big)\Big], \quad C = \varkappa E, \quad \varkappa \equiv \frac{\sigma}{4\beta\omega^2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Докажем, что существует предел матрицы $C(t,t)$ при $t_0 \to -\infty$, т.е. сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{sA}\, S^2 e^{sA^T} ds.$$

Для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ неотрицательный диагональный элемент положительно определенной симметричной матрицы удовлетворяет неравенству

$$\big(e^{sA}\, S^2 e^{sA^T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) = \big(S^2 e^{sA^T}\boldsymbol{x}, e^{sA^T}\boldsymbol{x}\big) \leqslant \|S\|^2 \|e^{sA^T}\boldsymbol{x}\|^2. \tag{3.7}$$

Пусть $\{\boldsymbol{e}^{(j)};\ j \in \{1,2\}\}$ — базис в $\mathbb{R}^2$, состоящий из собственных векторов матрицы A^T с соответствующими собственными числами $\mu^{(j)}$, $j \in \{1,2\}\}$, причем $\operatorname{Re}\mu^{(j)} < 0$. Тогда, подействовав матрицей e^{sA^T} на разложение вектора $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{e}^{(2)}$, находим

$$e^{sA^T}\boldsymbol{x} = \alpha_1 e^{s\mu^{(1)}}\boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2 e^{s\mu^{(2)}}\boldsymbol{e}^{(2)}.$$

Следовательно,

$$\|e^{sA^T}\boldsymbol{x}\| \leqslant \Big\|\alpha_1 e^{s\mu^{(1)}}\boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2 e^{s\mu^{(2)}}\boldsymbol{e}^{(2)}\Big\| \leqslant e^{\mu s}\Big(|\alpha_1| + |\alpha_2|\Big) \equiv e^{\bar{\mu}s}\|\boldsymbol{x}\|_1,$$

где $\bar{\mu} = \max\{\operatorname{Re}\mu^{(j)}; j \in \{1,2\}\}$. В сочетании с (3.7) получаем оценку

$$\big(e^{sA}\, S^2 e^{sA^T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big) \leqslant e^{2\bar{\mu}s}\|S\|^2\|\boldsymbol{x}\|_1^2.$$

Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ равен нулю следующий предел для матрицы-функции, значениями которой являются симметричные положительно определенные матрицы:

$$\Big(\Big[\int\limits_t^\infty e^{sA}\, S^2 e^{sA^T} ds\Big]\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\Big) \leqslant \frac{e^{-2|\bar{\mu}|t}}{2|\bar{\mu}|}\, \|\boldsymbol{x}\|_1^2 \|S\|^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует сходимость указанного интеграла. Тогда существует предел

$$\lim_{t_0 \to -\infty} C(t,t) = \int\limits_0^\infty e^{sA}\, S^2 e^{sA^T} ds \equiv C.$$

Кроме того, для любого вектора $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, согласно (3.7), имеем $e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 \xrightarrow[t_0\to-\infty]{} 0$.

Перейдем к поточечному пределу $t_0 \to -\infty$ в формуле (3.1). Предельное значение функции $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$, которое мы обозначим как $f(\boldsymbol{x})$, существует и определяется формулой (3.6). Покажем, что матрица C положительно определена. Проинтегрируем тождество

$$\frac{d}{ds}\Big(e^{sA} S^2 e^{sA^T}\Big) = A e^{sA} S^2 e^{sA^T} + e^{sA} S^2 e^{sA^T} A^T$$

по s от 0 до ∞. В результате получим матричное уравнение Ляпунова

$$AC + CA^T + S^2 = 0,$$

которому должна удовлетворять матрица C. Пусть

$$C = c_0 E + \sum_l c_l T^{(l)}$$

— разложение матрицы C по базису $\langle E,\, T^{(l)},\, l = 1,2,3\rangle$. Подстановка этого разложения в уравнение с использованием коммутационных соотношений (3.4) дает $c_2 = 0$; также получаем следующие уравнения для коэффициентов c_0, c_1, c_3:

$$\omega c_3 = \beta c_1, \quad \beta(c_0 + c_3) = \frac{\sigma}{4\omega^2}, \quad \beta(c_0 + c_3) + \omega c_1 = \frac{\sigma}{4\omega^2},$$

из которых следует, что $c_1 = c_3 = 0$, $c_0 = \sigma/4\beta\omega^2$.

Таким образом, $C = (\sigma/4\beta\omega^2)E > 0$, и поэтому $f(\boldsymbol{x})$ является плотностью распределения вероятностей. Эта предельная плотность не зависит от $\boldsymbol{x}_0$. Так как она не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и плотность условных вероятностей перехода зависит только лишь от разности $t - t_0$, то предельный случайный гауссовский марковский процесс, который теперь определен для всех $t \in \mathbb{R}$, является стационарным (см. [9]). $\square$

Следствие 3.1. *Осцилляторный случайный процесс $\langle \tilde{x}(t),\ t \in \mathbb{R} \rangle$ является стационарным.*

4. Характеристическая функция случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$. Далее изучим распределение вероятностей случайной величины (1.7), которая представляется интегралом

$$J_t[\,\tilde{x}(s)\,] = \omega^2 \int\limits_0^t (\tilde{\boldsymbol{x}}(s), V\tilde{\boldsymbol{x}}(s))ds,$$

так как $\tilde{x}_1(s) = \dot{x}(s)/\omega$. Она с вероятностью 1 неотрицательна. Тогда ее распределение вероятностей удобно характеризовать производящей функцией

$$Q(\lambda, t) = \mathsf{E} \exp\Big(-\lambda J_t[\tilde{x}(s)]\Big), \quad \operatorname{Re}\lambda \in [0, \infty). \tag{4.1}$$

Характеристическая функция случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$ равна $Q(-i\lambda, t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Произведем вычисление функции (4.1) методом Фейнмана—Каца—Дынкина, идея которого изложена в [19]. Этот метод сводит вычисление функции $Q(\lambda, t)$ к поиску специального решения вспомогательного параболического уравнения типа уравнения Шрёдингера, которое получим в этом разделе. В отличие от указанной работы, мы не используем явным образом интегрирование по мере винеровского процесса $\langle \tilde{\boldsymbol{w}}(t),\ t \in [0, \infty) \rangle$, а воспользуемся формулой усреднения Фуруцу—Новикова (см. [10, 16]), связанной с процессом белого шума.

Введем, следуя М. Кацу, совместную одновременну́ю плотность $g(\boldsymbol{x}, v; t, \boldsymbol{x}_0)$ распределения вероятностей для составного случайного процесса, представляющего собой пару случайных процессов

$$\Big\langle \langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t), J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)] \rangle,\ t \in [0, \infty) \Big\rangle, \quad g(\boldsymbol{x}, v; t, \boldsymbol{x}_0) = \mathsf{E}\,\delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t))\delta(v - J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]),$$

которая является условной относительно фиксированных значений $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$, $J_0[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)] = 0$. Здесь первая δ-функция двумерная, а вторая — одномерная, хотя мы их обозначаем одной буквой; в дальнейшем это не вызовет недоразумений. Следующие интегралы с этой плотностью определяют плотность $f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, 0)$ и производящую функцию $Q(\lambda, t, \boldsymbol{x}_0)$ условного распределения вероятностей для величины $J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]$:

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, 0) = \int\limits_0^\infty g(\boldsymbol{x}, v; t, \boldsymbol{x}_0)dv, \quad h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) = \int\limits_0^\infty g(\boldsymbol{x}, v; t, \boldsymbol{x}_0)e^{-\lambda v}dv, \\ Q(\lambda, t; \boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0)d\boldsymbol{x} = \int\limits_0^\infty dv \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(\boldsymbol{x}, v; t, \boldsymbol{x}_0)e^{-\lambda v}d\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть случайные траектории процесса $\langle \tilde{\boldsymbol{z}}(s),\ s \in \mathbb{R} \rangle$ представляются таким функционалом

$$\tilde{z}_j(s) = \int\limits_\Lambda K_{jl}(s, s')\tilde{\varphi}_l(s')ds', \quad j \in \{1, 2\},$$

от реализаций белого шума, что они непрерывны с вероятностью 1. Пусть также $G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]$ — функционал от случайных траекторий $\tilde{\boldsymbol{z}}(s)$, обладающий вариационной производной (производной Гато) по этим функциям на пространстве непрерывных функций. Тогда для математического ожидания $\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]$, в рамках техники Фуруцу—Новикова, имеет место равенство

$$\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')] = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\mathsf{E}\,\frac{\delta G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)}\Big)\big(\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s)\big)ds. \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) вытекает, что математическое ожидание линейно относительно $G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]$. Пусть носитель Λ непрерывной относительно переменной s' функции $K_{jk}(s, s')$ содержит t в качестве внутренней точки. Тогда

$$\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s) = K_{jl}(s, t).$$

Если внутренность носителя не содержит точки t, то

$$\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s) = 0.$$

Наконец, если t является крайней точкой носителя, то

$$\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s) = \frac{1}{2}K_{jl}(t,t).$$

Последнее равенство связано с толкованием белого шума в смысле Стратоновича, так как в этом случае, согласно теореме Вонга—Закаи, правильное использование корреляционной функции белого шума состоит в замене обобщенной функции $\delta(t-s)$ на некоторую непрерывную корреляционную функцию $\Delta(s-t)$, которая является по определению четной, с последующим переходом к пределу $\Delta(t) \to \delta(t)$.

На основе перечисленных свойств устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть* $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}(t),\ t \in [0,\infty)\rangle$ *— двухкомпонентный случайный процесс, определяемый стохастическим дифференциальный уравнением* (1.4)*, и*

$$G[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)] = \exp\big(-i(\boldsymbol{q},\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) - \lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]\big).$$

Тогда имеет место формула

$$\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)] = -\frac{i}{2}\left(S\boldsymbol{q}\right)_j \mathsf{E}\,G[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]. \tag{4.4}$$

Доказательство. Согласно (1.5), положим

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{z}}(t), \quad \tilde{z}_j(t) = \int_0^t K_{jl}(t,s)\tilde{\varphi}_l(s)ds, \quad K_{jl}(t,s) = \big(e^{(t-s)A}S\big)_{j,l}\theta(t-s).$$

Тогда

$$\frac{\delta G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]}{\delta\tilde{z}_l(s)} = \Big(-iq_l\delta(t-s) - \lambda\frac{\delta J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]}{\delta\tilde{z}_l(s)}\Big)G[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)],$$

$$\frac{\delta J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]}{\delta\tilde{z}_l(s)} = 2\omega^2\int_0^t \delta(s-s')\big(V\tilde{\boldsymbol{x}}\big)_l(s')ds' = 2\omega^2\theta(t-s)\theta(s)\big(V\tilde{\boldsymbol{x}}\big)_l(s),$$

откуда следует, что

$$\int_0^t \frac{\delta J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s')]}{\delta\tilde{z}_l(s)}\big(\,\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s)\big)ds = 2\omega^2\int_0^t \big(V\tilde{\boldsymbol{x}}\big)_l(s)\big(\,\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s)\big)ds =$$

$$= 2\omega^2\int_0^t \big(V\tilde{\boldsymbol{x}}\big)_l(s)K_{l,j}(s,t)ds = 2\omega^2\int_0^t \big(V\tilde{\boldsymbol{x}}\big)_l(s)e^{(s-t)A}S_{lj}\theta(s-t)ds = 0,$$

так как t является внешней точкой по отношению к интервалу интегрирования по s. Учитывая полученное равенство, получаем, согласно (4.3), формулу (4.4). Для слагаемого с ядром $K_{jl}(s,s')$, точка t является крайней в интервале интегрирования, и мы положим $\mathsf{E}\,\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_l(s) = S_{lj}/2$. Мы воспользовались также симметрией матрицы S. □

Следующее утверждение является основой для вычисления производящей функции $Q(\lambda,t)$.

Теорема 4.1. *Плотность* $h(\boldsymbol{x},\lambda;t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t}h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0) = \Big[-\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}},A\boldsymbol{x}\Big)h + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}},S^2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)h - \lambda\omega^2(V\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})h\Big](\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0), \tag{4.5}$$

которым она, вместе с условиями

$$h(\boldsymbol{x},\lambda;0,\boldsymbol{x}_0) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \quad h(\boldsymbol{x},0;t,\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}_0,0)$$

однозначно определяется.

Доказательство. Заметим, что

$$h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) = \mathsf{E}\,\delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]),$$

откуда, в частности следует необходимость последних условий в формулировке теоремы, так как $J_0[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] = 0$ и вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$ неслучаен, и поэтому

$$h(\boldsymbol{x}, \lambda; 0, \boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}, 0; \boldsymbol{x}_0, 0) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Кроме того,

$$h(\boldsymbol{x}, 0; t, \boldsymbol{x}_0) = \mathsf{E}\,\delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) = f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, 0).$$

Представим функцию $h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0)$ в виде интеграла Фурье

$$h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})}\,\mathsf{E}\,G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q}.$$

Запишем выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial t} G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] = -G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]\Big[i\Big(\boldsymbol{q}, \frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\Big) + \lambda\omega^2(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t))\Big] =$$
$$= -G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]\Big[i(\boldsymbol{q}, A\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) + i(\boldsymbol{q}, S\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) + \lambda\omega^2(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t))\Big].$$

Выполняя преобразование Фурье для математического ожидания от обеих частей этого равенства, воспользовавшись (4.4), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} (\boldsymbol{q}, A\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) d\boldsymbol{q} -$$
$$- \frac{\lambda\omega^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})}\,\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q} - \frac{i}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} (\boldsymbol{q}, S\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q}. \quad (4.6)$$

Первое слагаемое в правой части формулы преобразуется следующим образом:

$$\frac{i}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} (\boldsymbol{q}, A\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) d\boldsymbol{q} = \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, A\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\Big) \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) d\boldsymbol{q} =$$
$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, A\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\Big) \delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{z}(s)]) = \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, A\,\boldsymbol{x}\Big) h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0). \quad (4.7)$$

Преобразование же второго слагаемого в (4.6) дается равенствами

$$\frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})}\,\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q} = \omega^2\,\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q} =$$
$$= \omega^2\,\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), V\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \delta(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) = \omega^2(\boldsymbol{x}, V\boldsymbol{x}) h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0). \quad (4.8)$$

Наконец, для преобразования последнего слагаемого в (4.6) применим формулу (4.4):

$$\frac{i}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} (\boldsymbol{q}, S\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q} = \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, S\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\Big) \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})} G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) d\boldsymbol{q} =$$
$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, S \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})}\,\mathsf{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\Big) G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)]) d\boldsymbol{q} = -\frac{i}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, S^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{q} e^{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})}\,\mathsf{E}\ G[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] d\boldsymbol{q}\Big) =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0).$$

Подставляя это выражение вместе с (4.7) и (4.8) в (4.6), получаем уравнение (4.5). □

5. Формула Каца—Зигерта для осцилляторного процесса. По определению, функция $h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)$ существует и единственна, так как существует и единственна плотность распределения $g(\boldsymbol{x},v;t,\boldsymbol{x}_0)$ и функция $h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)$ представляет собой условное математическое ожидание случайной величины $\exp(-\lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)])$, распределенной согласно совместной плотности $g(\boldsymbol{x},v;t,\boldsymbol{x}_0)$. При этом случайная величина ограничена при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, ввиду того, что $J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}(s)] \geqslant 0$ с вероятностью 1.

С целью вычисления функции $h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)$, прежде всего, найдем решение уравнения (4.5), удовлетворяющее начальному условию $h(\boldsymbol{x},\lambda;0,\boldsymbol{x}_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$. Для этого понадобится какое-либо вещественное симметричное невырожденное решение следующего матричного уравнения Риккати [11] относительно матрицы B при $\Im\lambda=0$:

$$BS^2B+(AB+BA^T)-2\lambda\omega^2V=0. \tag{5.1}$$

Положим $B=\rho E$. Ввиду определения матриц A и S, уравнение запишем в виде

$$\Big[\frac{\sigma}{\omega^2}\rho^2-4\beta\rho-2\lambda\omega^2\Big]V=0;$$

решениями квадратного уравнения

$$\frac{\sigma}{\omega^2}\rho^2-4\beta\rho-2\lambda\omega^2=0$$

являются

$$\rho_\pm=\frac{2\omega^2}{\sigma}(\beta\pm r),\quad r=\Big(\beta^2+\frac{\lambda\sigma}{2}\Big)^{1/2}. \tag{5.2}$$

Положим, что функция $h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)$ имеет вид

$$h=H\cdot\exp\Big(at-\frac12(x,Bx)\Big),\quad H=H(\boldsymbol{x},\lambda;t),$$

с симметричной матрицей $B^T=B$. Тогда

$$\nabla_k\nabla_jh=\exp\Big(at-\frac12(\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x})\Big)\Big[\nabla_k\nabla_jH-(B\boldsymbol{x})_j\nabla_kH-(B\boldsymbol{x})_k\nabla_jH+\big(-B_{jk}+(B\boldsymbol{x})_j(B\boldsymbol{x})_k\big)H\Big],$$

$$\nabla_j(A\boldsymbol{x})_jh=\exp\Big(at-\frac12(\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x})\Big)\Big[(A)_{jj}H+(A\boldsymbol{x})_j\big(\nabla_jH-(B\boldsymbol{x})_jH\big)\Big],$$

где здесь и далее по повторяющимся индексам j и/или k производится суммирование, $j,k\in\{1,2\}$. Подстановка полученных выражений в (4.5) дает следующее равенство:

$$aH+\dot H=-\Big[(A)_{jj}H+(A\boldsymbol{x})_j\big(\nabla_jH-(B\boldsymbol{x})_jH\big)\Big]+$$
$$+\frac12(S^2)_{jk}\Big[\nabla_k\nabla_jH-\nabla_kH\cdot(B\boldsymbol{x})_j-\nabla_jH\cdot(B\boldsymbol{x})_k+\big(-B_{jk}+(B\boldsymbol{x})_j(B\boldsymbol{x})_k\big)H\Big]-\lambda\omega^2(\boldsymbol{x},V\boldsymbol{x})H.$$

Постоянную a и матрицу B выберем таким образом, чтобы уравнение для функции H не содержало членов, пропорциональных самой функции H. Отсюда следует, что

$$a=-\operatorname{Sp}\Big(A+\frac12S^2B\Big);$$

так как матрица S^2 симметрична и имеет место равенство $(BA\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(A^TB\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, то матрица B должна быть решением матричного уравнения (5.1). При указанном выборе матрицы B, используя (2.2), находим, что $a=\beta\mp r$, а функция H должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot H=\frac12(S^2)_{jk}\nabla_k\nabla_jH-(D\boldsymbol{x})_j\nabla_jH, \tag{5.3}$$

где

$$D=A+S^2B, \tag{5.4}$$

и начальному условию

$$H(\boldsymbol{x},\lambda;0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\exp\Big[\frac12(B\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0)\Big].$$

В уравнении (5.3) перейдем от векторов $\boldsymbol{x}$ к зависящим от времени векторам $\boldsymbol{y}=e^{-tD}\boldsymbol{x}$. Введем такую функцию $F(\boldsymbol{y},\lambda;t)$, что

$$F(e^{-Dt}\boldsymbol{x},\lambda;t)=H(\boldsymbol{x},\lambda;t).$$

В результате для этой функции получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}F(\boldsymbol{y},\lambda;t)=\frac{1}{2}\big(S_-^2(t)\big)_{jk}\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}F(\boldsymbol{y},\lambda;t), \tag{5.5}$$

где введена матрица

$$S_-^2(t)=\exp(-tD)S^2\exp(-tD^T).$$

Непосредственной подстановкой проверяем, что

$$F(\boldsymbol{y},\lambda;t)=\frac{\exp[(\boldsymbol{x}_0,B\boldsymbol{x}_0)/2]}{\big[(2\pi)^2\det\,G_-(t)\big]^{1/2}}\exp\big[-((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0),G_-^{-1}(t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0))/2\big], \tag{5.6}$$

является решением уравнения (5.5), удовлетворяющее начальному условию

$$F(\boldsymbol{y},\lambda;0)=H(\boldsymbol{x},\lambda;0)_{x=y},$$

где

$$G_-(t)=\int_0^t S_-^2(s)ds.$$

Матрица S^2 симметрична и неотрицательно определена; такова же и матрица $S_-^2(t)$. Более того, эта матрица положительно определена для почти всех $s>0$. В самом деле, если вектор $e^{-sD^T}\boldsymbol{x}$ в $\mathbb{R}^2$ является собственным для матрицы S^2 с нулевым собственным значением, т.е. $e^{-sD^T}\boldsymbol{x}=c\langle 1,0\rangle$, то такое равенство возможно только для какого-либо одного значения s, так как матрица D не коммутирует с S^2 и знак реальной части ее собственных значений фиксирован. Ввиду положительной определенности матрицы $S_-^2(s)$ для почти всех s, матрица $G_-(t)$ положительно определена при $t\neq 0$ и, в частности, $\det G_-(t)\neq 0$. Ввиду симметричности матрицы $S_-^2(t)$, таким же свойством обладает матрица $G_-(t)$ при любом $t\neq 0$. Матрица $G_-^{-1}(t)$ обладает теми же свойствами, что и матрица $G_-(t)$. Это означает, что функция (5.6) существует, неотрицательна и суммируема по $\boldsymbol{y}$ на $\mathbb{R}^2$. Так как матрица $G_-(t)$ стремится к нулю при $t\to 0$, то функция (5.6) стремится к $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0)\exp[(\boldsymbol{x}_0,B\boldsymbol{x}_0)/2]$, т.е. удовлетворяет указанному выше начальному условию.

На основе (5.6) находим требуемое решение уравнения (5.3):

$$H(\boldsymbol{x},\lambda;t)=\frac{\exp[(\boldsymbol{x}_0,B\boldsymbol{x}_0)/2]}{\big[(2\pi)^2\det\,G_-(t)\big]^{1/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\big((e^{-tD}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\ G_-^{-1}(t)(e^{-tD}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\big)\Big]$$

и, следовательно,

$$h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)=\frac{e^{at}}{\big[(2\pi)^2\det\,G_-(t)\big]^{1/2}}\exp\Big\{\frac{1}{2}\big[(\boldsymbol{x}_0,B\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x})\big]\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\big(\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0\big),\ \big[e^{tD}G_-(t)e^{tD^T}\big]^{-1}(\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0)\Big)\Big]. \tag{5.7}$$

Произведем несложные преобразования входящих в эту формулу матриц:

$$e^{tD}G_-(t)e^{tD^T}=\int_0^t e^{sD}S^2e^{sD^T}ds\equiv G_+(t),$$
$$\det G_+(t)=\big(\det e^{tD}\big)\big(\det G_-(t)\big)\big(\det e^{tD^T}\big)=\exp(2t\,\mathrm{Sp}\,D)\cdot\det G_-(t) \tag{5.8}$$

и, следовательно,

$$e^{-t\,\mathrm{Sp}\,BS^2/2}[\det G_+(t)]^{1/2}=e^{t\,\mathrm{Sp}\,D-BS^2/2}[\det G_-(t)]^{1/2}=e^{-at}[\det G_-(t)]^{1/2}. \tag{5.9}$$

Так как матрица $G_-(t)$ положительно определена, то и матрица $G_+(t)$, согласно своему определению, положительно определена. Наконец, так как в формуле (3.1) отсутствует матрица S^2, то для выполнимости условия $h(\boldsymbol{x},0;t,\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}_0,0)$, нужно положить, чтобы $B=0$ при $\lambda=0$, т.е. нужно выбрать $\rho=\rho_-$ (см. (5.2)) в определении матрицы B. Таким образом, принимая во внимание (5.8) и (5.9), заключаем, что формула (5.7) приобретает следующий вид:

$$h(\boldsymbol{x},\lambda;t,\boldsymbol{x}_0)=\frac{\exp(t\,\mathrm{Sp}\,BS^2/2)}{\big[(2\pi)^2\det G_+(t)\big]^{1/2}}\exp\Big\{\frac{1}{2}\big[(\boldsymbol{x}_0,B\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x})\big]\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\big(\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0\big),\ G_+^{-1}(t)\big(\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0\big)\Big)\Big].\quad(5.10)$$

Вычислим матрицу $G_+(t)$. Прежде всего, заметим, что согласно определению и соотношениям (3.2) и (5.4) матрица D представляется разложением $D=-2rV-i\omega T^{(2)}$ и имеет *характеристику* $D=\sqrt{r^2-\omega^2}$. Используя (3.3), находим

$$\exp\big(tD\big)=e^{-rt}\Big(\mathrm{ch}(Dt)\,E-D^{-1}\big(rT^{(3)}+i\omega T^{(2)}\big)\,\mathrm{sh}(Dt)\Big).\quad(5.11)$$

Ввиду того, что

$$T^{(3)}V=VT^{(3)}=V,\quad T^{(2)}VT^{(2)}=E-V,\quad VT^{(2)}-T^{(2)}V=-iT^{(1)}$$

и вследствие (3.4) справедливы следующие преобразования:

$$e^{tD}S^2e^{tD^T}=$$
$$=\frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2}\Big(\mathrm{ch}(Dt)\,E-\frac{1}{D}\big(rT^{(3)}+i\omega T^{(2)}\big)\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)V\Big(\mathrm{ch}(Dt)\,E-\frac{1}{D}\big(rT^{(3)}-i\omega T^{(2)}\big)\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)=$$
$$=\frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2}\Big[\Big(\mathrm{ch}(Dt)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)^2V+\frac{\omega^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt)(E-V)+\frac{i\omega}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big(\mathrm{ch}(Dt)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)[V,T^{(2)}]\Big]=$$
$$=\frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2}\Big[\frac{E}{2}\Big\{\Big(\mathrm{ch}(Dt)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)^2+\frac{\omega^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\Big\}+\frac{T^{(3)}}{2}\Big\{\Big(\mathrm{ch}(Dt)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)^2-\frac{\omega^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\Big\}+$$
$$+\frac{\omega}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big(\mathrm{ch}(Dt)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)T^{(1)}\Big].$$

Интегрируя по t, согласно (5.8), получаем выражения для элементов $G_{jk}(t)$, $j,k\in\{1,2\}$, матрицы $G_+(t)=G_+^T(t)$:

$$G_{jk}(t)=\int_0^t(e^{sD}S^2e^{sD^T})_{jk}ds,\quad j,k\in\{1,2\}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-2rs}\,\mathrm{sh}(Ds)\,\mathrm{ch}(Ds)ds=\frac{1}{2D}e^{-2rt}\,\mathrm{sh}^2(Dt)+\frac{r}{D}\int_0^t e^{-2rs}\,\mathrm{sh}^2(Ds)ds,$$

то

$$G_{12}(t)=\frac{2\beta\varkappa\omega}{D^2}\,e^{-2rt}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\equiv W(t).\quad(5.12)$$

Вводя обозначения

$$U(t)=\frac{\beta\varkappa}{r}\big(1-e^{-2rt}\big),\quad V(t)=\frac{\beta\varkappa}{D}\,e^{-2rt}\,\mathrm{sh}(2Dt),\quad(5.13)$$

дифференцированием по t, с учетом определения характеристики $D^2=r^2-\omega^2$, проверяется равенство

$$G_{22}(t)=\frac{\sigma}{D^2}\int_0^t e^{-2rs}\,\mathrm{sh}^2(Ds)ds=U(t)-\frac{r}{\omega}G_{12}(t)-V(t).\quad(5.14)$$

Точно так же, разбивая интеграл на отдельные слагаемые, проверяется соотношение

$$G_{11}(t)=\frac{\sigma}{\omega^2}\int_0^t e^{-2rs}\Big(\mathrm{ch}(Ds)-\frac{r}{D}\,\mathrm{sh}(Ds)\Big)^2ds=U(t)-\frac{r}{\omega}G_{12}(t)+V(t).\quad(5.15)$$

На основании (5.14), (5.15) запишем разложение для матрицы $G_+(t)$:

$$G_+(t) = \Big(U(t) - \frac{r}{\omega}\, W(t)\Big)E + W(t)T^{(1)} + V(t)T^{(3)} \tag{5.16}$$

и выражение для ее детерминанта:

$$G(t) \equiv \det\, G_+(t) = G_{11}(t)G_{22}(t) - G_{12}^2(t) = \Big(U(t) - \frac{r}{\omega}W(t)\Big)^2 - V^2(t) - W^2(t). \tag{5.17}$$

Заметим, наконец, что $\operatorname{Sp} BS^2 = 2(\beta - r)$, а обратная матрица $G_+^{-1}(t)$ представляется формулой

$$G_+^{-1}(t) = G^{-1}(t) \begin{pmatrix} G_{22}(t) & -G_{12}(t) \\ -G_{12}(t) & G_{11}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

При этом если $B = 0$, то $G_+(t) = G_-(t) = C(t,t)$ и поэтому выполняется условие

$$h(\boldsymbol{x}, 0; t, \boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, 0).$$

Окончательный вид формулы (5.10) для функции $h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0)$, полученный выше, приведен в следующем утверждении.

Теорема 5.1. *При $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$, $\omega^2 \neq \beta^2$ плотность $h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0)$ производящей функции условного распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}](s)$ имеет вид*

$$h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) = \frac{\exp(t(\beta - r))}{\big[(2\pi)^2 G(t)\big]^{1/2}} \exp\left\{\omega^2(\beta - r)\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\right]\sigma\right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\big((\boldsymbol{x} - e^{tD}\boldsymbol{x}_0), G_+^{-1}(t)(\boldsymbol{x} - e^{tD}\boldsymbol{x}_0)\big)\right], \quad r = \left(\beta^2 + \frac{\lambda\sigma}{2}\right)^{1/2},$$

где функции $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$, $G(t)$ определяются, соответственно, формулами (5.12), (5.13), (5.17), (5.18), *а матрица D имеет вид*

$$D = \begin{pmatrix} -2r & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании формулы (4.2) производящая функция условного распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{\boldsymbol{z}}](s)$ определяется интегралом плотности $h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0)$ по $\boldsymbol{x}$

$$Q(\lambda, t; \boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x}, \lambda; t, \boldsymbol{x}_0) d\boldsymbol{x} = \frac{\exp\left[\big(t \operatorname{Sp} BS^2 + (\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{x}_0)\big)/2\right]}{\big[(2\pi)^2 \det\, G_+(t)\big]^{1/2}} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big[\big(\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}\big) + \big((\boldsymbol{x} - e^{tD}\boldsymbol{x}_0), G_+^{-1}(t)(\boldsymbol{x} - e^{tD}\boldsymbol{x}_0)\big)\Big]\right\} d\boldsymbol{x}.$$

Лемма 5.1. *Пусть $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$, $\omega^2 \neq \beta^2$. Тогда квадратичная форма $\big((B + G_+^{-1}(t))\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\big)$ положительна.*

Доказательство. Собственные числа $\nu_\pm$ матрицы $D = A + S^2B$ являются корнями уравнения $\nu^2 + 2r\nu + \omega^2 = 0$. Так как $\nu_\pm = -2r \pm (r^2 - \omega^2)^{1/2}$, то $\max \operatorname{Re} \nu_\pm < 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и $\omega^2 \neq 0$. При этих условиях $\operatorname{Re}\nu_+ < \beta - \operatorname{Re} r < 0$ и поэтому $\|e^{Ds}\| < e^{s(\beta - \operatorname{Re} r)}$, $s > 0$. Следовательно,

$$\|G_+(t)\| \leqslant \|S\|^2 \int\limits_0^t \|e^{Ds}\|^2 ds < \frac{\sigma}{2\omega^2}(\operatorname{Re} r - \beta)^{-1} = \big(|\operatorname{Re}\rho|\big)^{-1}$$

ввиду отрицательности $\operatorname{Re}\rho$, и поэтому для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ имеют место неравенства

$$(G_+(t)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leqslant \|G_+(t)\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\big(|\operatorname{Re}\rho|\big)^{-1}. \tag{5.19}$$

Так как вещественные симметричные матрицы $G_+(t)$, $G_+^{-1}(t)$ положительно определены, то, выбрав их положительно определенные квадратные корни, получаем, используя неравенство Коши—Буняковского:

$$\big(G_+(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)\big(G_+^{-1}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big) \geqslant \big(G_+(t)^{1/2}\boldsymbol{x}, G_+^{1/2}(t)\boldsymbol{x}\big)\big(G_+^{-1/2}(t)\boldsymbol{x}, G_+^{-1/2}(t)\boldsymbol{x}\big) \geqslant \Big|\big(G_+^{1/2}(t)\boldsymbol{x}, G_+^{-1/2}(t)\boldsymbol{x}\big)\Big|$$

и поэтому

$$\big(G_+^{-1}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big) \geqslant \big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)\big(G_+(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)^{-1}.$$

Вместе с оценкой (5.19) это дает неравенство

$$(G_+^{-1}(t)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})|\operatorname{Re}\rho|,$$

откуда следует

$$\big((B+G_+^{-1}(t))\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big) = \big((G_+^{-1}(t) - |\operatorname{Re}\rho|\,E)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big) > 0. \qquad \square$$

Используя положительную определенность матрицы $B+G_+^{-1}(t)$, вычисление интеграла производится посредством выделения полного квадрата по вектору $\boldsymbol{x}$ в показателе экспоненты подинтегрального выражения:

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x}\big) + \big((\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0), G_+^{-1}(t)(\boldsymbol{x}-e^{tD}\boldsymbol{x}_0)\big) = \big(e^{tD}\boldsymbol{x}_0, B\big[E+G_+(t)B\big]^{-1}e^{tD}\boldsymbol{x}_0\big) + \\ + \bigg((B+G_+^{-1}(t))\big(\boldsymbol{x}-(B+G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\boldsymbol{x}_0\big), \boldsymbol{x}-(B+G^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\boldsymbol{x}_0\bigg).\end{aligned}$$

Вычислив двумерный интеграл Пуассона по $\boldsymbol{x}$, находим

$$Q(\lambda,t;\boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\exp\Big[t\operatorname{Sp}BS^2 + \big(\boldsymbol{x}_0, \big[B - e^{tD^T}B\big[E+G_+(t)B\big]^{-1}e^{tD}\big]\boldsymbol{x}_0\big)\big]}{\det\big(E+G_+(t)B\big)}\right]^{1/2}. \tag{5.20}$$

Подставляя явное выражение для матриц B и S, приходим к заключению, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *При $\beta>0$, $\omega^2\neq0$, $\omega^2\neq\beta^2$ производящая функция $Q(\lambda,t;\boldsymbol{x}_0)$ распределения условных вероятностей при условии $\tilde{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$ определяется следующей формулой:*

$$Q(\lambda,t;\boldsymbol{x}_0) = \frac{\exp\Big\{(\beta-r)\Big[t+\omega^2(\boldsymbol{x}_0, \big[E-e^{tD^T}\big[E+2\omega^2(\beta-r)G_+(t)/\sigma\big]^{-1}e^{tD}\big]\boldsymbol{x}_0)/\sigma\Big]\Big\}}{\Big[\det\big(E+2\omega^2(\beta-r)G_+(t)/\sigma\big)\Big]^{1/2}};$$

зависимость от λ определяется зависимостью от параметра $r=(\beta^2+\lambda\sigma/2)^{1/2}$ и матрицы D.

Наконец, вычислим производящую функцию $Q(\lambda,t)$ безусловного распределения вероятностей значений функционала $J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]$ от траекторий осцилляторного случайного процесса, которую мы называем обобщенной формулой Каца—Зигерта.

Согласно определению производящей функции $Q(\lambda,t)$ (см. (4.1)), она выражается посредством интеграла

$$Q(\lambda,t) = \mathsf{E}\exp\big(-\lambda J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]\big) = \int_{\mathbb{R}^2} Q(\lambda,t;\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x}_0)d\boldsymbol{x}_0,$$

где плотность $f(\cdot)$ определяется формулой (3.6). Используя эти определения и (5.20), запишем интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} Q(\lambda,t;\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x}_0)d\boldsymbol{x}_0 = \left[\frac{\exp\big(t\operatorname{Sp}BS^2\big)}{(2\pi)^2\det C\cdot\det\big(E+G_+(t)B\big)}\right]^{1/2}\times \\ \times\int_{\mathbb{R}^2}\exp\bigg(-\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{x}_0, \Big[C^{-1}-B+e^{tD^T}B\big[E+G_+(t)B\big]^{-1}e^{tD}\Big]\boldsymbol{x}_0\big)\bigg)d\boldsymbol{x}_0,\end{aligned}$$

где $C = \varkappa E$ (см. (3.6)). Воспользуемся тем, что $B < 0$ и $C > 0$. В этом случае матрица в показателе экспоненты положительно определена, так как $G_+^{-1}(t) > 0$. Вычислим двумерный интеграл Пуассона:

$$Q(\lambda, t) = \frac{\exp\big(t(\beta - r)\big)}{\Big[\det\Big(E - CB + Ce^{tD^T}B\big[E + G_+(t)B\big]^{-1}e^{tD}\Big)\cdot\det\,\big(E + G_+(t)B\big)\Big]^{1/2}},$$

где использовано соотношение $\mathrm{Sp}\,BS^2 = 2(\beta - r)$. Так как $D = A + BS^2$, $\mathrm{Sp}A = -2\beta$, то

$$Q(\lambda, t) = \frac{\exp\big((\beta + r)t\big)}{\Big[\det\Big(e^{-tD^T}e^{-tD}(1 - \varkappa\rho) + CB\big[E + G_+(t)B\big]^{-1}\Big)\cdot\det\,\big(E + G_+(t)B\big)\Big]^{1/2}} = \\ = \frac{\exp\big((\beta + r)t\big)}{\Big[\det\Big((1 - \varkappa\rho)\big(e^{-tD}e^{-tD^T} + \rho G_-(t)\big) + \varkappa\rho E\Big)\Big]^{1/2}}, \quad (5.21)$$

где произведена циклическая перестановка матрицы e^{-tD^T} под оператором det и использована формула (5.8). Так как

$$D = -2rV - i\omega T^{(2)}, \quad D^T = -2rV + i\omega T^{(2)}, \quad V = \frac{1}{2}(E + T^{(3)}),$$

то, согласно (5.11),

$$e^{-Dt} = e^{rt}\Big(\mathrm{ch}(Dt)\,E + \frac{rT^{(3)} + i\omega T^{(2)}}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big),$$
$$e^{-D^Tt} = e^{rt}\Big(\mathrm{ch}(Dt)\,E + \frac{rT^{(3)} - i\omega T^{(2)}}{D}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big)$$

и поэтому

$$e^{-2rt}e^{-Dt}e^{-D^Tt} = \Big(1 + \frac{2r^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\Big)E - \frac{2\omega rT^{(1)}}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt) + \frac{rT^{(3)}}{D}\,\mathrm{sh}(2Dt) \equiv L.$$

Заметим, что $G_-(t) = -G_+(-t)$, и поэтому, согласно (5.12), (5.13), (5.16), разложение матрицы $G_-(t)$ по базису $\langle E,\, T^{(l)};\, l = 1, 2, 3\rangle$ имеет вид

$$e^{-2rt}G_-(t) = \eta\big(L - e^{-2rt}\big), \quad \eta = \frac{\beta\varkappa\rho}{r}.$$

Вычислим коэффициенты разложения матрицы $R = (1 - \varkappa\rho)\big(e^{-tD}e^{-tD^T} + \rho G_-(t)\big) + \varkappa\rho E$. Так как

$$e^{-2rt}\Big[e^{-Dt}e^{-D^Tt} + \rho G_-(t)\Big] = (1 + \eta)L - \eta e^{-2rt}E,$$

то

$$R = (1 - \varkappa\rho)\Big((1 + \eta)Le^{2rt} - \eta E\Big) + \varkappa\rho E.$$

Представим эту матрицу в виде $R = L_0e^{2rt} + \gamma E$, где

$$L_0 = (1 - \varkappa\rho)(1 + \eta)\frac{2r}{D^2}\,\mathrm{sh}(Dt)\Big[(rE - \omega\,T^{(1)})\,\mathrm{sh}(Dt) + T^{(3)}D\,\mathrm{ch}(Dt)\Big],$$
$$\gamma = (1 + \eta)\big((1 - \varkappa\rho)e^{2rt} + \varkappa\rho\big) - \eta.$$

При вычислении ее детерминанта на основе коэффициентов разложения по базису $\langle E,\, T^{(l)};\, l = 1, 2, 3\rangle$ воспользуемся тем, что она имеет порядок 2, т.е.

$$\det R = \gamma^2 + \gamma\, e^{2rt}\,\mathrm{Sp}\,L_0 + e^{4rt}\,\det L_0.$$

Тогда

$$(1 - \varkappa\rho)(1 + \eta) = \frac{(\beta + r)^2}{4\beta r} \equiv \theta_+, \quad (1 + \eta)\varkappa\rho - \eta = -\frac{(\beta - r)^2}{4\beta r} \equiv -\theta_-,$$

$$\det L_0 = \theta_+^2\,\frac{(2r)^2}{D^4}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\Big[(r^2 - \omega^2)\,\mathrm{sh}^2(Dt) - D^2\,\mathrm{ch}^2(Dt)\Big] = -\theta_+^2\,\frac{(2r)^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt).$$

Так как матрицы $T^{(1)}$, $T^{(3)}$ имеют нулевой след, то

$$\operatorname{Sp} L_0 = \theta_+ \frac{(2r)^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt), \quad \gamma = \theta_+ e^{2rt} - \theta_-.$$

Следовательно,

$$\det R = e^{2rt}\Big([\theta_+ e^{rt} - \theta_- e^{-rt}]^2 - \theta_-\theta_+ \frac{(2r)^2}{D^2}\,\mathrm{sh}^2(Dt)\Big).$$

Наконец, подставляя это выражение в знаменатель формулы (5.21), с учетом обозначений $\theta_\pm$, получаем основной результат работы, который мы сформулируем в виде отдельного утверждения.

Теорема 5.3. *При* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *производящая функция* $Q(\lambda, t)$ *безусловного распределения вероятностей случайной величины, представленной значениями функционала* $J_t[\tilde{\boldsymbol{x}}(s)]$ *от траекторий осцилляторного случайного процесса в случае, когда* $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$ *и* $\beta^2 \neq \omega^2$, *определяется следующей формулой*:

$$Q(\lambda, t) = \frac{4r\beta e^{\beta t}}{\left[\Big((\beta + r)^2 e^{rt} - (\beta - r)^2 e^{-rt}\Big)^2 - 4r^2(\beta^2 - r^2)^2 \dfrac{\mathrm{sh}^2(Dt)}{D^2}\right]^{1/2}}, \tag{5.22}$$

где $D = \sqrt{r^2 - \omega^2}$, $r = \sqrt{\beta^2 + \lambda\sigma/2}$.

6. Заключение. Полученная в работе формула (5.22), представляющая основной ее результат, выражает в явной форме, в терминах элементарных функций, характеристическую функцию (1.6) случайной величины

$$J_t[\tilde{x}(s)] = \int\limits_0^t \left(\frac{d\tilde{x}(s)}{ds}\right)^2 ds$$

в случае, если $\tilde{x}(t)$; $t \in \mathbb{R}$ — случайные траектории осцилляторного случайного процесса.

Кроме определенного прогресса в области изучения распределений вероятностей квадратичных функционалов от траекторий гауссовских случайных процессов, этот результат может иметь важные приложения в статистической радиофизике и квантовой оптике. Заметим, что каждая характеристическая функция такого рода пропорциональна детерминанту Фредгольма интегрального оператора, ядро которого связано с корреляционным интегральным оператором. По этой причине полученный результат может оказаться полезным в теории интегральных уравнений. Отметим также, что в работе изучен так называемый вырожденный случай, когда детерминанты каждой из матриц S^2 и V равны нулю. С этой точки зрения в дальнейшем важно изучить общий невырожденный случай, для которого, по-видимому, также возможно явное вычисление соответствующего детерминанта Фредгольма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса// Докл. АН Укр. ССР. Сер. А. — 1989. — *1*. — С. 14–16.
2. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса// Пробл. передачи информ. — 1990. — *26*, № 3. — С. 96–101.
3. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Статистические свойства кросс-корреляционного функционала на траекториях двух процессов Орнштейна—Уленбека// Радиофиз. квант. электрон. — 1996. — *39*, № 7. — С. 916–924.
4. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Распределение кросс-корреляционного функционала от траекторий двух процессов Орнштейна—Уленбека// Докл. НАНУ. — 1996. — *4*. — С. 27–30.
5. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Исследование статистики функционала контроля качества в теории обработки шероховатой поверхности// Функц. матер. — 2004. — *11*, № 1. — С. 6–13.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1954.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
9. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Handbook on probability theory and mathematical statistics. — М.: Наука, 1985.

10. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности// ЖЭТФ. — 1964. — *47.* — С. 1919–1927.
11. *Палин В. В.* О разрешимости квадратных матричных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2008. — *6.* — С. 36–41.
12. *Anderson T. W.* The Statistical Analysis of Time Series. — New York: Wiley, 1971.
13. *Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R.* Theory of Distributions. The Sequential Approach. — Amsterdam: Elsevier, 1973.
14. *Arato M.* Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
15. *Doob J. L.* Stochastic Processes. — New York: Wiley, 1953.
16. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium// J. Res. Natl. Bur. Standards. Sec. D. — 1963. — *67.* — P. 303–311.
17. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
18. *Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A.* Gaussian Random Processes. — New York: Springer-Verlag, 1978.
19. *Kac M.* Probability and Related Topics in Physical Sciences. — New York: Interscience, 1957.
20. *Kac M., Ziegert A. J. F.* On the theory of noise in radio receivers with square law detector// J. Appl. Phys. — 1947. — *18*, № 4. — P. 383–397.
21. *Karhunen K.* Über Linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeit Srechung// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1947. — *1*, № 2.
22. *Kendall M.* Time Series. — London: Griffin, 1975.
23. *Lax M.* Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics. — New York: Gordon & Breach, 1968.
24. *Loéve M.* Probability Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1955.
25. *Pugachev V. S.* Theory of Random Functions And Its Application to Control Problems. — Amsterdam: Elsevier, 2013.
26. *Pugachev V. S., Sinitsin I. N.* Stochastic Differential Systems Analysis and Filtering. — Chichester–New York: World Scientific, 2002.
27. *Simon B.* The $P(\varphi)_2$ Euclidian Quantum Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
28. *Slepian D.* Fluctuation of random noise power// Bell Systems Tech. J. — 1958. — *37*, № 1. — P. 163–184.
29. *Stratonovich R. L.* Selected Topics in the Theory of Random Noise. Vols. 1, 2. — New York: Gordon & Breach, 1963, 1967.
30. *Wong E., Zakai M.* On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals// Ann. Math. Stat. — 1965. — *36*, № 5. — P. 1560–1564.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова;
Белгородский государственный университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Мазманишвили Александр Сергеевич
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
E-mail: `не указан`