УДК 511

О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, ЛЕЖАЩИХ НА ПОЧТИ ВСЕХ ОЧЕНЬ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

ON ZEROS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION LYING IN ALMOST ALL VERY SHORT CRITICAL LINE

До Дык Там
Do Duc Tam

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: doductam140189@gmail.com

Аннотация. Рассматривается проблема распределения нулей дзета-функции Римана на критической прямой. Получены новые результаты, связанные с оценкой снизу числа нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех очень коротких промежутках критической прямой.

Resume. The distribution of zeros of the Riemann zeta function on the critical line is considered. We obtained new results, which are related to the lower bound of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all very short intervals of the critical line.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.
Keywords: the Riemann zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Введение

Одним из основных направлений исследований теории дзета-функции Римана является изучение распределения ее нулей на критической прямой. Множество нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ состоит из действительных нулей $-2,-4,-6,\ldots$ и комплексных нулей, которые называются нетривиальными. Нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ находятся в критической полосе $0<\Re s<1$. Известная гипотеза Римана утверждает, что все эти нули лежат на критической прямой $\Re s = 0,5$.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих на промежутке $(0,T]$. Через $\varepsilon>0$ будем обозначать произвольно малое число.

В 1921 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд [1] доказали следующую теорему:

Для любого $\varepsilon>0$ *существуют* $T_0=T_0(\varepsilon)>0$, $c_0=c_0(\varepsilon)>0$ *такие, что при* $T>T_0$, $H=T^{0.5+\varepsilon}$ *справедливо неравенство:*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq c_0 H.$$

В 1942 г. А. Сельберг [2] доказал, что при условиях теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq c_1 H\ln T. \qquad (1)$$

Из формулы Мангольдта

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T)$$

для числа $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\leq\Re s\leq 1$, $0\leq\Im s\leq T$ следует, что оценка Сельберга (1) является неулучшаемой по порядку роста при $T\to+\infty$. Основной идеей, которая позволяет доказать оценку (1), является использование успокаивающего множителя

$$\varphi(s)=\sum_{\nu<Y}\frac{\beta(\nu)}{\nu^s},$$

где Y некоторое походящее число и числа $\beta(\nu)$ определяются следующим образом:

$$\beta(\nu)=\begin{cases}\alpha(\nu)\left(1-\ln\nu/\ln Y\right), & \text{если } 1\le\nu<\mathrm{Y},\\ 0, \ \text{если } \nu\ge\mathrm{Y},\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^2},\ \Re s>1.$$

В 1984 г. А. А. Карацуба [3] установил, что неравенство (1) справедливо при $H=T^{27/82+\varepsilon}$. Отметим, что границу $H\ge T^{27/82+\varepsilon}$ определяет оценка тригонометрической суммы специального вида. Вместе с задачей получения оценки снизу числа нулей дзета-функции Римана на отрезках критической прямой А. А. Карацуба также рассматривал ее в среднем. Доказано, что при $H=X^{\varepsilon}$, $X\ge X_0(\varepsilon)>0$ неравенство (1) имеет место для почти всех T из интервала $[X,2X]$. В работах [4-7] можно найти главные результаты в этом направлении.

В настоящей работе мы докажем теорему, связанную с проблемой получения оценки снизу числа нулей дзета-функции Римана на почти всех очень коротких промежутках критической прямой. Сформулируем результат работы:

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon>0$ *– произвольно малое число и* $X\ge X_0(\varepsilon)>0$, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$,

$$\exp\left(\exp\left(2a_1\sqrt{\ln\ln X}\right)\right)\le H\le X^{\varepsilon},$$

где $a_1>0$ *– абсолютная постоянная. Через* E *обозначим множество тех* T *из промежутка* $[X,X+X_1]$, *для которых интервал* $[T,T+H]$ *содержит меньше, чем*

$$c_2H\ln H\exp\left(-a_1\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}\right)$$

нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, *где* $c_2>0$ *– абсолютная постоянная. Тогда для меры этого множества* $\mu(E)$ *справедлива оценка*

$$\mu(E)\le X_1H^{-0,4}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon>0$ *– произвольно малое число и* $X\ge X_0(\varepsilon)>0$, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$,

$$\exp\left(\exp\left(2a_1\sqrt{\ln\ln X}\right)\right)\le H\le X^{\varepsilon},$$

где $a_1>0$ *– абсолютная постоянная,* $M=[X/H]$, $M_1=[X_1/H]$. *При* $m=M+1,M+2,\cdots,M+M_1$ *рассмотрим интервалы вида* $[mH,mH+H]$.

Тогда в каждом из указанных интервалов, за исключением не более $M_1H^{-0,4}$ *из них, содержится больше чем*

$$c_3H\ln H\exp\left(-a_1\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}\right)$$

нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, *где* $c_3>0$ *– абсолютная постоянная.*

Леммы

Будем употреблять следующие обозначения: $X\ge X_0(\varepsilon)>0$ – растущий параметр, $L=\ln X$, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$, $P=\sqrt{T/2\pi}$, $Y=H^{0,01}$, $0<h<h_1<1$ – параметры, зависящие от T, значение которых будет определено позднее, $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ – положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит Y, действительные числа

$$a(\lambda)=\sum_{n\nu_1=\lambda\nu_2}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2},$$

где числа $\beta(\nu)$ определены во введении.

Лемма 1. При $T\le t\le T+H$, $H\le T^{1/3}$, $1\le Y\le T^{0,01}$ справедливая следующая формула:

$$F(t) = Z(t)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = e^{i\theta_1(t)}\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} +$$

$$+e^{i\theta_1(t)}\sum_{\lambda\le P}\frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(H^2T^{-0,75}YL^2),$$

где функция $\varphi(s)$ определена во введении,

$$Z(t) = \pi^{-it/2}\frac{\Gamma(1/4+it/2)}{|\Gamma(1/4+it/2)|}\zeta(1/2+it),$$

$$\theta_1(t) = \frac{t}{2}\ln P - \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8},\ P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Функция $F(t)$ называется функцией Харди-Сельберга. Приближенное функциональное уравнение для $F(t)$ доказано А. А. Карацубой в [3].

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть при $j=1,2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

$$W_2(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

где

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1} W_1^2(T)dT \ll \frac{X_1Y^{11}L^{10}}{H},\quad \int_X^{X+X_1} W_2^2(T)dT \ll \frac{h^4X_1Y^{11}L^{10}}{H},$$

где постоянные в знаке $\ll$ зависят только от ε.

Доказательство леммы см. в [7].

Следствие 1. Пусть E_1 – множество таких T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняются неравенства

$$W_1^2(T) \ge H^{-0,4},\qquad W_2^2(T) \ge h^4H^{-0,4}.$$

Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка

$$\mu(E) \le X_1H^{-0,4}.$$

Лемма 3. При обозначениях теоремы 2 справедливы неравенства:

$$\sum_{m=M+1}^{M+M_1} W_1^2(mH) \ll \frac{M_1Y^{11}L^{11}}{H},\quad \sum_{m=M+1}^{M+M_1} W_1^2(mH) \ll \frac{h^4M_1Y^{11}L^{11}}{H}.$$

Следствие 2. Пусть M_2 – количество тех m, $M < m \le M+M_1$, для которых выполняются следующие неравенства:

$$|W_1(mH)|^2 \ge H^{-0,4}\ и\ |W_2(mH)|^2 \ge h^4H^{-0,4}.$$

Тогда для M_2 справедлива оценка

$$M_2 \le M_1H^{-0,4}.$$

Схема доказательства теоремы 1

Заметим, что при фиксированном $0<\rho<1$ и $X^{\rho}\le H\le X^{\varepsilon}$, утверждения теорем 1 и 2 следует из теорем статьи [7]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $H\le X^{\rho}$, где конкретное малое значение ρ будет выбрано позднее. Введем следующие параметры:

$$\ln\frac{1}{c}=\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}},\quad h=\frac{1}{c\ln H}\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln Y}},\quad h_1=2h\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln Y}},\quad \alpha=\frac{a}{\ln(1/c)},$$

где $a\ge 1$ – абсолютная постоянная, которая будет определена позднее. Из условия

$$\exp\left(\exp\left(2a_1\sqrt{\ln\ln X}\right)\right)\le H$$

следует, что

$$0<h<h_1<1.$$

Будем рассматривать те числа T из $[X,X+X_1]$, для которых выполняются оценки

$$W_1^2(T)\le H^{-0,4},\quad W_2^2(T)\le h^4H^{-0,4}. \tag{2}$$

При $T\le t\le T+H$ рассматриваются интегралы $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left|F(t+u)\right|du,\quad j_2(t)=\left|\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}F(t+u)du\right|,$$

где $F(t)$ – функция Харди–Сельберга.

Обозначим через E_2 подмножество интервала $[T,T+H]$, на котором выполняется неравенство

$$j_1(t)>j_2(t).$$

Так как вне E_2 два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$ равны, то имеем

$$\int_{E_2}j_1^{\alpha}(t)dt=\int_T^{T+H}j_1^{\alpha}(t)dt-\int_{\overline{E}_2}j_2^{\alpha}(t)dt\ge\int_T^{T+H}j_1^{\alpha}(t)dt-\int_T^{T+H}j_2^{\alpha}(t)dt;$$

то есть

$$I_1+I_2\ge I_3, \tag{3}$$

где

$$I_1=\int_{E_2}\left(j_1(t)\right)^{\alpha}dt,\quad I_2=\int_T^{T+H}\left|j_2(t)\right|^{\alpha}dt,\quad I_3=\int_T^{T+H}\left(j_1(t)\right)^{\alpha}dt.$$

Интеграл I_3 оценен снизу в [5 с. 385-390]:

$$I_3\ge e^{-1}c_4h^{\alpha}H. \tag{4}$$

Оценим I_1 сверху. Пользуясь неравенством Гельдера, находим

$$I_1\le(\mu(E))^{1-\alpha/2}\left(\int_T^{T+H}\left(\int_{-h_1}^{h_1}\exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)|F(t+u)|\,du\right)^2dt\right)^{\alpha/2}.$$

Имеем

$$\left(\int_{-h_1}^{h_1}\exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)|F(t+u)|\,du\right)^2=h^2\left(\int_{-h_1/h}^{h_1/h}\exp\left(-v^2\right)|F(t+vh)|\,dv\right)^2\le$$

$$\le h^2\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-v^2}dv\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-v^2}\,|F(t+vh)|^2\,dv\ll h^2\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-v^2}\,|F(t+vh)|^2\,dv.$$

Таким образом, получаем:

$$I_1^{2/\alpha}\ll(\mu(E))^{2/\alpha-1}h^2\left(\int_T^{T+H}\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-v^2}\,|F(t+vh)|^2\,dvdt\right)\le$$

$$\le(\mu(E))^{2/\alpha-1}h^2\left(\int_{-h_1/h}^{h_1/h}e^{-v^2}dv\int_{T-1}^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt\right)\ll$$

$$\ll(\mu(E))^{2/\alpha-1}h^2\left(\int_{T-1}^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt\right).$$

Пользуясь леммой 1 – приближенным функциональным уравнением $F(t)$, приходим к неравенству

$$\int_{T-1}^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt \ll \int_{T-1}^{T+H+1}\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2 dt + HT^{-0,2}.$$

Наконец, для интеграла в правой части последнего неравенства находим оценку

$$\int_{T-1}^{T+H+1}\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2 dt \ll \int_{T-1}^{T+H+1}\exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2 dt \le$$

$$\le H\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2}\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-i(T+ivH)}\right|^2 dv \ll H\left(\sum_{\lambda\le P}\frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}+|W_1(T)|\right),$$

где $W_1(T)$ – тригонометрическая сумма леммы 2. Сумма «диагональных слагаемых» оценена в [5] так:

$$\sum_{\lambda\le P}\frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda}\ll\frac{\ln X}{\ln Y}.$$

Для суммы «недиагональных слагаемых» $W_1(T)$ справедливо неравенство (2), т.е.

$$W_1(T)\le H^{-0,2}.$$

Таким образом, получаем

$$I_1\le c_5^{\alpha/2}(\mu(E))^{1-\alpha/2}h^{\alpha}H^{\alpha/2}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{\alpha/2}. \tag{5}$$

Перейдем к оценке I_2. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$I_2\le H^{1-\alpha/2}\left(\int_T^{T+H}\left|\int_{-h_1}^{h_1}\exp\left(-\left(\frac{u}{h}\right)^2\right)F(t+u)du\right|^2 dt\right)^{\alpha/2}.$$

Рассмотрим интеграл в правой части последнего неравенства. Пользуясь леммой 1, находим

$$\int_T^{T+H}\left|\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}F(t+u)du\right|^2 dt\le\int_T^{T+H}\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2 dt+HX^{-0,2}h^2\le$$

$$\le e\int_T^{T+H}e^{-((t-T)/H)^2}\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{a(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|^2 dt+HX^{-0,2}h^2\ll H\left(\Sigma+W_2(T)+h^2X^{-0,2}\right),$$

где

$$\Sigma=\sum_{\lambda\le P}\frac{|a(\lambda)d(\lambda)|^2}{\lambda},\quad d(\lambda)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du,$$

и $W_2(T)$ – сумма леммы 2. Сумма Σ оценена в [5] так:

$$\Sigma\ll h^2\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7}+\frac{c\ln H}{\ln Y}\right) \tag{6}$$

Для суммы $W_2(T)$ справедливо неравенство (2}), т.е.

$$W_2(T)\le h^2H^{-0,2}.$$

Таким образом, имеем

$$I_2\le h^{\alpha}H\left(c_6\left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7}+\frac{c\ln H}{\ln Y}+H^{-0,2}\right)\right)^{\alpha/2},$$

где $c_{10}>0$ – абсолютная постоянная. Так как $Y=H^{0,01}$, то

$$\frac{c\ln H}{\ln Y}=100c.$$

Далее,

$$c\ge\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7},$$

так как это эквивалентно таким неравенствам:

$$\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^7\ge\frac{1}{c};\quad 7\ln\frac{\ln X}{\ln Y}\ge\ln\frac{1}{c}=\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}};\quad H\ge(\ln X)^{1000}.$$

Из приведенных оценок следует, что

$$\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-7}+\frac{c\ln H}{\ln Y}+H^{-0,2}\le 102c.$$

Поэтому оценку I_2 можно переписать так:

$$I_2\le Hh^{\alpha}\left(102cc_6\right)^{\alpha/2}=Hh^{\alpha}e^{\frac{\alpha}{2}\ln(102cc_6)}.$$

Будем считать параметр ρ таким, что выполняется неравенство

$$\sqrt{\ln(1/\rho)}\ge 2\ln(102c_6).$$

Тогда имеем

$$\ln(102cc_6)=-\left(\ln\frac{1}{c}-\ln(102c_6)\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{c}-\ln(102c_{10})\right)\le-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{c},$$

Так как $H\le Y^{\rho}$, то

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}\ge\sqrt{\ln\frac{1}{\rho}}\ge\ln(102c_6).$$

Тогда из того, что

$$\alpha=\frac{a}{\sqrt{\ln(1/c)}}$$

следует, что

$$I_2\le h^{\alpha}He^{-a/4}.$$

Подставляя (4), (5) и это неравенство в (3), получаем:

$$\left(e^{-1}c_4-e^{-a/4}\right)H^{1-\alpha/2}\le c_5^{\alpha/2}\mu(E)^{1-\alpha/2}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{\alpha/2}.$$

Без ограничения общности можно считать $c_4<e^{-1}$. Число a найдем из уравнения

$$e^{-a/4}=e^{-2}c_4.$$

Ясно, что $a\ge 12$. По заданному теперь a определим положительную константу ρ, как наибольшее число, удовлетворяющее условию – и неравенству

$$\frac{a}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}\le\frac{1}{2},$$

т. е. возьмем

$$\rho=\min\left(\varepsilon;e^{-4a^2};e^{-4\ln^2(102c_6)}\right).$$

Тогда при $H\le X^{\rho}$ выполняются неравенства

$$\ln\frac{1}{c}=\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}\ge\sqrt{\ln\frac{1}{\rho}}\ge 2a;\quad 0<\alpha=\frac{a}{\ln(1/c)}\le\frac{1}{2}.$$

Таким образом

$$\mu(E)\ge c_5^{-\alpha/(2-\alpha)}(e^{-2}c_4)^{2/(2-\alpha)}H\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha/(2-\alpha)}.$$

Так как $0<\alpha\le 1/2$, то из этого неравенства находим

$$\mu(E)\ge c_7H\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha}. \qquad (7)$$

Пусть $N=[T/h_1]$ и $N_1=[(T+H)/h_1]$. Разделим интервал $(T,T+H)$ точками Nh_1+nh_1 где $n=1,2,\cdots,N_1-N$. Рассмотрим теперь интегралы $(Nh_1+nh_1,Nh_1+(n+1)h_1)$ где $n=1,2,\cdots,N_1-N-1$. Обозначим через ω число промежутков, в которых содержится точка t из множества E_2. Эти промежутки имеют вид:

$$Q_{\alpha_k}=\left(Nh_1+\alpha_kh_1,Nh_1+(\alpha_k+1)h_1\right),\quad \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{\omega}.$$

Легко видеть, что:

$$2h_1+\omega h_1\ge\mu(E).$$

Из неравенства (7) следует, что

$$\omega \geq c_7 \frac{H}{h_1}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha} - 2.$$

Если интервал $(Nh_1 + \alpha_{3k'+2}h_1, Nh_1 + \alpha_{3k'+2}h_1 + h_1)$, где $k' = 0, 2, \cdots, \omega'$, $\omega' \geq \omega/3 - 2$ содержит точку t из E_2, то в интервале $(Nh_1 + \alpha_{3k'+2}h_1 - h_1, Nh_1 + \alpha_{3k'+2}h_1 + 2h_1)$ содержится хотя бы один нуль нечетного порядка функции $F(t)$. Кроме этого, при $i \neq j$ имеем

$$(Nh_1 + \alpha_{3i+2}h_1, Nh_1 + \alpha_{3i+2}h_1 + h_1) \cap (Nh_1 + \alpha_{3j+2}h_1, Nh_1 + \alpha_{3j+2}h_1 + h_1) = \%.$$

Поэтому количество нулей нечетного порядка функции $F(t)$ на интервале $[T, T+H]$ не меньше, чем

$$\omega' \geq \omega/3 - 2 \geq \frac{1}{3} c_7 \frac{H}{h_1}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha} - 3 \geq c_8 \frac{H}{h_1}\left(\frac{\ln X}{\ln Y}\right)^{-\alpha},$$

где $c_{12} > 0$ – абсолютная постоянная. Так как

$$h_1 = \frac{1}{c \ln H} \ln \frac{\ln X}{\ln Y}, \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{\ln(1/c)}}, \quad \ln\frac{1}{c} = \sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}, \quad Y = H^{0,01},$$

то

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_8 H \ln H e^{-R},$$

где

$$R = \sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}} + \ln\ln R_1 + \alpha \ln R_1, \quad R_1 = \frac{\ln X}{\ln Y}.$$

Так как

$$\ln\ln(R_1) = \ln\ln\left(100\frac{\ln X}{\ln H}\right) < \sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}},$$

$$\alpha \ln R_1 = \frac{a \ln 100 \frac{\ln X}{\ln H}}{\sqrt{\frac{\ln X}{\ln H}}} < 2a\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}},$$

то

$$R \leq (2+2a)\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}},$$

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_8 H \ln H \exp\left(-a_1\sqrt{\ln\frac{\ln X}{\ln H}}\right),$$

где $a_1 = 2 + 2a > 0$ – абсолютная постоянная. Далее утверждение теоремы следует из следствия 1.

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 и с использованием леммы 2.

Заключение

Доказательство главной теоремы основано на получении оценку сверху для специальной кратной тригонометрической суммы. В работе автор пользуется методами А. А. Карацубы получения оценки "сельберговского типа" для числа нулей $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой.

Список литературы

References

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. 1921. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. Mathematische Zeitschrift, 10: 283—317.
2. Selberg A. 1942. On the zeros of Riemann's zeta-function. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, 10:1-59.

3. Карацуба А. А. 1984. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой. Изв. АН СССР. Сер. матем., 48(3): 569–584.

Karatsuba A. A. 1984. On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math., 48(3): 569–584.

4. Карацуба А. А. 1984. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$. Изв. АН СССР. Сер. матем., 48(6): 1214–1224.

Karatsuba, A. A. 1984. The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math., 48(6): 1214–1224.

5. Карацуба А. А. 1992. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой. Изв. РАН. Сер. матем., 56(2): 372–397.

Karatsuba, A. A. 1992. On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math., 56(2): 372-397.

6. Киселева Л. В. 1988. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на «почти всех» коротких промежутках критической прямой. Изв. АН СССР. Сер. матем., 52(3): 479–500.

Kiseleva, L. V. 1988. The number of zeros of the function $\zeta(s)$ on "almost all" short intervals of the critical line. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 52(3): 479–500; translation in Math. USSR-Izv. 32 (1989), no. 3, 475–499

7. Там Д. Д. 2016. О нулях дзета–функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой. Чебышевский сборник, 17(1): 69 – 87.

Tam D. D. 2016. On the zeros of the Riemann zeta function, lying in almost all short intervals of the critical line. Chebyshevskii Sbornik, 17(1): 69 – 87.