УДК 517.928.4

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

INFLUENCE OF PERTURBATIONS OF THE MOVABLE SINGULAR POINT ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

В.Н. Орлов [1], Т.Ю. Леонтьева [2]
V.N. Orlov [1], T.Yu. Leont'eva [2]

[1] Гуманитарно-педагогическая Академия (филиал) «КФУ им. В.И. Вернадского», 298635, г. Ялта, ул. Севастопольская, д. 2а, тел/факс (0654)-32-30-13.
Humanity and Pedagogical Academy (Branch) «V. Vernadsky named CFU» in Yalta, 298635, city of Yalta, st. Sevastopol, 2a, tel / fax: (0654) -32-30-13,

[2] Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38, тел (8352)-62-03-12
I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University, 428000, Cheboksary, st. K. Marx, 38, tel (8352)-62-03-12

E-mail: orlowvn@rambler.ru betty2784@mail.ru

Аннотация. В современном мире с нелинейными дифференциальными уравнениями можно встретиться почти во всех областях науки и техники. Но решение этих уравнений связано с большими трудностями в связи с наличием подвижных особых точек. В данной работе представлена апробация одного из шагов метода приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений для одного класса дифференциальных уравнений. Данный метод включает решение шести задач. Решение первых двух задач: доказательство теоремы существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения; построение приближенного решения и исследование влияния возмущения начальных условий на приближенное решение, опубликованы ранее. В статье рассмотрено влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение.

Resume. In today's world with nonlinear differential equations can be found in almost all fields of science and technology. But the solution to these equations is connected with great difficulties due to the presence of moving singular points. This paper presents the testing of one of the steps of the method of approximate solution of nonlinear differential equations for a class of differential equations. This method involves the solution of six problems. The decision of the first two tasks: the proof of the existence and uniqueness of solutions of nonlinear differential equations; construction of an approximate solution and investigation of the influence of the perturbation of the initial conditions on an approximate solution, published earlier. The article considers the influence of perturbations of movable singular point on the approximate solution of this class of nonlinear differential equations of second order. These results are accompanied by estimates.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, возмущение подвижной особой точки, апостериорная погрешность

Key words: movable singular point, non-linear second-order differential equation, approximate solution, majorant method, a neighborhood of the movable singular point, the perturbations of the movable singular point, a posteriori error.

Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения представляют большой интерес в связи с их приложением во многих областях науки и техники [Kalman, 1961; Axford, 1970; Hill, 1977; Ockendon, 1978; Shi, 2005]. Решения нелинейных дифференциальных уравнений связаны с большими трудностями, вызванными наличием подвижных особых точек у интегралов этих уравнений, которые и являются препятствием к использованию известных на данный момент приближенных численных и аналитических методов решения [Березин, Жидков, 1960; Бахвалов, 1970; Фильчаков, 1970]. Упомянем о работах, направленных на разрешение в квадратурах нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, но это удается сделать лишь в частных случаях [Яблонский, 1964; Еругин, 1967; Самодуров, 1983; Кондратеня и др., 1988; Мататов, Сабынич, 1991; Лукашевич, 1995; Чичурин, Швычкина, 2014]. В данной статье дано исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение в окрестности подвижной особой точки.

Объекты и методы исследования. Объектом исследования является один класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальной правой частью пятой степени. Существующие методы решения дифференциальных уравнений можно классифицировать: 1) точные; 2) приближенные; 3) асимптотические. Большинство работ посвященных решению дифференциальных уравнений можно отнести в основном к точным и частично к асимптотическим методам, и только незначительная их часть использует формальный аппарат приближенных методов, без строгого доказательства соответствующих пунктов этих методов. В данной работе приведен очередной этап приближенного аналитического метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, позволяющий получить решение рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений с заданной точностью в окрестности подвижной особой точки. Решение данной задачи для других классов нелинейных дифференциальных уравнений представлены в работах [Орлов, 2006; Орлов, 2008а, б; Орлов, 2009]. Предыдущие этапы аналитического приближенного метода решения рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения были опубликованы ранее [Орлов, Леонтьева, 2013а, б].

Результаты и их обсуждение. Для задачи Коши

$$y''(x) = y^5(x) + r(x), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \tag{2}$$

в случае точного значения подвижной особой точки в работе [Орлов, Леонтьева, 2014] было получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки x^* в виде

$$y(x) = (x^* - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2}, \ C_0 \neq 0. \tag{3}$$

Возмущение подвижной особой точки $\tilde{x}^*$ оказывает влияние на структуру аналитического приближенного решения (3), которое принимает следующий вид:

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{x}^* - x)^{(n-1)/2}, \ \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $\tilde{C}_n$ - возмущенные значения коэффициентов, $\tilde{x}^*$ - возмущенное значение подвижной особой точки.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия: $r(x) \in C^\infty$ в области $\mathrm{K} = \{x : |\tilde{x}^* - x| < \rho_0\}$, $\rho_0 = const > 0$; $\exists M_0 : \frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \leq M_0$, $M_0 = const$, $n = 0,1,2,\ldots$; $\tilde{x}^* \leq x^*$;

известны оценки погрешности $\tilde{x}^*$ и $\tilde{\alpha}$: $\left|\tilde{x}^* - x^*\right| \le \Delta\tilde{x}^*$, $\left|\tilde{\alpha} - \alpha\right| \le \Delta\tilde{\alpha}$, где $\Delta\tilde{x}^* < 1\Big/\left(4\cdot\sqrt[5]{(M+1)^2}\right)$. Тогда для аналитического приближенного решения (4) задачи (1)-(2) в областях

$$\tilde{x}^* - \rho_3 < x \le \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*, \tag{5}$$

$$\tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^* < x \le \tilde{x}^* \tag{6}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\tilde{y}_N(x) \le \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{x}^*}{\left|\tilde{x}^* - x\right|}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 = \frac{2^N M(M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]}\left|\tilde{x}^* - x\right|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5(M+1)\left|\tilde{x}^* - x\right|^{5/2}}\sum_{i=0}^{8}\frac{2^i\eta(M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]}\cdot\left|\tilde{x}^* - x\right|^{\frac{i}{2}}}{(N+i+2)(N+i-6)},$$

$$\Delta_2 = \frac{2^6 M(M+1)\beta^{5/2}}{1 - 2^{10}(M+1)^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^{\gamma_1}\beta^i + 2\beta^{1/2}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$$\Delta_3 = \frac{2^6\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\mu\beta^2}{1 - 2^{10}\mu^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{2i}\mu^{\gamma_1}\beta^i + 2\beta^{1/2}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$\rho_0 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_1 = \dfrac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}}$ (из [Орлов, Леонтьева, 2014]), $\rho_2 = \dfrac{1}{8\left(M + \Delta\tilde{M} + 1\right)^2}$,

$\beta = \begin{cases}\left|\tilde{x}^* - x\right|, x \in (5)\\ \Delta\tilde{x}^*, x \in (6)\end{cases}$, $\eta = \begin{cases}1+i, i = 0,1,2,3,4,\\ 9-i, i = 5,6,7,8\end{cases}$, $\mu = M + \Delta\tilde{M} + 1$, $\gamma_1 = \begin{cases}0, i = 0,1,2\\ 1, i = 3,4\end{cases}$;

$\gamma_2 = \begin{cases}0, i = 0,1\\ 1, i = 2,3,4\end{cases}$; $M = \max\left\{|\alpha|, \sup\limits_n \dfrac{\left|r^{(n)}\left(\tilde{x}^*\right)\right|}{n!}, M_2\right\}$, $\Delta\tilde{M} = \left(\sup\limits_n \dfrac{\left|r^{(n+1)}\left(\tilde{x}^*\right)\right|}{n!}\right)\Delta\tilde{x}^*$, α - параметр, зависящий от условий (3), $n = 0,1,2,\ldots$.

Доказательство. Используя классический подход, имеем

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = \left|y(x) - \tilde{y}_N(x)\right| \le \left|y(x) - \tilde{y}(x)\right| + \left|\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)\right|.$$

Оценим $\left|y(x) - \tilde{y}(x)\right|$:

$$\left|y(x) - \tilde{y}(x)\right| \le \left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n\left(\tilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} + \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n\left(\tilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left(x^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n \left(\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left|\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-1)/2}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right|.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right|$.

Так как $x < \widetilde{x}^* \le x^*$ и $\left|C_0\right| = \left|\widetilde{C}_0\right| = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, то при $n = 0$

$$\left|\widetilde{C}_0\right| \cdot \left|\left(x^* - x\right)^{-1/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{-1/2}\right| \le \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{\left|\widetilde{x}^* - x\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Учитывая $\left|C_1\right| = \left|\widetilde{C}_1\right| = 0$, $\left|C_2\right| = \left|\widetilde{C}_2\right| = 0$, $\left|C_3\right| = \left|\widetilde{C}_3\right| = 0$, $\left|C_4\right| = \left|\widetilde{C}_4\right| = 0$, получаем:

$$\left|y(x) - \widetilde{y}(x)\right| \le \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{\left|\widetilde{x}^* - x\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=5}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| +$$

$$+ \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n \left|\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-1)/2}\right|.$$

Далее, в случае $n = 5,6,7,\ldots$

$$\left|\left(x^* - x\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| \le \left|\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-1)/2} - \left(\widetilde{x}^* - x\right)^{(n-1)/2}\right| \le$$

$$\le \left|\Delta\widetilde{x}^* \left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-2)/2}\right|.$$

Следовательно, для оценки приближенного решения (4) имеем:

$$\left|y(x) - \widetilde{y}_N(x)\right| \le \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{\left|\widetilde{x}^* - x\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\widetilde{x}^* - x\right|^{(n-1)/2} + \sum_{n=5}^{\infty} \left|\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\Delta\widetilde{x}^* \left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-2)/2}\right| +$$

$$+ \sum_{n=5}^{\infty} \left|\Delta\widetilde{C}_n\right| \cdot \left|\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-1)/2}\right| = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где $\left|\widetilde{C}_n - C_n\right| = \Delta\widetilde{C}_n$.

Таким образом,

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{\left|\widetilde{x}^* - x\right|} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Выражение оценки Δ_1 следует из теоремы 2 работы [Орлов, Леонтьева, 2014].

Перейдем к оценке Δ_2. Проведем суммирование отдельно по целым и дробным степеням, учитывая, что $\Delta\widetilde{x}^* \le \left|\widetilde{x}^* - x\right|$:

$$\Delta_2 = \sum_{n=5}^{\infty}\left|\widetilde{C}_n\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(n-2)/2}\right| = \sum_{n=3}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{2n-1}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(2n-3)/2}\right| +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{2n}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{n-1}\right| = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}.$$

С учетом закономерности получения оценок для $\widetilde{C}_n$, следует:

$$\Delta_{2,1} = \sum_{n=3}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{2n-1}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(2n-3)/2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k-5}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k-7)/2}\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k-3}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k-5)/2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k-1}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k-3)/2}\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k+1}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k-1)/2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k+3}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k+1)/2}\right| =$$

$$= \sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{C}_{10k-5+2t}\right|\cdot\left|\Delta\widetilde{x}^*\left(\left|\widetilde{x}^* - x\right| + \Delta\widetilde{x}^*\right)^{(10k-7+2t)/2}\right| \le$$

$$\le \frac{2^6\,\Delta\widetilde{x}^* M(M+1)\left|\widetilde{x}^* - x\right|^{3/2}}{1 - 2^{10}\cdot(M+1)^2\cdot\left|\widetilde{x}^* - x\right|^5}\cdot\sum_{t=0}^{4}2^{2t}(M+1)^{\gamma_1}\left|\widetilde{x}^* - x\right|^t$$

при условии $\left|\widetilde{x}^* - x\right| < 1\Big/\left(4\cdot\sqrt[5]{(M+1)^2}\right)$, где $\gamma_1 = \begin{cases}0, i = 0,1,2\\ 1, i = 3,4\end{cases}$. В случае $\left|\widetilde{x}^* - x\right| < \Delta\widetilde{x}^*$ получим:

$$\Delta_{2,1} \le \frac{2^6 M(M+1)\Delta\widetilde{x}^{*5/2}}{1 - 2^{10}\cdot(M+1)^2\cdot\Delta\widetilde{x}^{*5}}\cdot\sum_{t=0}^{4}2^{2t}(M+1)^{\gamma_1}\Delta\widetilde{x}^{*t}.$$

Аналогичным способом получим оценку для $\Delta_{2,2}$

$$\Delta_{2,2} \le \frac{2^7 M(M+1)\Delta\widetilde{x}^{*3}}{1 - 2^{10}\cdot(M+1)^2\cdot\Delta\widetilde{x}^{*5}}\cdot\sum_{t=0}^{4}2^{2t}(M+1)^{\gamma_2}\Delta\widetilde{x}^{*t},$$

где $\gamma_2 = \begin{cases}0, i = 0,1\\ 1, i = 2,3,4\end{cases}$.

Найдем оценку для Δ_3. Для выражения $\Delta\widetilde{C}_n$ предполагаем оценки

$$\Delta\widetilde{C}_{5n} \le \frac{2^{5n}\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^n}{(5n+2)(5n-6)},\quad \Delta\widetilde{C}_{5n+1} \le \frac{2^{5n+1}\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^n}{(5n+3)(5n-5)},$$

$$\Delta\widetilde{C}_{5n+2} \le \frac{2^{5n+2}\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^n}{(5n+4)(5n-4)},\quad \Delta\widetilde{C}_{5n+3} \le \frac{2^{5n+3}\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$

$$\Delta\widetilde{C}_{5n+4} \le \frac{2^{5n+4}\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

где $M=\sup\limits_n \dfrac{\left|r^{(n)}\left(\tilde{x}^*\right)\right|}{n!}$, $\Delta\tilde{M}=\left(\sup\limits_n \dfrac{\left|r^{(n+1)}\left(\tilde{x}^*\right)\right|}{n!}\right)\Delta\tilde{x}^*$. Докажем оценку для $\Delta\tilde{C}_{5n}$ в случае

$N+1=5(2n+1)$

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5}=\left|\tilde{C}_{10n+5}-C_{10n+5}\right|\le\left|\frac{2^{10n+5}\tilde{M}\left(\tilde{M}+1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}-\frac{2^{10n+5}M(M+1)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}\right|=$$

$$=\frac{2^{10n+5}}{(10n+7)(10n-1)}\left|\left(M+\Delta\tilde{M}\right)\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{2n+1}-M(M+1)^{2n+1}\right|=$$

$$=\frac{2^{10n+5}\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}\cdot\left|\left(M+\Delta\tilde{M}\right)-M\left(\frac{M+1}{M+\Delta\tilde{M}+1}\right)^{2n+1}\right|=$$

$$=\frac{2^{10n+5}\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}\cdot\left|M+\Delta\tilde{M}-M\left(1-\frac{\Delta\tilde{M}}{M+\Delta\tilde{M}+1}\right)^{2n+1}\right|\le$$

$$\le\frac{2^{10n+5}\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{2n+1}}{(10n+7)(10n-1)}.$$

Аналогичные выражения имеем и в случаях $N+1=5n+1$, $N+1=5n+2$, $N+1=5n+3$ и $N+1=5n+4$. Таким образом получаем оценку

$$\Delta\tilde{C}_{n+1}\le\frac{2^{n+1}\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(n+1)/5]}}{(n+3)(n-5)}.$$

Разделяя целые и дробные степени в выражении Δ_3, имеем:

$$\Delta_3=\sum_{n=5}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_n\right|\cdot\left|\left(\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right)^{(n-1)/2}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{2n-1}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{n-1}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{2n}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{(2n-1)/2}=\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-5+2t}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-4+2t}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{(10k-5+2t)/2}\le$$

$$\le\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-5+2t}\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-4+2t}\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{(10k-5+2t)/2}=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}2^{2t}\left(\Delta\tilde{M}+1\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-5}\left(M+\Delta\tilde{M}+1\right)^{[(10k-5+2t)/5]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}\left|\left|\tilde{x}^*-x\right|+\Delta\tilde{x}^*\right|^{5k-3+t}+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-4}\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^{[(10k-4+2t)/5]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}\left\|\widetilde{x}^*-x\right|+\Delta\widetilde{x}^*\Big|^{(10k-5+2t)/2}\Bigg)\le$$

$$\le\frac{2^6\left(\Delta\widetilde{M}+1\right)\mu\beta^2}{1-2^{10}\mu^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{2i}\mu^{\gamma_1}\beta^i+2\beta^{1/2}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

где $\beta=\begin{cases}\left|\widetilde{x}^*-x\right|, x\in(5)\\ \Delta\widetilde{x}^*, x\in(6)\end{cases}$, $\mu=M+\Delta\widetilde{M}+1$, $\gamma_1=\begin{cases}0, i=0,1,2\\ 1, i=3,4\end{cases}$, $\gamma_2=\begin{cases}0, i=0,1\\ 1, i=2,3,4\end{cases}$.

Рассматриваемые в работе ряды являются сходящимися в областях

$$\widetilde{x}^*-\rho_0<x\le\widetilde{x}^*-\Delta\widetilde{x}^* \text{ и } \widetilde{x}^*-\Delta\widetilde{x}^*<x\le\widetilde{x}^*,$$

где $\left|\widetilde{x}^*-x^*\right|\le\Delta\widetilde{x}^*$ и $\rho_0=\min\left\{\frac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}},\frac{1}{8\left(M+\Delta\widetilde{M}+1\right)^2}\right\}$.

Замечание 1. Теорема 3 справедлива в области

$$\widetilde{x}^*+\Delta\widetilde{x}^*\le x<\widetilde{x}^*+\rho_0, \tag{7}$$

$$\widetilde{x}^*\le x<\widetilde{x}^*+\Delta\widetilde{x}^*. \tag{8}$$

При этом пункт 3 теоремы примет вид $x^*\le\widetilde{x}^*$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи (1)-(4) в случае $r(x)=0$ при начальных данных $y(0{,}5)=1$, $y'(0{,}5)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\alpha=0{,}0001$. Величина возмущения не превышает $\varepsilon=0{,}8\cdot10^{-3}$.

Данная задача имеет точное решение $y=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-2x}}$. Найдем радиус окрестности подвижной особой точки $\rho_0\approx0{,}0312497$. Точное значение подвижной особой точки $x^*=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Произведем расчет в случае $\widetilde{x}^*=1{,}366025$, $\Delta\widetilde{x}^*=0{,}0000004$, значение аргумента $x=1{,}34$ и структуры приближенного решения $\widetilde{y}_{12}$. Результаты представлены в таблице.

Таблица.

Сравнительный анализ погрешностей приближенного решения

Comparative analysis of the approximate solution error

x	y	$\widetilde{y}_{12}$	Δy	$\Delta\widetilde{y}_{12}$	$\Delta_1 y$
1,34	5,768549	5,768594	0,000045	0,059	0,0008

где $\widetilde{y}_{12}$ – приближенное решение (4); y – значение точного решения; $\Delta\widetilde{y}_{12}$ – оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме; Δy – абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{y}_{12}$; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности. В нашем случае для $N = 25$ априорная оценка будет удовлетворять требуемой точности $\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$. Добавки в структуре приближенного решения для $N = 13,\ldots,25$ не превышают требуемой точности. Поэтому в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Заключение

В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в вещественной области.

Список литературы
References

1. Axford R. A. 1970. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion. Los Alamos Report. (LA-4517, UC-34).
2. Hill J. M. 1977. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings. International Journal of Solids and Structures, 13: 93-104.
3. Kalman R. 1961. New results in linear filtering and predication theory. Journal of Basic Engineering (American Society of Mechanical Engineers Trans.), 83D: 95-108.
4. Ockendon J. R. 1978. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. Proceedings of Symposium on Moving Boundary Problems edited by D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs, New York: 129-145.
5. Shi M. 2005. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem. Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. 34 (1): 17-24.
6. Bakhvalov N. S. 1970. Numerical methods. M., Nauka, 632.
7. Berezin I. S., Zhidkov N. P. 1960. Methods of calculation: in 2 v. M., Fizmatgiz.
8. Fil'chakov P. F. 1970. Numerical and graphical methods of applied mathematics. Kiev, Naukova dumka, 800.
9. Erugin N. P. 1967. Analytical theory and the real problems of the theory of differential equations associated with the first method and the analytic theory. Differentsial'nye uravneniya, 3 (11): 1821–1864.
10. Kondratenya S. G., Prolisko E. G., Shilo T. I. 1988. On the question of the existence of polar solutions of first order differential equations. Differentsial'nye uravneniya, 24 (10): 1824–1826.
11. Lukashevich N. A. 1995. The simplest differential equation of the third order of P-type. Differentsial'nye uravneniya, 31 (6): 955–961.
12. Matatov V. I., Sabynich L. V. 1991. On mobile features of autonomous Hamiltonian systems. Vestnik Belorusskogo universiteta. Seriya 1, Minsk, 8. Dep. v VINITI 09.04.91, № 1532-V91.
13. Samodurov A. A. 1983. On the integrability of Abel differential equation in parametric form. Vestnik Belorusskogo universiteta. Seriya 1, 2: 57–59.
14. Chichurin A. V., Shvychkina E. N. 2014. On the integrability of a third-order system, the equivalent equation of Chazy six fixed poles. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 4 (22): 176–187.
15. Yablonskiy A. I. 1964. The asymptotic expansion of the right solutions of certain classes of differential equations. Doklad AN BSSR, 8 (2): 77 80.
16. Orlov V.N. 2006. Criteria for the existence of mobile singular points of solutions of differential equations of Riccati. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno nauchnaya seriya, 6/1 (46): S. 64–69.
17. Orlov V.N. 2008. The approximate solution of the first Painlevé equation. Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva, 2: 42–46.
18. Orlov V.N. 2008. A method for the approximate solution of matrix differential Riccati equations. Vestnik MAI, 15 (5): 128–135.
19. Orlov V.N. 2009. A study of the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of a movable singular point. Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki, 4 (35): 102–108.
20. Orlov V. N., Leont'eva T. Yu. 2013. The influence of perturbation of the initial data on the approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in the analyticity region. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 3 (17): 103–109.
21. Orlov V. N., Leont'eva T. Yu. 2013. Construction of the approximate solution of a nonlinear second-order differential equation in the region of holomorphy. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki, 4 (80): 156–162.
22. Orlov V. N., Leont'eva T. Yu. 2014. Construction of the approximate solution of a nonlinear second-order differential equations in the neighborhood of a movable singular point in a complex region. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 4 (22): 157–166.