УДК 517.9

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ С НЕСОБСТВЕННЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

ON LINEAR OPERATORS WITH IMPROPER PARTIAL INTEGRALS

А.С. Калитвин, В.А. Калитвин
A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University, 42 Lenins St, Lipetsk, 398020, Russia

Аннотация. Вводятся пространства локально суммируемых функций, на которых определены линейные операторы с несобственными частными интегралами. Получены условия, при которых линейные операторы с частными интегралами действуют из этих пространств в пространства Лебега.

Resume. Be introduced the locally summable functions spaces, who the linear operators with improper partial integrals are defined. The conditions, by which the linear operators with partial integrals acting from this spaces in Lebesgue spaces, are obtained.

Ключевые слова: частные интегралы, несобственные частные интегралы, пространства локально суммируемых функций.

Key words: partial integrals, improper partial integrals, the locally summable functions spaces.

Введение

В книгах [1–4] построены основы теории линейных операторов с частными интегралами в различных классах функциональных пространств. При этом интегралы понимались в смысле Лебега, что влечет суммируемоть функций по переменным интегрирования. Простейшие примеры показывают, что линейные интегральные уравнения с частными интегралами, понимаемыми в смысле Лебега, могут не иметь решений в том или ином классе функций, хотя такие же уравнения с интегралами, понимаемыми как несобственные интегралы, могут иметь решения в этом классе функций.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\pi x(t,s) = \frac{sint}{t}\int_0^{+\infty} x(\tau,s)d\tau + \frac{sins}{s}\int_0^{+\infty} x(t,\sigma)d\sigma, \qquad (1)$$

где $t,s \in (0,+\infty)$, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Непрерывная функция

$$x_0(t,s) = \frac{sintsins}{ts} \qquad (2)$$

не суммируема по каждой переменной на интервале $(0,+\infty)$. Поэтому она не является решением уравнения (1).

Если же интегралы в (1) являются несобственными, т.е.

$$\int_0^{+\infty} x(\tau,s)d\tau = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a x(\tau,s)d\tau,\ \int_0^{+\infty} x(t,\sigma)d\sigma = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a x(t,\sigma)d\sigma,$$

где интегралы по промежутку $(0,a]$ понимаются в смысле Лебега, то с учетом равенства

$$\int_0^{+\infty}\frac{sinu}{u}du = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{sinu}{u}du = \frac{\pi}{2}$$

непосредственно проверяется, что несуммируемая функция x_0 удовлетворяет интегральному уравнению (1) с несобственными частными интегралами, при этом интегралы

$$I(t)=\int_0^{+\infty}x(t,\sigma)d\sigma,\quad I(s)=\int_0^{+\infty}x(\tau,s)d\tau$$

сходятся равномерно относительно $t\in(0,+\infty)$ и $s\in(0,+\infty)$ соответственно, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует не зависящее от t и s такое число a_0, что при $a>a_0$

$$\left|\int_0^{+\infty}x(t,\sigma)d\sigma-\int_0^{a}x(t,\sigma)d\sigma\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_0^{+\infty}x(\tau,s)d\tau-\int_0^{a}x(\tau,s)d\tau\right|<\varepsilon.$$

Приведенный пример показывает целесообразность изучения интегральных уравнений с несобственными частными интегралами и свойств линейных операторов с такими интегралами.

Следующий пример показывает, что при изучении интегро-дифференциальных уравнений Барбашина также полезно использование понятия несобственного частного интеграла.

Пример 2. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Барбашина

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}=-x(t,s)-\int_0^{+\infty}x(t,\sigma)d\sigma+\frac{\pi}{2}e^{-t}$$

с несобственным интегралом в правой части уравнения. Функция

$$x(t,s)=\begin{cases}e^{-t}\dfrac{\sin s}{s}, s\neq 0,\\ e^{-t}, s=0,\end{cases}$$

где $t,s\in[0,+\infty)$, как легко видеть, является решенем этого уравнения, хотя она и не является суммируемой на $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

Пространства локально суммируемых функций

Пусть $J=(0,+\infty)$ или $J=[0,+\infty)$ и $D=J\times J$. Через X обозначим множество определенных на D измеримых функций $x(t,s)$, суммируемых по каждой из переменных t и s на каждом конечном промежутке $(0,a]$, суммируемых по (t,s) на каждом квадрате $(0,a]\times(0,a]$ и удовлетворяющих условиям:

1. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty}x(\tau,s)d\tau=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}x(\tau,s)d\tau \tag{3}$$

сходится равномерно относительно $s\in J$;

2. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty}x(t,\sigma)d\sigma=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}x(t,\sigma)d\sigma \tag{4}$$

сходится равномерно относительно $t\in J$;

3. На D ограничены функции

$$u(a,s)=\int_0^a x(\tau,s)d\tau,\ v(t,a)=\int_0^a x(t,\sigma)d\sigma.$$

Отметим, что несобственные интегралы (3) и (4) сходятся для любых $s,t\in J$, если функция $x(t,s)$ суммируема по t при любом $s\in J$, и суммируема по s при любом $t\in J$ соответственно. Равномерная сходимость интеграла (3) относительно $s\in J$ и интеграла (4) относительно $t\in J$ имеет место, если существуют суммируемые на J функции $\varphi(t)$ и $\psi(s)$, такие, что $|x(t,s)|\le\varphi(t)$ и $|x(t,s)|\le\psi(s)$.

Для равномерной сходимости интеграла (3) относительно $s\in J$ необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном $\varepsilon>0$ нашлось такое число a_0, не зависящее от s, чтобы неравенство

$$|\int_0^{a'} x(\tau,s)d\tau-\int_0^a x(\tau,s)d\tau|=|\int_a^{a'} x(\tau,s)d\tau|<\varepsilon \tag{5}$$

выполнялось сразу для всех $s\in J$ при $a'>a>a_0$.

Аналогично, интеграл (4) равномерно сходится относительно $t\in J$ точно тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\exists a_0\forall t\in J\wedge a'>a>a_0\ |\int_a^{a'} x(t,\sigma)d\sigma|<\varepsilon.$$

В множестве X можно ввести счетную систему полунорм

$$\|x\|_n=\int_0^n\int_0^n |x(\tau,\sigma)|\,d\tau d\sigma,\ n=1,\ldots,\ x\in X.$$

В этом случае X является локально выпуклым пространством Фреше относительно расстояния

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x-y\|_n}{2^n(1+\|x-y\|_n)},\ x,y\in X.$$

Пространству X, при $J=(0,+\infty)$, принадлежит решение (2) интегрального уравнения (1) с частными интегралами.

Через X_0 будем обозначать множество определенных на D измеримых функций, суммируемых по каждой из переменных t и s на каждом конечном промежутке $(0,a_0]$, для которых

$$|\int_0^a x(\tau,s)d\tau|\le const<+\infty,\ |\int_0^a x(\tau,s)d\tau|\le const<+\infty, \tag{6}$$

где $a,t,s\in J$, и сходятся несобственные интегралы (3) и (4).

Из приведенных определений видно, что $X\subset X_0$.

Следующие разделы содержат условия, при которых на множествах X и X_0 определены различные классы линейных операторов с несобственными частными интегралами, равномерно сходящимися относительно $(t,s)\in D$.

Линейные операторы с несобственными частными интегралами, определенные на X

Будем рассматривать линейные операторы с частными интегралами следующего вида:

$$(Kx)(t,s)=\int_0^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_0^{+\infty} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \tag{7}$$

где $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ — заданные измеримые на $D\times J$ функции. Условия, при которых оператор (7) определен на X, получаются с применением второй теоремы о среднем [5], согласно которой

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx+f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx\ (\xi\in[a,b]), \tag{8}$$

если $f(x)$ — монотонная на отрезке $[a,b]$ функция, а $g(x)$ — интегрируемая на $[a,b]$ функция.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) функция $l(t,s,\tau)$ монотонна по τ и

$$|l(t,s,\tau)|\le L<+\infty\ (L=const,t,s,\tau\in J);$$

б) функция $m(t,s,\sigma)$ монотонна по σ и

$$|m(t,s,\sigma)|\le M<+\infty\ (M=const,t,s,\sigma\in J).$$

Тогда оператор (7) определен на пространстве X. При этом каждый из частных интегралов правой части равенства (7) сходится равномерно относительно $(t,s)\in D$.

Доказательство. Докажем, что первое слагаемое правой части равенства (7) определено на пространстве X. Фиксируем $x\in X$. В силу (8)

$$\int_a^{a'} l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau=l(t,s,a)\int_a^{\xi} x(\tau,s)d\tau+l(t,s,a')\int_{\xi}^{a'} x(\tau,s)d\tau\ (\xi\in[a,b]).$$

Учитывая (5), выберем a_0 так, чтобы при $a'>a>a_0$

$$|\int_a^{a'} x(\tau,s)d\tau|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

Тогда

$$|\int_a^{a'} l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau|<\varepsilon.$$

По критерию равномерной сходимости интеграла (3) первое слагаемое правой части равенства (7) является равномерно сходящимся относительно $(t,s)\in D$ интегралом.

Аналогично, второе слагаемое правой части равенства (7) является равномерно сходящимся относительно $(t,s)\in D$ интегралом.

Теорема доказана.

Отметим, что условию теоремы удовлетворяет оператор, определяемый правой частью уравнения (1).

Линейные операторы с несобственными частными интегралами, определенные на X_0

С применением второй теоремы о среднем доказывается

Теорема 2. *Пусть:*

а) выполнено условие а) теоремы 1 и функция $l(t,s,\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$ равномерно относительно $t,s\in J$;

а) выполнено условие б) теоремы 1 и функция $m(t,s,\tau)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$ равномерно относительно $t,s\in J$.

Тогда оператор (7) определен на пространстве X_0. При этом каждый из частных интегралов правой части равенства (7) сходится равномерно относительно $(t,s)\in D$.

Доказательство. Докажем, что первое слагаемое правой части равенства (7) определено на пространстве X_0. Так как $l(t,s,\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$ равномерно относительно $t,s\in J$, то

$$\forall\varepsilon>0\exists a_0\forall\tau>a_0\forall(t,s)\in D\,|\,l(t,s,\tau)\,|<\varepsilon.$$

Фиксируем $x\in X_0$. Учитывая (6), при $a'>a>a_0$ будем иметь

$$\left|\int_a^{a'} l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau\right|\le|l(t,s,a)\int_a^{\xi}x(\tau,s)d\tau|+|l(t,s,a')\int_{\xi}^{a'}x(\tau,s)d\tau|\le 2\varepsilon const.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части равенства (7) является равномерно сходящимся относительно $(t,s)\in D$ интегралом.

Аналогично, второе слагаемое правой части равенства (7) является равномерно сходящимся относительно $(t,s)\in D$ интегралом.

Теорема доказана.

Линейные операторы с несобственными частными интегралами, действующие из X_0 в пространства Лебега

В следующей теореме приведены условия, при которых оператор (7) действует из X_0 в $L^p(D)$ $(1\le p\le\infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $Z=L^p(D)$ $(1\le p\le\infty)$,

$$l(t,s,\tau)=\sum_{k=1}^{p}a_k(t,s)b_k(\tau),\ m(t,s,\sigma)=\sum_{l=1}^{q}c_l(t,s)d_l(\sigma),$$

где $a_k,c_l,\in Z$, функции b_k и d_l — монотонны и ограничены, причем $b_k(\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$ и $d_l(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$ $(k=1,\cdots,p,l=1,\cdots,q)$.

Тогда оператор (7) действует из X_0 в Z.

Доказательство. В условии теоремы 3 оператор (7) имеет вид

$$(Kx)(t,s)=\sum_{k=1}^{p}a_k(t,s)\int_0^{+\infty}b_k(\tau)x(\tau,s)d\tau+\sum_{l=1}^{q}c_l(t,s)\int_0^{+\infty}d_l(\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \tag{9}$$

где $x \in X_0$. Так же, как в доказательстве теоремы 2, показывается ограниченность интегралов

$$\int_a^{a'} b_k(\tau)x(\tau,s)d\tau, \int_a^{a'} d_l(\sigma)x(t,\sigma)d\sigma.$$

Отсюда и аддитивности интеграла по области интегрирования следуют неравенства (6) с некоторыми константами. Тогда ограничены интегралы в (9). Учитывая теперь включения $a_k \in L^p(D),\ c_l \in L^p(D)$ $(k=1,\cdots,p, l=1,\cdots,q)$, получаем, что $Kx \in L^p(D) = Z$.

Теорема доказана.

Пример 3. Пусть

$$l(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^{p} e^{a_k t + b_k s} f_k(\tau), m(t,s,\sigma) = \sum_{l=1}^{q} e^{c_l t + d_l s} g_l(\sigma),$$

где $a_k, b_k, c_l, d_l < 0$, функции f_k и g_l — монотонны и ограничены, причем $f_k(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$ и $g_l(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to +\infty$ $(k=1,\cdots,p, l=1,\cdots,q)$. Тогда оператор (7) действует из X_0 в $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Аналогично теореме 3 доказывается

Теорема 4. *Пусть* $Z = L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$,

$$l(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,s) b_k(\tau), m(t,s,\sigma) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(t,s) d_l(\sigma),$$

где $a_k, c_l, \in Z$, *функции* b_k *и* d_l *— монотонны и равномерно ограничены, причем* $b_k(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to +\infty$ *равномерно и* $d_l(\sigma) \to 0$ *при* $\sigma \to +\infty$ *равномерно* $(k,l = 1,2,\cdots)$, *а ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,s), \sum_{l=1}^{\infty} c_l(t,s)$$

сходятся в Z.

Тогда оператор (7) действует из X_0 *в* Z.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российсой Федерации (базовая часть гсударственного задания № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы
References

1. Калитвин А.С. 2000. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж, ЦЧКИ, 252.

Kalitvin A.S. Linear operators with partial integrals. Voronezh, CHKI, 252.

2. Калитвин А.С., Калитвин В.А. 2006. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. Липецк, ЛГПУ, 177.

Kalitvin A.S., Kalitvin V.A. 2006. Integral equations of Volterra and Volterra-Fredholm with partial integrals. Lipetsk, LGPU, 177.

3. Калитвин А.С., Фролова Е.В. 2004. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк, ЛГПУ, 195.

Kalitvin A.S., Frolova E.V. 2004. Linear equations with partial integrals. C-theory. Lipetsk, LGPU, 195.

4. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. 2000. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel, Marcel Dekker, 560.

5. Фихтенгольц Г.М. 1970. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М., Наука, 800.

Fihtengolc G.M. 1970. Course of differential and integral calculus. V. II. M., Nauka, 800.