УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ НУЛЕЙ $\zeta(s)$ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ
ON THE NUMBER OF ZEROS OF $\zeta(s)$ IN THE NEIGHBORHOOD OF THE CRITICAL LINE

До Дык Там
Do Duc Tam

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: doductam140189@gmail.com

Аннотация. Настоящая статья посвящена проблеме распределения комплексных нулей дзета-функции Римана в окрестности прямой $\Re s = 1/2$. Получена верхняя оценка числа нулей $\zeta(s)$ на почти всех очень коротких промежутках окрестности критической прямой. Доказательство основано на оценке кратной тригонометрической суммы специального вида.

Resume. The article is concerned with distribution of zeros of the Riemann zeta function in the neighborhood of the line $\Re s = 1/2$. We obtained an upper bound of number of zeros $\zeta(s)$ on almost all short intervals of the neighborhood of the critical line. The main idea of the proof is upper bound of multiple trigonometric sums of a special kind.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.
Keywords: the Riemann zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Введение

Пусть $N(\sigma,T)$ – число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике с вершинами $s=\sigma$, $s=\sigma+iT$, $s=1$ и $s=1+iT$.

В 1924 г. Дж. Литтлвуд [1] на основе теоремы о количестве нулей аналитической функции в прямоугольнике доказал следующую теорему:

При $1/2<\sigma\le 1$ *равномерно по* σ *справедлива оценка*

$$N(\sigma,T)=O\left(\frac{T}{\sigma-0,5}\log\frac{1}{\sigma-0,5}\right). \qquad (8)$$

Добавив к соображению Литтлвуда идею успокаивающего множителя, А. Сельберг в [2] доказал теорему:

Если $H\ge T^a$, где $a>1/2$ то при $1/2<\sigma\le 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T)=O\left(\frac{H}{\sigma-0,5}\right). \qquad (9)$$

Из этой теоремы следует, что множитель $\log(1/(\sigma-0,5))$ в оценке (1) под знаком O можно пропустить.

Следующий шаг в этом направлении выполнил А. А. Карацуба, который в 1985 г. в [3] доказал неравенство (2) для случая $H=T^{27/82+\varepsilon}$ где $\varepsilon>0$ – произвольно малое число.

Л.В. Киселева в [4] рассматривала эту задачу «в среднем». Доказано, что при $X \geq X_0(\varepsilon)$ неравенство (2) имеет место для почти всех $X \leq T \leq X + X^{11/12+\varepsilon}$ и $H = X^{\varepsilon}$.

В настоящей работе мы получим результат подобного рода, но только для отрезка осреднения $\left[X, X + X^{7/8+\varepsilon}\right]$. Сформулируем основную теорему:

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольно малое фиксированное число,*

$$X > X_0(\varepsilon) > 0, \quad X \leq T \leq X + X_1, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon}, \quad H = X^{\varepsilon}.$$

При $1/2 < \sigma < 1$ *рассмотрим неравенство*

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T) \leq c\frac{H}{\sigma - 0,5}, \tag{10}$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ *– некоторая постоянная, зависящая только от* ε. *Через* E *обозначим множество тех* T *из промежутка* $X \leq T \leq X + X_1$, *для которых (3) не выполняется. Тогда для меры этого множества* $\mu(E)$ *справедлива оценка:*

$$\mu(E) \leq X_1 X^{-0,5\varepsilon}.$$

Вспомогательные утверждения

Теорема 2. Предположим, что $\Phi(s)$ мероморфна внутри и на границе прямоугольника, ограниченного прямыми $t = T_1,\ t = T_2,\ T_1 < T_2,\ \sigma = \alpha,\ \sigma = \beta,\ (\beta > \alpha),$ регулярна и отлична от нуля на прямой $\sigma = \beta$. Функция $\ln \Phi$ регулярна в окрестности $\sigma = \beta$; и здесь мы определим $F(s) = \ln \Phi(s)$, отправляясь от какого-либо значения логарифма. Для других точек s прямоугольника мы определим $F(s)$ как значение, полученное из $\ln \Phi(\beta + it)$ непрерывным изменением вдоль $t = const$ от $\beta + it$ до $\sigma + it$, в предположении, что путь не пересекает нуля или полюса $\Phi(s)$; если же это так, мы полагаем

$$F(s) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\big(F(\sigma + it + i\varepsilon) + F(\sigma + it - i\varepsilon)\big).$$

Пусть $\nu(\sigma')$ означает избыток числа нулей над числом полюсов в той части прямоугольника, для которой $\sigma > \sigma'$, считая нули и полюсы на $t = T_1$. или $t = T_2$ лишь за половину таковых. Тогда

$$\int F(s)ds = -2\pi i \int_{\alpha}^{\beta} \nu(\sigma, T)d\sigma,$$

где интеграл слева берется вокруг прямоугольника в положительном направлении.

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $0 < \varepsilon < 0,01$ – произвольно малое фиксированное число, X – растущий параметр, $X_1 \geq X^{7/8+\varepsilon},\ X \leq T \leq X + X_1,\ P = \sqrt{T/2\pi},\ H = X^{\varepsilon}$, $L = \ln X,\ Y = H^{0,01},\ P_1 = PY$, числа $\delta(\nu)$ определяются следующим равенством

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu < Y}\frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1}, a(m) = \sum_{\substack{n\nu = m\\ n \leq P, \nu < Y}}\frac{\sqrt{\nu}\delta(\nu)}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Лемма 1. Справедливая следующая оценка

$$\Sigma = \sum_{m\le P_1} a^2(m) = O(1),$$

где константа в знаке O зависит только от ε.

Доказательство см. в [5, с. 149].

Лемма 2. При натуральных числах m, m_1, m_2 положим

$$D(m_1,m_2) = a(m_1)a(m_2)\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT},$$

$$W(T) = \sum_{m_1<m_2\le P_1} D(m_1,m_2).$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1} W(T)^2\,dT \ll \frac{X_1Y^9L^{10}}{H},$$

где постоянные в знаке $\ll$ зависят только от ε.

Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 1 из [6].

Следствие 1. Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E – множество таких T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняются неравенства

$$W^2(T) \ge \frac{X_1^{1-\delta}Y^9L^{10}}{H}.$$

Тогда для меры множества E справедлива оценка

$$\mu(E) \ll X_1^{\delta}.$$

Доказательство основной теоремы

В следствии 1 полагаем $\delta = 1-4/7\varepsilon$. Будем рассматривать те числа T из $X \le T \le X+X_1$, которые не принадлежат множеству E; для них выполняются оценки

$$W^2(T) < \frac{Y^9L^{10}}{\sqrt{H}}. \qquad (12)$$

Введем функцию

$$\Phi(s) = \zeta(s)f(s), \quad f(s) = \sum_{\nu<Y}\delta(\nu)\nu^{1-s}.$$

Применим теорему 2 к $\Phi(s)$ и прямоугольнику с вершинами $s = 0,5+iT$, $s = 0,5+i(T+H)$, $s = 3+iT$, $s = 3+i(T+H)$. Получаем неравенство

$$2\pi\int_{0,5}^{1} N(\sigma,T+H) - N(\sigma,T)d\sigma \le \frac{H}{2}\log\left(\frac{J}{H}\right) + O(H),$$

где

$$J = \int_T^{T+H} |\zeta(0,5+it)|^2\,|f(0,5+it)|^2\,dt.$$

Пользуясь приближенным функциональным уравнением для $\zeta(s)$ (см. [7]. стр. 82), получаем

$$J \le 8J_1 + O\left(HT^{-0,5}YL^4\right),$$

где

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 \left| f(0,5+it) \right|^2 dt.$$

Вспоминая определение $f(s)$, можно переписать J_1 так:

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt,$$

где числа $a(m)$ определены в (4). Имеет место цепочка соотношений:

$$J_1 \le e\int_T^{T+H} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt \le$$

$$\le eH \sum_{m_1, m_2 \le P_1} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(v - iv\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) dv =$$

$$= e\sqrt{\pi}H \sum_{m_1, m_2 \le P_1} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \le e\sqrt{\pi}H\left(\Sigma + 2\left|W(T)\right|\right),$$

где Σ и $W(T)$ определены в леммах 1 и 2. В силу леммы 1 и оценки (5) получаем:

$$J_1 = O(H), \quad J = O(H), \quad \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma = O(H).$$

Пусть $\sigma > 0,5$, $\sigma_1 = 0,5 + 0,5(\sigma - 0,5) < \sigma$ и $g(\alpha) = N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T)$. Заметим, что $g(\alpha_2) \le g(\alpha_1)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$. Отсюда следует, что

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \le \frac{1}{\sigma - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) d\alpha \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma - 0,5} \int_{0,5}^{1} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) d\alpha = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

Далее, утверждение теоремы следует из следствия 1.

Заключение

В нашей работе границу $H = X^{\varepsilon}$ определяет лемма 1. Это объясняется тем, что надо «успокоить» достаточно длинный отрезок ряда Дирихле, которым определяется дзета-функция Римана. Если справедлива гипотеза Римана, то утверждение теоремы 1 верно для $H \gg 1$. Поэтому интересно рассмотреть задачу для существенно более коротких промежутков в окрестности критической прямой.

Список литературы
References

1. Littlewood J.E. 1924. On the zeros of the Riemann zeta-function. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 22: 295–318.

2. Selberg A. 1942. On the zeros of Riemann's zeta-function. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, 10: 1–59.

3. Карацуба А.А. 1985. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой. Изв. АН СССР. Сер. Матем., 49(2): 326—333.

Karatsuba A.A. 1986. On the zeros of the function ζ(s) in the neighborhood of the critical line. Mathematics of the USSR-Izvestiya,26(2):307.

4. Киселева Л.В. 1989. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой. Матем. заметки, 46(4):114–115.

Kiseleva L.V. 1989. On the zeros of the function $\zeta(s)$ in a neighborhood of the critical line. *Mat. Zametki*, 46(4):114–115.

5. Воронин С.М., Карацуба А.А. 1994. Дзета-функция Римана. М., Физматлит, 376.

Voronin, S.V., Karatsuba, A.A. 1994, The Riemann zeta-function. M., Fizmatlit, 376.

6. Там Д.Д. 2016. О нулях дзета–функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой. Чебышевский сборник, 17(1): 69–87.

Tam D.D. 2016. On the zeros of the Riemann zeta function, lying in almost all short intervals of the critical line. Chebyshevskii Sbornik, 17(1): 69–87.

7. Титчмарш Е.К. 1953. Теория дзета-функции Римана. М., Мир, 406.

Titchmarsh E.K. 1953. Teoriya dzeta-funkcii Rimana. M., Mir, 406.