УДК 517.951

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

SPECTRAL PROPERTIES OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF SECOND ORDER

В.В. Корниенко
V.V. Kornienko

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, д. 28
Bunin Yelets State University, Kommunarov St., 28, Eletz, 399770, Russia

E-mail: kor-sin@mail.ru

Аннотация. Для замкнутого дифференциального оператора, порожденного задачей Дирихле изучены спектры: непрерывный и остаточный спектры замкнутого оператора образуют пустое множество $C\sigma L = R\sigma L = \varnothing$. Точечный спектр $P\sigma L$ оператора $L : H_{t,x} \to H_{t,x}$ располагается на вещественной прямой комплексной плоскости C. Собственные вектор-функции оператора L образуют базис Рисса в гильбертовом пространстве $H_{t,x}$.

Resume. For a closed differential operator generated by the Dirichlet problem studied spectra: continuous and residual spectrum of the operator of a closed form the empty set $C\sigma L = R\sigma L = \varnothing$. The point spectrum $P\sigma L$ of the operator $L : H_{t,x} \to H_{t,x}$ located on the real axis of the complex plane C. Proper vector function of L form a Riesz basis in the Hilbert space $H_{t,x}$.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, базис Рисса.

Key words: system of differential equations, boundary value problems, closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, a Riesz basis.

Введение

Работа посвящена изучению и описанию спектральных свойств [4] замкнутого и в тоже самое время неограниченного дифференциального оператора, порожденного задачей Дирихле для 2×2 гиперболической системы вида (1), рассматриваемой в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x}$ евклидова пространства $R^2_{t,x}$.

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + Bu^2 = \lambda u^1 + f^1 \\ -\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + Bu^1 = \lambda u^2 + f^2 \end{cases} \tag{1}$$

В неоднородной системе (1) символ B представляется либо некоторым числом, либо некоторым замкнутым оператором [6]. Здесь u является вектор-функцией: $u = u(t,x); u = (u^1, u^2)^T$.

Присоединив к системе уравнений (1) условия Дирихле (2) получим граничную задачу (1), (2).

$$u|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0 \tag{2}$$

В дальнейшем для простоты изложения полагаем $\Omega_{t,x} = (0,\pi)^2$.

Необходимость исследования систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных возникает при изучении разнообразных физических [2], химических, биологических, социальных, экономических (особенно актуальных в настоящее время) задач. Например, системы С.Л. Соболева для случая сжимаемой жидкости – в гидродинамике, системы уравнений смешанного типа возникают в трансзвуковой газодинамике. К исследованию таких систем уравнений приводят также и многие актуальные задачи теории малых изгибаний поверхности вращения, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, теории изгибов пластинки переменной толщины с острым углом. Важные приложения теории систем уравнений в частных производных и проблемы, связанные с исследованием свойств разрешимости граничных задач стимулировали исследование соответствующих спектральных задач [4].

Спектральная теория замкнутых операторов, порожденных граничными задачами как для уравнений, так и для систем уравнений в частных производных, начала развиваться сравнительно недавно в ряде работ российских и зарубежных математиков [1], [3], [5]. Изучались при этом как асимптотическое поведение собственных значений и расположение спектра на комплексной плоскости, так и базисные свойства систем, составленных из собственных вектор-функций. Исследование структуры спектра и возможности разложения решений по наборам собственных вектор-функций является в настоящее время одним из основных направлений при изучении вопросов теории спектра граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Несмотря на значительный интерес к указанной проблематике, до сих пор не разработан метод, позволяющий ответить на возникающие вопросы даже для простейших систем уравнений в частных производных при числе переменных больше двух; общие вопросы спектральной теории граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных изучены недостаточно полно. В большей степени это относится к системам не относящихся к классическим типам: эллиптическим, гиперболическим и параболическим. Учитывая важность свойств граничных задач для неклассических систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, изучение спектральных характеристик последних вполне актуально.

Следует заметить, что теория граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, имея разнообразные применения, базируется на многочисленных методах (асимптотический, вариационный, проекционный, численные методы, методы интегральных уравнений, функциональные и другие) и формах (последовательные приближения, сжимающие отображения, различные формы интегральных преобразований, спектральные и другие) исследования. В связи с этим отметим, что производимые мною исследования базируются на методах, которые принято называть функциональными [3], [4], а свойства разрешимости описываются в терминах спектральной теории замкнутых линейных операторов.

Функциональные методы развивали и широко использовали в своих научных исследованиях К. Фридрихс, Л. Хермандер, С.Л. Соболев, А.А. Дезин, В.Н. Масленникова, В.А. Ильин, В.К. Романко, Е.И. Моисеев, А.П. Солдатов, Н.Х. Агаханов, их ученики и последователи. Вполне естественным образом возникает вопрос о «правильной» постановке граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этой проблемы лежит на пути исследования спектральных свойств модельных граничных задач.

Метод исследования

Пусть $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ - пара сепарабельных гильбертовых пространств, в каждом из которых задан ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{k=\infty}, \{\psi_k\}_{k=1}^{k=\infty}$. Образуем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ следующим образом. В качестве базиса $\mathcal{H}$ возьмем множество упорядоченных пар $\varphi_k \otimes \psi_j$, определив для этих пар скалярное произведение по правилу

$$(\varphi_k \otimes \psi_j, \varphi_l \otimes \psi_i) = (\varphi_k, \varphi_l)\cdot(\psi_j, \psi_i) \qquad (1^*)$$

где справа – скалярные произведения в $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ соответственно. Таким образом, относительно нормы, порождаемой скалярным произведением (1), базис $\{\varphi_k \otimes \psi_j\}_{k,j}$ - ортонормированный. Произведение (1*) распространяется обычным образом на конечные линейные комбинации

$$\sum f_{k,j}\varphi_k \otimes \psi_j \qquad (2^*)$$

Пополнение по введенной норме множества конечных линейных комбинаций (2*) дает (полное) гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ - *тензорное произведение* исходных *гильбертовых пространств*.

В соответствии с приведенной конструкцией для любой пары элементов $f = \sum f_k\varphi_k \in \mathcal{H}', \ g = \sum g_k\psi_k \in \mathcal{H}''$ определено их тензорное произведение

$$f \otimes g = \sum_{i,k} f_i g_k \varphi_i \otimes \psi_k,$$

(поскольку $\sum_{i,k} |f_i|^2 |g_k|^2 < \infty.$).

Если теперь $A' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ - замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A'), \varphi_k \in \mathcal{D}(A')$, для любого k и оператор $A'' : \mathcal{H}'' \to \mathcal{H}''$ обладает аналогичными свойствами, то над плотным в $\mathcal{H}$ множеством элементов вида (2*) (над множеством конечных линейных комбинаций) определен оператор

$$A' \otimes A''\left(\sum_{i,k} f_{i,k} \otimes \psi_k\right) = \sum f_{i,k} A'\varphi_i \otimes A''\psi_k$$

Замыкание в $\mathcal{H}$ заданного таким образом оператора $A' \otimes A''$ (с плотной областью определения) определяет оператор $A' \otimes A'' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Если $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ и $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ - функциональные пространства, то $\mathcal{H}'$ может быть естественным образом вложено в $\mathcal{H}$ за счет отождествления с подмножеством $\mathcal{H}' \otimes 1$ (состоящим из элементов вида $f \otimes 1, f \in \mathcal{H}'$). Имея в виду сказанное, элементы $\mathcal{H}'$ рассматривают зачастую как элементы $\mathcal{H}$ без каких-либо оговорок (и без перехода в обозначениях от f к $f \otimes 1$). Аналогично обстоит дело с операторами $A' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$: их отождествляют с операторами вида $A' \otimes 1$.

Приведенная конструкция возникает естественным образом всякий раз, когда $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ - наши стандартные гильбертовы пространства функций над некоторыми областями $V' \subset \mathbf{R}^{n'}, V'' \subset \mathbf{R}^{n''}$. Тогда $\mathcal{H}$ - соответствующее пространство над $V' \times V''$. При этом операции $L'(D) \otimes L''(D)$ и соответствующий оператор записываются в обычно просто в виде

$$\sum a_\alpha(x) b_\beta(y) D_x^\alpha D_y^\beta$$

т.е. без использования обозначения $\otimes$ для тензорного произведения.

Поскольку в гильбертовом пространстве переход от базиса Рисса к ортонормированному базису и обратно равносилен замене данного скалярного произведения на эквивалентное, ясно, что приведенные рассмотрения распространяются естественным образом и на тот случай, когда $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ - базисы Рисса в $\mathcal{H}'$; $\mathcal{H}''$.

Переход от $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ к случаю произвольного числа сомножителей $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}^k$ осуществляется автоматически.

Удобным классом операторов, функции от которых допускают весьма простое определение, являются М-операторы. Действительно, если $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - есть М-оператор, $\{\varphi_k\}$ - система собственных функций оператора А, образующая базис Рисса, и можно, следовательно, для любого элемента $u \in \mathcal{D}(A)$ записать

$$u = \sum u_k \varphi_k, \ Au = \sum u_k A\varphi_k = \sum \lambda_k u_k \varphi_k,$$

то в предположении, например, что F(z) аналитична в области $\Omega \subset \mathbf{C}$ такой, что $\lambda_k \in \Omega$ для всех k, достаточно положить

$$F(A)u = \sum F(\lambda_k) u_k \varphi_k \tag{3*}$$

При этом $u \in \mathcal{D}(F_A)$ всякий раз, когда ряд (3*) сходится. Область определения оператора F(A) заведомо плотна (в нее попадают все конечные линейные комбинации элементов базиса).

Трудности, с которыми приходится сталкиваться при попытке применения приведенной идеальной схемы к конкретным ситуациям, возникаемым при анализе граничных задач, бывают связаны обычно, с одной стороны, со сложной природой соответствующих функций F(z), а с другой – со стремлением включить в рассмотрения операторы, не являющиеся М-операторами.

Приведенная схема немедленно распространяется на случай, когда $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}^k$ и $A^k : \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}^k$ и $F(z_1, \dots, z_n)$ - функция n комплексных переменных, удовлетворяющая соответствующим требованиям. Операторы A^k предполагаются пи этом, разумеется, коммутирующими.

Результаты

Обозначим символом $e_k = (\delta_k^1, \delta_k^2), k = 1,2;$ ортонормированный базис евклидова пространства ε_2^2, состоящий из вектор-столбцов, а символом U_2^2- унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$, скалярное произведение в котором задается формулой (u,v) = $u^1 v^1 + \overline{u^2 v^2}$. Пусть также, как и принято, $H_{t,x}^2 = L_2^2(V_{t,x})$ -гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций, норма в котором задается формулой:

$$\left|u; H_{t,x}^2\right|^2 = \iint_{V_{t,x}} \left|u(\tau,\xi); U_2^2\right|^2 d\tau\, d\xi \tag{4}$$

Пусть также $\mathfrak{S}$- линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(t,x)$, принадлежащих классу $C(V_{t,x}) \cap C^{(2)}(\Omega t, x)$ и удовлетворяющих условиям (2). Опишем, как и условились, спектральные свойства задачи Дирихле для гиперболической системы (1). Обозначим символом $\hat{L}$, оператор, областью которого является множество $\mathscr{D}$, а множество значений определяется правой частью неоднородной системы (1), получим гиперболический оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в гильбертовом пространстве $H^2_{t.x}$ стандартную процедуру замыкания получаем замкнутое расширение L, дифференциального оператора $\hat{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L: H^2_{t,x} \to H^2_{t,x}$ порожден задачей (1), (2). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре и спектральных свойствах его собственных вектор-функциях мы придерживаемся терминологии, принятой в монографиях [1], [3], [4]. Для каждого фиксированного $x \in (0,\pi)$ общее решение однородной системы (5),(6), принадлежащее неоднородной системе (1) представимо в виде:

$$u^1(t)=C_1 \cdot \sin\sqrt{(B+\lambda)}t + C_2 \cdot \cos\sqrt{(B+\lambda)}t + C_3 \cdot \sin\sqrt{(-B+\lambda)}t + C_4 \cdot \cos\sqrt{(-B+\lambda)}t \tag{5}$$

$$u^2(t)=-C_1 \cdot \sin\sqrt{(B+\lambda)}t - C_2 \cdot \cos\sqrt{(B+\lambda)}t + C_3 \cdot \sin\sqrt{(-B+\lambda)}t + C_4 \cdot \cos\sqrt{(-B+\lambda)}t \tag{6}$$

На основании условий Дирихле (2) и из системы (5), (6) немедленно получаем: $C_2 = C_4 = 0$. Далее, для каждого фиксированного $x \in (0,\pi)$ общее решение системы (5), (6) удовлетворяющее условию: $\mathrm{u}(0)=0$ представимо в виде (7), (8)

$$u^1(t)=C_1 \cdot \sin\sqrt{(B+\lambda)}t + C_3 \cdot \sin\sqrt{(-B+\lambda)}t \tag{7}$$

$$u^2(t)=-C_1 \cdot \sin\sqrt{(B+\lambda)}t + C_3 \cdot \sin\sqrt{(-B+\lambda)}t \tag{8}$$

Решая 4×4 систему линейных уравнений: $u(0)=u(\pi)=0$, выпишем матрицу $\mathrm{M}(\lambda)$, соответствующую данной системе уравнений. Матрица $\mathrm{M}(\lambda)$ имеет вид (9):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin\sqrt{(B+\lambda)}\pi & \cos\sqrt{(B+\lambda)}\pi & \sin\sqrt{(-B+\lambda)}\pi & \cos\sqrt{(-B+\lambda)}\pi \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\sin\sqrt{(B+\lambda)}\pi & -\cos\sqrt{(B+\lambda)}\pi & \sin\sqrt{(-B+\lambda)}\pi & \cos\sqrt{(-B+\lambda)}\pi \end{pmatrix} \tag{9}$$

Найдем теперь те значения параметра λ, для которых $u(0)=u(\pi)=0$. Отметим теперь, что определитель $\Delta(\lambda)$ матрицы $\mathrm{M}(\lambda)$ представим в виде (10):

$$\Delta(\lambda) \equiv \sin\sqrt{(B+\lambda)}\pi \cdot \sin\sqrt{(-B+\lambda)}\pi = 0 \tag{10}$$

Решая уравнение (10) относительно λ, найдем собственные значения оператора L. Имеем:

$$\lambda_{1,k} = k^2 - B;\ k \in N \qquad \lambda_{2,k} = k^2 + B;\ k \in N$$

Собственному значению $\lambda_{1,k}$ оператора L принадлежит собственная вектор-функция: $u(t,x)=\sin(kt)(e_1+e_2)$. Собственному значению $\lambda_{2,k}$ оператора L принадлежит собственная вектор-функция: $u(t,x)=\sin(kt)(e_1-e_2)$. Далее полагаем, что B -замкнутый оператор : $B=\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{du}{dx}$, определенный на $(0,\pi)$ и удовлетворяющий условиям Дирихле. Сформулируем теперь окончательный вариант в форме теоремы 1

Теорема 1. Спектр σL оператора L, порожденного задачей (1), (2), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$, множество $\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L дается формулой (11):

$$\lambda_{m,k,s} = k^2 + (-1)^m \cdot B(s); \quad B(s) = (-\frac{1}{4} - s^2); \quad m = 1,2; \quad k \in N; \quad s \in N. \qquad (11)$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (11) представима в виде (12):

$$u_{m,k,s}(t,x) = \sin(kt)(e_1 + (-1)^{m+1} e_2) e^{-\frac{x}{2}} \sin(sx). \qquad (12)$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x)\}$ собственных вектор-функций образует базис Рисса в Гильбертовом пространстве $H^2_{t,x}$

Список литературы
References

1. Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука, 448.
Bitsadze A.V. 1981. Some classes of partial differential equations. M., Nauka, 448.
2. Годунов С.К. 1979. Уравнения математической физики. М., Наука, 392.
Godunov S. K. 1979. Equations of mathematical physics. M., Nauka: 392.
3. Дезин А.А. 2000. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М. : Тр. МИАН, 229, Наука, 2000, 175 .
Desin A. A. 1980. General questions of the theory of boundary value problems. M. ,Nauka, 208.
4. Дезин А.А. 1980. Общие вопросы теории граничных задач. М., Наука, 208.
Desin A. A. 1980. General questions of the theory of boundary value problems. M., Nauka, 208.
5. Корниенко Д.В. 2006. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений. Дифференциальные уравнения, 42 (1): 91-100.
Kornienko D. V. 2006. About one spectral problem for a hyperbolic system of two equations. Differential equations, 42(1): 91-100.
6. Корниенко Д.В. 2006. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений. Дифференциальные уравнения, 42 (8): 1063-1071.
Kornienko D. V. 2006. On the spectrum of the Dirichlet problem for systems of differential-operator equations. Differential equations, 42(8): 1063-1071.