УДК 519.6

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СЕТИ

THE OPTIMIZATION PROBLEM OF POTENTIAL VARIABLES ARISING IN SOLVING THE PROBLEM OF THE SYNTHESIS NETWORK

М.М. Бухурова
M.M. Bukhurova

[2]*Институт прикладной математики и автоматизации,*
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 а
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 a, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: mareta.bukhurova@mail.ru

Аннотация. В работе решается задача оптимизации потенциальных переменных, возникающая при решении задачи синтеза сети методом динамической декомпозиции. Суть метода динамической декомпозиции состоит в сведении процесса оптимизации сети к решению ряда задач малой размерности минимизации выпуклой функции при линейных сетевых ограничениях.
Resume. We solve the problem for the potential variables that arise when solving network synthesis problem with dynamic mode decomposition method. The dynamic mode decomposition method reduce the process of the network optimization to the solution of number of convex minimization problems network with linear restrictions.

Ключевые слова: задача оптимизации, метод динамической декомпозиции, потенциальные переменные, синтез сети, граф.
Key words: optimization problem, method of dynamic mode decomposition, potential variables, network synthesis, graph .

Введение

Хорошо известна эффективность метода динамического программирования оптимизации марковских процессов и примыкающих к нему идейно методов локальных вариаций, последовательного анализа и отбраковки вариантов. Однако эти методы, суть которых состоит в том, что варьируется малая часть переменных при фиксации остальных при продвижении к оптимуму, удается реализовать не для задач оптимизации – вариация переменных немедленно сказывается на всех или большинстве остальных переменных [1]. Законами теории сетей являются уравнения непрерывности и потенциальности [6]. Поэтому их структура допускает использование такого подхода. При этом те элементы, которые следует варьировать, размещены на сети компактно. Если имеется некоторое допустимое решение задачи, то при изменении значений переменных внутри любой выделенной связной части в широких пределах, на ее границе (а значит, и на всей остальной сети) сохранится прежнее значение переменных. Это свойство и использует метод динамической декомпозиции для последовательного продвижения к оптимуму задачи. Для оптимизации берется связная часть вследствии того, что оптимизацию нескольких несвязных частей можно свести к последовательной оптимизации каждой из этих частей [3, 4].

Основой метода динамической декомпозиции служат сформулированные особым образом условия экстремума в задачах синтеза сети. В этих условиях для каждой конкретной сетевой задачи изложенная идея сведения оптимизации всей сети к оптимизации ее малых фрагментов. При этом условия экстремума формируется в удобном для решения сетевых задач виде – на языке теории графов [2, 5].

Основная задача синтеза сети состоит в следующем

$$\begin{cases} z = \alpha\sum\limits_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij},u_{ij})l_{ij} + \beta \mathrm{P}(Q_1,U_1) + \gamma Q_1 U_1 \to \min, & (1)\\ \sum\limits_{i\in\Gamma_j^+} \upsilon_{ij} - \sum\limits_{k\in\Gamma_j^-} \nu_{jk} = g_j,\ \forall j_{\neq 1} \in \mathrm{B}; \quad \sum\limits_{j\in\Gamma_i^-} \nu_{ij} = \sum\limits_{i\in \mathrm{B}} g_i = Q_1, & (2)\\ U_j = u_{ij}l_{ij} + U_i, \quad \forall ij \in D, & (3)\\ U_j \geq U_j^{\mathrm{H}} \quad \forall j \in \mathrm{B}, & (4)\\ \nu_{ij} \geq 0, \quad \forall ij \in D, & (5) \end{cases}$$

где: $\Gamma(B,D)$ – заданный конечный, связный, вообще говоря, двузвенный орграф, моделирующий возможные соединения узлов (вершин) сети друг с другом; B и D – множества его вершин и дуг; $\nu_{ij}, u_{ij}, c_{ij}, l_{ij}$, – соответственно искомые значения кинетической (например, ток) и потенциальной (например, напряжение) переменных по ij – ой дуге (ветви) сети, ее удельная (на единицу длины) стоимость и заданная длина; $Q_1, U_1, P(Q_1, U_1)$ – заданный поток в сеть, искомые потенциал источника и его стоимость; α, β, γ – заданные постоянные коэффициенты; g_j, U_j^H, U_j – заданный расход потока, нормативный (заданный) потенциал и потенциал в j – ом узле (вершине) сети соответственно [2].

Первый член целевой функции (1) отражает стоимость ветвей сети, второй – стоимость источника сети, третий – энергетические затраты на транспорт вещества и (или) энергии от источника к потребителям (узлам, вершинам). Ограничения (2), (3) учитывают законы теории сетей, (2) и (4) – требования по обеспечению потребителей сети потоками и нормативными значениями потенциалов.

Удельная стоимость ветви сети имеет вид

$$c_{ij}(v_{ij},u_{ij}) = \begin{cases} \bar{c}_{ij}(u_{ij},v_{ij}), & при\ \ v_{ij} > 0,\ u_{ij} \in [u^-, u^+],\\ \infty, & при\ \ v_{ij} > 0,\ u_{ij} \notin [u^-, u^+],\\ 0, & при\ \ v_{ij} = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где диапазон $[u^-, u^+]$ отражает физическую либо техническую невозможность обеспечения иных значений u_{ij} при $v_{ij} > 0$.

Для основной задачи синтеза сети (1) - (5) имеет следующий [3, 4]

Принцип оптимальности.

а) Найдется остов T графа $\Gamma(B,D)$ и соответствующее ему базисное решение задачи (по потоковым переменным) $\{v_{ij}^*, u_{ij}^*\}_{ij\in D}, U_1^*$, что

$$\alpha\sum_{ij\in d} c_{ij}(v_{ij}^*, u_{ij}^*)l_{ij} + \beta P(Q_1, U_1^*) + \gamma Q_1 U_1^* \leq \alpha\sum_{ij\in d} c_{ij}(v_{ij}, u_{ij})l_{ij} + \beta P(Q_1, U_1) + \gamma Q_1 U_1$$

где $v_{ij}^* = 0$, если $ij \notin \mathrm{T}$, $\{v_{ij}, u_{ij}\}_{ij\in D}$, U_1 – любое допустимое решение задачи.

б) Пусть T' – любая связная часть графа Т; $\{\bar{v}_{ij}, \bar{v}_{ij}\}_{ij\in D}, \bar{U}_1 = U_1^*$ – любое такое допустимое решение, что $\bar{v}_{ij} = v_{ij}^*, \bar{u}_{ij} = u_{ij}^*, \ \forall ij \notin \Gamma(\mathrm{T}')$, где $\Gamma(\mathrm{T}')$ – граф , порожденный на графе $\Gamma(B, D)$ графом T'. Тогда:

$$\sum_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij}^*, u_{ij}^*) l_{ij} \le \sum_{ij\in D} c_{ij}(\bar{v}_{ij}, \bar{u}_{ij}) .$$

Условие а) сводит процесс оптимизации сети к перебору решений, соответствующих остовным деревьям графа $\Gamma(B,D)$. Однако, даже направленный перебор таких решений неосуществим в силу их большого количества, растущего факториально от числа вершин и дуг графа $\Gamma(B,D)$, сводящие процесс оптимизации сети к оптимизации ее малых частей [5].

До тех пор, пока рассматриваются части графа $\Gamma(B,D)$ и на них проверяется принцип оптимальности, его условия – необходимы. По мере разрастания рассматриваемых частей его условия все более приближаются к достаточным.

Метод динамической декомпозиции сводит задачу синтеза сети к направленному перебору структур, на каждой из которых решается задача оптимизации потенциальных малой размерности. Кроме того, для определения оптимального решения задачи синтеза сети во всем диапазоне возможных потенциалов источника $[U_1^{\min}, U_1^{\max}]$, необходимо решать задачу оптимизации потенциальных переменных не на фрагментах, а на всей сети.

Поэтому рассмотрим более подробно задачу оптимизации потенциальных переменных. Итак, пусть сгенерирован некоторый остов T^0 графа $\Gamma(B,D)$. Заметим, что теперь нет необходимости нумеровать ветви сети двойным индексом, т.к. с каждой вершиной ассоциирована единственная дуга дерева T^0 входящая в эту вершину. Вычислим потоки по дугам остова T^0. Они определяются однозначно: $g^i = \sum_{j\in \mathrm{T}^{0i}} g_j$, где g^i – потоком по i – ой ветви остова T^0, g_j – потребный расход в j – ой вершине, T^{0i} – куст остова T^0, растущий из i -ой вершины. Поскольку потоки определены, то обозначим $C^i(g_i, u^i)$ через $C^i(u^i)$ (верхний индекс у нас будет обозначать дугу, а нижний вершину). Исходя из полученных потоков определим предельно возможные значения $u^i - \left[u^{i-}, u^{i+}\right]$. Этот диапазон связан всегда с конкретной задачей. Например, для гидравлических сетей он связан с предельно допустимыми скоростями движения воды по трубам.

Определим теперь минимально возможный потенциал источника U_1. Поскольку U_1 должен обеспечить в любом i - ом узле сети потенциал $U_i \ge U_i^H$, то

$$U_1 \ge U_i^H + \sum_{j\in T_i^0} u^{j-} l^j, \forall i \in T^0 ,$$

где T_i^0 – траектория (последовательность дуг) ведущая из источника в i –ый узел сети.

Таким образом, задача оптимизации потенциальных переменных (обычно говорят задача оптимизации параметров в отличии от задачи оптимизации структуры - ν -задачи), состоит в следующем:

$$\begin{cases} z_u = \alpha \sum_{i \in T^0} c^i(u^i) l^i + \beta P(Q_1, U_1) + \gamma Q_1 U_1 \to \min, \\ U_1 \ge U_i^H + \sum_{j \in T_i^0} u^j l^j, \ \forall i \in T^0, \\ u^j \in \left[u^{j-}, u^{j+} \right] \quad \forall j \in T^0. \end{cases}$$

В силу того что $C^i(u^i)$ есть строго выпуклая, положительная, монотонно убывающая функция, $P(Q_1, U_1)$ – строго выпуклая, положительная, возрастающая по U_1 функция, Q_1 – заданный поток в сеть, то имеем задачу минимизации строго выпуклой функции при линейных ограничениях.

Данную задачу можно решить, например, сведением ее к задаче сепарабельного кусочно-линейного программирования. Но более эффективным для наших нужд является метод динамического программирования, т.к. подобную задачу придется нам решать и на малых фрагментах сети, когда метод динамического программирования несравненно эффективнее иных методов.

При использовании метода динамического программирования следовало бы ее решать с наименьшего возможного потенциала $U_1^{\min}$ источника двигаясь

$$U_1^{\min} = \max \left\{ U_i^H + \sum_{j \in T_i^0} u^{j-} l^j, \quad \forall i \in T^o \right\}$$

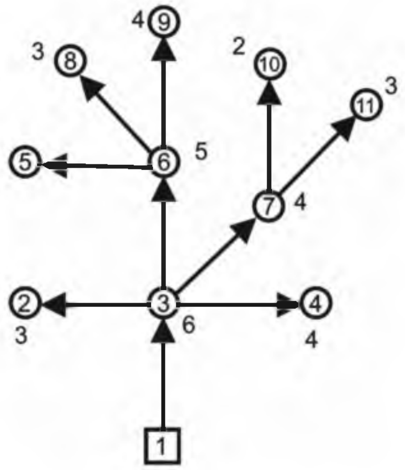
с некоторым шагом Δ по U_1. Но поскольку мы хотим решать задачу оптимального синтеза сети, не следует сразу полностью решать эту задачу двигаясь по U_1, так как мы можем «проскочить» тот потенциал U_1^*, который соответствует оптимуму задачи синтеза сети. Будем поэтому двигаться по U_1 уже запустив процедуру динамической декомпозиции, то есть параллельно меняя и структуру сети и значения потенциальных переменных. Итак, будем решать задачу

$$\begin{cases} z_u = \alpha \sum_{i \in T^0} c^i(u^i) l^i \to \min, \\ U_1^{\min} \ge U_i^H + \sum_{j \in T_i^0} u^j l^j, \quad \forall i \in T^0, \\ u^j \in \left[u^{j-}, u^{j+} \right] \quad \forall j \in T^0 \end{cases}$$

методом динамического программирования. Положим $u^j = u^{j-}$ и определим при этом потенциал каждой вершины $U_i = U_i^{\min} - \sum_{j \in T_i^0} u^{j-} l^j, \quad \forall i \in T^0$. Определим величину ресурса потенциала по каждой вершине $U_i - U_i^H$. Теперь этим ресурсом следует распорядиться так, увеличивая значения потенциальных переменных u^i, а значит, уменьшая C^i, чтобы значения целевой функции принимало наименьшее возможное значение.

Проиллюстрируем процедуру динамического программирования решения этой задачи, получив при этом основное соотношение для продвижения к оптимуму.

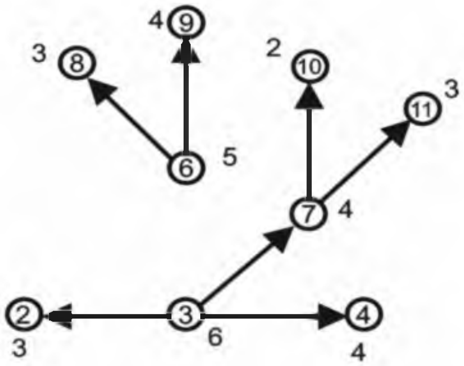
Пусть T^0 имеет вид.



Рядом с вершинами указаны ресурсы по потенциалу. Хотя бы для одной вершины ресурс непременно равен нулю, так как потенциал источника минимален.

Будем развертывать процесс динамического программирования с концевых дуг остова T^0 перемещаясь к корню остова. Блокируем вначале те дуги и вершины T^0 на которых невозможна оптимизация. Это все те дуги и вершины, которые ведут к вершинам с нулевым ресурсом. В данном случае это дуги и вершины: 5, 6, 3.

Формируем оставшиеся для оптимизации фрагменты остова T^0



Определяем концевые (висячие) дуги ассоциированные с одной и той же вершиной: 8, 9 (с 6); 10, 11 (с 7); 2, 4 (с 3). Сравниваем величины:

$$\frac{dc^8(u^8)}{d(u^8)}+\frac{dc^9(u^9)}{d(u^9)} \quad \text{и} \quad \frac{dc^6(u^6)}{d(u^6)}=0. \qquad \text{(ветвь 6 блокирована)}$$

Поскольку альтернатива здесь отсутствует, то полагаем $u^8=u^{8-}+3$, $u^9=u^{9-}+4$. Процесс оптимизации фрагмента завершен. Вершины и дуги 8 и 9 блокируются для дальнейшей оптимизации. Переходим к оптимизации следующего фрагмента T^0 . Сравниваем

$$\frac{dc^{10}(u^{10})}{d(u^{10})}+\frac{dc^{11}(u^{11})}{d(u^{11})} \quad \text{и} \quad \frac{dc^7(u^7)}{d(u^7)}.$$

Пусть первая из этих величин оказалась большей. Включаем в перспективное множество ветвей на оптимизацию ветви 10 и 11 и запоминаем по ним сумму производных (u^{10},u^{11}) . Переходим из вершины 7 в смежную к ней вершину – это корневая вершина фрагмента. Таким образом, альтернатива увеличению значений u^{10} и u^{11} на данном шаге отсутствует – увеличиваем значения этих переменных

$$u^{10} = u^{10-} + \Delta, u^{11} = u^{11-} + \Delta .$$

При этом ресурсы всех ветвей, растущих из дуги 10 и 11 следует уменьшить на величину Δ, а само Δ выбирается достаточно малым и таким, чтобы ни один ресурс не стал отрицательным. Если ресурс какого либо узла сети станет равен нулю, то вершины и дуги, ведущие к нему блокируются – их ресурсы нельзя уменьшить не нарушив условий задачи.

Переходим к оптимизации следующего фрагмента 2, 4 (с 3). Эти вершины ассоциированы с корневой вершиной 3. Альтернатива оптимизации дуг 2 и 4 отсутствует. Полагаем

$$u^2 = u^{2-} + 3, \quad u^4 = u^{4-} + 4 .$$

Блокируем эти дуги и вершины для дальнейшей оптимизации. Одна итерация метода динамического программирования завершена.

Далее вновь определяем ресурсы вершин среди незаблокированных вершин 10, 11, 7.

Продолжаем оптимизацию соответствующих фрагментов.

Итак, процесс динамического программирования для решения задачи достаточно прост и включает в себя три процедуры. На каждой итерации продвижения к оптимуму осуществляется:

1) Блокирование вершин и дуг остова графа T^0 .
2) Оптимизация оставшихся фрагментов остова.
3) Корректировка ресурсов узлов сети.

Обозначим перспективное множество куста остова растущего из i -ой дуги (то есть набор тех дуг куста на котором эффект от увеличения по ним значения потенциальных переменных наибольший) через R_i. Тогда на очередном шаге оптимизации при продвижении к корню фрагмента остова решается альтернатива

$$\max\left\{\sum_{j\in R_i}\frac{dc^j(u^j)}{du^j}, \frac{dc^i(u^i)}{du^i}\right\}.$$

Процесс оптимизации завершается когда все дуги и вершины будут заблокированы. Аналогичным образом решается задача оптимизации и МК. Тем самым «плохая» задача минимизации вогнуто-выпуклой функции при линейных ограничениях сводится к решению ряда «хороших» задач минимизации выпуклой функции при линейных ограничениях малой размерности.

Заключение

Данный метод был применен для решения задач оптимального проектирования оросительных сетей и магистральных водопроводов и показал свою практическую эффективность.

Список литературы
References

1. Евдокимов А.Г. 1976. Оптимальные задачи на инженерных сетях. Харьков, Издательство ХГУ.

Evdokimov A.G. 1976. Optimalnye zadachi na ingenernyh setyah [Optimal problems on engineering networks]. Kharkiv, Izdatelstvo KhGU.

2. Ермольев Ю.Н., Мельник И.Н. 1968. Экстремальные задачи на графах. Киев, Наукова думка.

Ermol'ev Yu.N., Melnik I.N. 1968. Ekstremalnye zadachi na grafah [Extreme problems on graphs]. Kiev, Naukova dumka.

3. Кудаев В.Ч., Нахушева М.М. 1999. 2-оптимальное решение задачи синтеза сетей методом динамической декомпозиции. Нальчик, Доклады АМАН, 4 (1): 15-20.

Kudaev V.Ch., Nakhusheva M.M. 1999. 2-optimalnoe reshenie zadachi sinteza setey metodom dinamicheskoy dekompozitsii [the 2-optimal solution of dynamic network synthesis problem decomposition method]. Nalchik. Doklady AMAN.

4. Кудаев В.Ч. 1996. Задача оптимального синтеза активных сетей. Нальчик, Тезисы докладов Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики».

Kudaev V.Ch. 1996. Zadacha optimalnogo sinteza aktivnyh setey [The problem of optimal synthesis of active networks]. Nalchik, Tezisy dokladov mezhdunarodnoi konferentsii «Nelokalnye kraevye zadachi I rodstvennye problemy matematicheskoy biologii, informatiki i fiziki».

5. Кристофидес Н. 1978. Теория графов. М., Мир.

Kristofides N. 1978. Teoriya grafov [Graph theory]. Moscow, Mir.

6. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. 1968. Потоки в сетях. М., Мир.

Ford L.R., Fulkerson D.R. 1968. Potoki v setyah [Flows in networks]. Moscow, Mir.