УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE EIGENVALUES OF A DIFFERENTIAL OPERATOR WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

А.Н. Шелковой
A.N. Shelkovoj

Воронежский государственный технический университет, Россия, 394016, г. Воронеж, Московский пр-т, 14
Voronezh State Technical University, 14, Moskovskii av., Voronezh, 394016, Russia

E-mail: shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями методом подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра и сходимости спектральных разложений дифференциального оператора.

Resume. We use the method of similar operators to study the spectral properties of a second order differential operator with non-local boundary conditions. We obtain results on the asymptotic behavior of the spectrum of such operators and convergence of the corresponding spectral decompositions.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

Key words: operator spectrum, differential of second order operator, spectrum asymptotic, method of similar operators.

Введение

Пусть $L_2[0,2\pi]$ - гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$.

Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{x\in L_2[0,2\pi]: x'$ абсолютно непрерывна, $x''\in L_2[0,2\pi]\}$. Рассматривается дифференциальный оператор $L:\ D(L)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi]$, задаваемый дифференциальным выражением вида

$$(Lx)(t)=-\ddot{x}(t)+x(t)-\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\dot{x}(t_k), \tag{1}$$

где a_k - функции из $L_2[0,2\pi]$, $t_k\in[0,2\pi]$, $k=\overline{1,n}$, с областью определения $D(L)=\{x\in W_2^2[0,2\pi], x(0)=x(2\pi), \dot{x}(0)=\dot{x}(2\pi)\}$.

В частности, такого класса (случай $n=2$) оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,2\pi]$, задаваемого выражением

$$Ly=-\ddot{y}+y \tag{2}$$

и начальными краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0)=y(2\pi)+\int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt, \\ \dot{y}(0)=\dot{y}(2\pi)+\int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0,2\pi]$.

Для исследования спектра оператора L рассмотрим сопряженный ему оператор L^* (см. [5]), который задается дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t)=-\ddot{x}(t)+x(t)-[\dot{x}(2\pi)a_0(t)-x(2\pi)a_1(t)] \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0)=x(2\pi), \\ \dot{x}(0)=\dot{x}(2\pi). \end{cases} \tag{5}$$

В настоящей статье для исследования спектральных свойств рассматриваемого класса применяется вариант метода подобных операторов, позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемых операторов.

Приведем основные определения и теоремы метода подобных операторов.

Пусть H - бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 1. *Два оператора $A_i : D(A_i)\subset H\to H$, $i=1,2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $V\in End\, H$ (т. е. $V^{-1}\in End\, H$, $End\, H$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H), такой, что $VD(A_2)=D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1Vx=VA_2x$, $x\in D(A_2)$. Оператор V называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2.*

Определение 2. *Линейный оператор $C : D(C)\subset H\to H$ называется подчиненным оператору $A : D(A)\subset H\to H$, если выполнены следующие два условия:*

1) $D(C)\supseteq D(A)$;

2) существует постоянная $M>0$, такая, что

$$\|Cx\|\le M(\|Ax\|+\|x\|) \quad \forall x\in D(A).$$

Определение 3. *Тройка* (U, J, Γ), $J : U \to U$, $\Gamma : U \to End\, H$, *называется допустимой для оператора* A, *а* U *- допустимым пространством возмущений, если:*

1) U *- банахово пространство (со своей нормой* $\|\cdot\|_*$*), непрерывно вложенное в банахово пространство* $L_A(H)$ *линейных операторов, подчиненных оператору* A*;*

2) J, Γ *- трансформаторы (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);*

3) $(\Gamma X)x \in D(A)$ $\forall x \in D(A)$ *и имеет место равенство:*

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX,\ X \in U,$$

(равенство понимается как равенство элементов из U*);*

4) $X\Gamma Y, (\Gamma Y)X \in U,\ X, Y \in U$, *и существуют постоянные* $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, *такие, что* $\|\Gamma\| \le \gamma_1$ *и* $\max\left\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\right\} \le \gamma_2 \|X\|_* \|Y\|_*$*;*

5) *выполнены условия:*

а) $\operatorname{Im} \Gamma X \subset D(A)$ *и* $A\Gamma X \in End\, H$ *или*

б) $\forall X \in U$ *и* $\forall \varepsilon > 0$ *существует число* $\nu_\varepsilon \in \rho(A)$ *(* $\rho(A)$ *- резольвентное множество оператора* A*), такое, что* $\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon$, *где* $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Xx\|$ *- норма оператора в* $End\, H$*;* $R(\nu_\varepsilon, A) = (A - \nu_\varepsilon I)^{-1}$.

Здесь $\operatorname{Im}\Gamma X$ - образ оператора ΓX. Непрерывность вложения банахова пространства U в $L_A(H)$ означает, что существует постоянная $M_0 > 0$, такая, что $\|B\|_A \le M_0 \|B\|_*$ $\forall B \in U$. Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ - нормальный оператор (см., например, [19]) (частный случай нормального – самосопряженный оператор), т. е. $D(A) = D(A^*), \|Ax\| = \|A^* x\|, x \in D(A)$, спектр которого представим в виде:

$$\sigma(A) = \bigcup_{j \ge 1} \sigma_j,\ 0 \overline{\in} \sigma(A),$$

где $\sigma_j, j \ge 1$, - взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что

$$dist(0, \sigma_1) < dist(0, \sigma_2) < \ldots,\ \lim_{n\to\infty} dist(0, \sigma_n) = \infty.$$

Пусть $P_j, j \ge 1$, - проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j, $A_j = AP_j, j = 1, 2, \ldots,\ A_j \in End\, H,\ |\sigma_j| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma_j} |\lambda|$. В качестве пространства возмущений U рассматриваются операторы $B : D(A) \subset H \to H$, допускающие представление

$$B = B_0 A,\ B_0 \in \sigma_2(H)$$

(здесь $\sigma_2(H)$ - идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, с нормой $\|\cdot\|_2$), причем существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $\{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеет место оценка:

$$\|P_j B_0 P_i\| \le c \cdot \alpha_j \cdot \beta_i,\ i,\ j = 1, 2, \ldots,$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в U. Пусть n – некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ - проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n.

Положим $Q_1 = Q_{1n} = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, $Q_2 = Q_{2n} = I - Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n : U \to U$, $\Gamma_n : U \to \sigma_2(H), n \ge 1$, определяются следующим образом:

$$J_n X = Q_1 X Q_1 + Q_2 X Q_2,$$

$$\Gamma_n X = \Gamma_n^{(1)} X + \Gamma_n^{(2)} X,$$

где

$$\Gamma_n^{(1)} X = \sum_{m \ge n+1} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k), \quad \Gamma_n^{(2)} X = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \ge 1} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k).$$

На операторных блоках $P_m X_0 P_k A$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения

$$A P_m Y_{0mk} - Y_{0mk} A P_k = P_m X_0 P_k,$$

удовлетворяющее условию

$$P_m Y_{0mk} P_k = Y_{0mk},$$

где $k \ge n+1$, $m \le n$ либо $k \le n$, $m \ge n+1$. Для всех остальных значений m и k полагается $\Gamma_n(P_m X_0 P_k A) = 0$.

Теорема 1. *Пусть n – натуральное число, такое, что*

$$\gamma_1(n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \ge n+1} \frac{|\sigma_k|^2 \beta_k^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_k^2 |\sigma_m|^2}{\left(dist(\sigma_m, \sigma_k)\right)^2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{ \max_{j \le n} \left\{ \sum_{k \ge n+1} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist(\sigma_j, \sigma_k)} \right\}, \sup_{j \ge n+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist(\sigma_j, \sigma_k)} \right\} \right\} < \infty,$$

причем выполнено условие

$$2\max\{\gamma_1(n), \gamma_2(n)\} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1,$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, где $X^*(n) \in U$ имеет вид:

$$X^*(n) = X^*_{11}(n) + X^*_{12}(n) + X^*_{21}(n) + X^*_{22}(n), \quad (6)$$

где $X^*_{ij}(n) = Q_i X^*(n) Q_j,\ i, j = 1, 2,$ *есть решение системы уравнений*

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij}\Gamma X_{ji} + B_{ii},\ (i=1,\ j=2) \vee (i=2,\ j=1); \\ X_{ij} = F_{ij}\left(X_{ij}\right), \end{cases} \quad (7)$$

где оператор $F_{ij} : U_{ij} \to U_{ij}$ *задается формулой*

$$F_{ij}(X) = B_{ii}\Gamma X - (\Gamma X) B_{jj} - (\Gamma X)\left(B_{ji}\Gamma X\right) + B_{ij},$$

$B_{ij} = Q_i B Q_j,\ i, j = 1, 2,$ *- блоки оператора* $B \in U$, *являющегося возмущением оператора* A, *допустимое пространство возмущений* U *является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида*

$$U_{ij} = \left\{Q_i X Q_j,\ X \in U\right\},\ i, j = 1, 2.$$

Оператор преобразования подобия имеет вид $I + \Gamma_n X^*(n)$.

Теорема 2. *Пусть операторы* A *и* $B \in U$ *таковы, что* $\gamma_1(n) \to 0, \gamma_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, начиная с некоторого* n_0, *оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - J_n X^*(n), n \ge n_0$, *где* $X^*(n)$ *представим в виде (6), и* $\left\|P(\Delta_n, A) - P\left(\Delta_n, A - B\right)\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем*

$$\Delta_n = \sigma\left(\left(A - J_n X^*(n)\right)\middle| P(\Delta_n, A) H\right) \subset \sigma(A - B),$$

где $P\left(\Delta_n, A - B\right)$ *- проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* Δ_n *оператора* $A - B$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда*

$$\left\|\left(I - P\left(\Delta_n, A - B\right)\right)x - \sum_{i \ge n+1} P_i X\right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

для любого фиксированного $x \in H$.

Основные результаты

Перейдем к исследованию основных свойств оператора $L:\ D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, задаваемого выражением (1). Методом исследования оператора L является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-16]. Представим его в виде $Lx = Ax - Bx$, где A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x} + x$,

$$D(A) = \left\{x \in L_2[0, 2\pi]:\ x, \dot{x} \in C[0, 2\pi],\ \ddot{x} \in L_2[0, 2\pi],\right.$$

$$\left. x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\right\}, \quad (8)$$

с краевыми условиями (5) и

$$(Bx)(t)=\dot{x}(2\pi)a_0(t)-x(2\pi)a_1(t),\ t\in[0,2\pi],\ x\in D(A). \tag{8}$$

Оператор A - самосопряженный оператор с дискретным спектром, собственное значение которого $\lambda_0=1$ является простым, а остальные собственные значения $\lambda_n=n^2+1,\ n\geq 1,$ двукратны; собственные функции оператора $A,$ отвечающие этим собственным значениям, $e_0(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$ $e_{2n-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,$ $e_{2n}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ n\in N,$ где N - множество натуральных чисел, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$ (см., например, [1]). Положим $\Delta_1(n)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\},$ $P_n=P(\Delta_1(n),A),$ $P_j=P(\lambda_j,A)$ - проектор Рисса, $j=1,2,\ldots.$

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $Lx=Ax-Bx,$ мы получим следующие результаты.

Теорема 3. *Оператор $B:D(A)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi],$ задаваемый соотношением (8), представим в виде*

$$B=B_0A, \tag{9}$$

где $B_0\in\sigma_2(L_2[0,2\pi])$ ($\sigma_2(L_2[0,2\pi])$ - идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$), и

$$\|P_iB_0P_j\|\leq\alpha_i\beta_j,\ i,j=0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

где P_j - проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\sigma_j=\{j^2+1\},$ ($P_jx=(x,e_{2j-1})e_{2j-1}+(x,e_{2j})e_{2j},\ j\neq 0,\ (\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2[0,2\pi]$),

$$\begin{cases}\alpha_0=\sqrt{\dfrac{|a_0^0|^2+|a_1^0|^2}{2}};\ \beta_0=1;\\ \alpha_i=\sqrt{|a_{0i}^{\sin}|^2+|a_{0i}^{\cos}|^2+|a_{1i}^{\sin}|^2+|a_{1i}^{\cos}|^2};\ \beta_j=\dfrac{j}{j^2+1},\ i,j=1,2,\ldots;\end{cases} \tag{11}$$

$$a_0^0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)dt;\ a_1^0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)dt;$$

$$a_{0i}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\sin itdt;\ a_{0i}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\cos itdt;$$

$$a_{1i}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\sin itdt;\ a_{1i}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\cos itdt.$$

Теорема 4. *Пусть для любых функций a_0 и a_1, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0,2\pi]$, для последовательностей величин γ_1 и γ_2, определенных формулами*

$$\gamma_1(n)=\left(\frac{\alpha_0^2\beta_n^2\left(n^2+1\right)^2+\alpha_n^2\beta_0^2}{n^4}+\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{\alpha_m^2\beta_n^2\left(n^2+1\right)^2+\alpha_n^2\beta_m^2\left(m^2+1\right)^2}{\left|n^2-m^2\right|^2}\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\frac{\alpha_n\beta_n\left(n^2+1\right)}{2n-1};\ \frac{\alpha_0\beta_0}{n^2}+\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{\alpha_m\beta_m\left(m^2+1\right)}{\left|n^2-m^2\right|}\right\}<\infty,$$

выполнены условия:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\ \lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

Тогда спектр $\sigma(A-B)$ оператора $A-B$ представим в виде

$$\sigma(A-B)=\bigcup_{n\geq 1}\tilde{\sigma}_n,$$

где $\tilde{\sigma}_n, n\geq 1,$ - не более чем двухточечное множество, и пусть $\tilde{\lambda}_n$ - взвешенное среднее собственных значений из $\tilde{\sigma}_n$. Тогда имеет место оценка:

$$\Bigg|\tilde{\lambda}_n-\left(n^2+1\right)+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(na_{0n}^{\sin}\left(1+\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^m ma_{0m}^{\sin}}{n^2-m^2}\right)-a_{1n}^{\cos}\left(1+\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^{m+1}a_{1m}^{\cos}}{n^2-m^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(na_{1n}^{\sin}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^{m+1}a_{0m}^{\cos}}{n^2-m^2}-a_{0n}^{\cos}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^m ma_{1m}^{\sin}}{n^2-m^2}\right)\right)\Bigg|\leq$$

$$\leq\frac{n\gamma_2(n)\sqrt{\left|a_{0i}^{\sin}\right|^2+\left|a_{0i}^{\cos}\right|^2+\left|a_{1i}^{\sin}\right|^2+\left|a_{1i}^{\cos}\right|^2}}{\sqrt{D(n)}},$$

где $D(n)=\left(1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n)\right)^2-4\gamma_1(n)\gamma_2(n), n\geq 1.$

Также справедлива оценка:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\left(\tilde{P}_n x\right)(t)-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt\right)\cos nt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}x(t)\sin ntdt\right)\sin nt\right|^2dt\right)^{1/2}\leq\frac{2\gamma_1(n)}{\sqrt{D(n)}+1-3\gamma_1(n)-\gamma_2(n)},\ n\geq 1,$$

где $\tilde{P}_n$ - проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\tilde{\sigma}_n$ оператора $A-B$.

Здесь $a_{0j}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\cos jtdt;\ a_{1j}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\cos jtdt;$

$a_{0j}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\sin jtdt;\ a_{1j}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\sin jtdt,\ j=1,2,\ldots,$ - коэффициенты Фурье функций

$a_0(t)$ и $a_1(t)$ по системе собственных функций оператора A.

Лемма. *Для последовательностей γ_1 и γ_2, заданных формулами*

$$\gamma_1(n)=\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{k\geq n+1}\frac{|\lambda_k|^2\beta_k^2\alpha_m^2+\beta_m^2\alpha_k^2|\lambda_m|^2}{|\lambda_m-\lambda_k|^2}\right)^{1/2}<\infty, \tag{12}$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max_{j\leq n}\left\{\sum_{k\geq n+1}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\},\sup_{j\geq n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\}\right\}<\infty, \tag{13}$$

выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\ \lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

На основе приведенной выше леммы сформулируем утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1).

Теорема 5. *Пусть функции $a_0, a_1\in L_2[0,2\pi]$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0, оператор $A-B$ подобен оператору $A-J_nX^*(n)$, $n\geq n_0$, где $X^*(n)$ представим в виде (6), и $\left\|P(\Delta_1(n),A)-P(\tilde{\Delta}_1(n),A-B)\right\|\to 0$ при $n\to\infty$.*

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж, Изд-во ВГУ, 165.
Baskakov A.G. 1987. Harmonic analysis of linear operators. Voronezh, Publicher hause VSU, 165 .
2. Баскаков А.Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. мат. журн, 24 (1): 21-39.
Baskakov A.G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J. , 24 (1): 21-39.
3. Баскаков А.Г. 1986. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. Изв. АН СССР, 50(3): 435-457.
Baskakov A.G. 1987. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. Mathematics of the USSR – Izvestya, 28(3): 421-444.
4. Баскаков А.Г. 1994. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов. Изв. РАН. Сер. матем. , 58(4): 3-32.
Baskakov A.G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 45(1): 1-31.
5. Баскаков А.Г., Кацаран Т.К. 1988. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями. Дифференц. уравнения, 24(8): 1424-1433.
Baskakov A.G. Katsaran T.K. 1988. Spectral analysis of integro-differential operators with non-local boundary conditions. Differ. Equations, 24(8): 1424-1433.
6. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. 2011. Метод подобных операторов в спектральныом анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. Изв. РАН. Сер. матем, 75(3): 3-28.
Baskakov A.G., Derbushev A.V., Sherbakov A.O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izvestiya: Mathematics, 75(3): 445-469.
7. Баскаков А.Г., Диденко В.Б. 2015. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами. Дифференц. уравнения, 51(3): 323-338.
Baskakov A.G., Didenko V.B. 2015. Spectral analysis of differential operators with periodic unbounded coefficients. Differ. Equations, 51.(3): 323-338.

8. Баскаков А.Г. 2015. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений. Мат. сборник, 205(8): 23-62.

Baskakov A.G. 2015. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations. Sbornik: Mathematics, 206(8): 1049-1086.

9. Ульянова Е.Л. 1998. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 100.

Ul'yanova E.L. 1998. Spectral analysis of the normal operators with perturbed relatively finite-dimensional: dis. ... cand. sci. sciences.Voronezh, 100.

10. Ускова Н.Б. О спектре некоторых классов дифференциальных операторов / Н.Б. Ускова // Дифференц. уравнения. - 1994. – Т. 30. - № 2. – С. 350-352.

Uskova N.B. About a spectrum of some differential operators classes / N.B. Uskova // Differ. Equations. - 1994. - V. 30. - № 2. - P. 350-352.

11. Ускова Н.Б. 1997. Об оценках спектральных разложений собственных векторов некоторых классов дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 33 (4): 564-566.

Uskova N.B. 1997. About estimates for spectral decompositions of own vectors of some differential operators classes. Differ. Equations, 33(4): 564-566.

12. Ускова Н.Б. 2000. Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов. Сиб. мат. журн, 41.(3): 712-721.

Uskova N.B. 2000. On estimates for spectral projections of perturbed selfadjoint operators. Siberian Mathematical Journal, 41(3): 592-600.

13. Ускова Н.Б. 2004. К одному результату Р. Тернера. Мат. заметки, 76(6): 905-917.

Uskova N.B. 2004. On a Result of R. Turner. Mathematical Notes, 76(6): 844-854.

14. Ускова Н.Б. 2015. О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом. Уфим. мат. журн. - 2015. – Т. 7. - № 3. – С. 88-99.

Uskova N.B. 2015. On spectral properties of Stourm-Liouville operator with matrix potential. Ufa Mathematical Journal, 7 (3): 84-94.

15. Поляков Д.М. 2015. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами. Сиб. мат. журн, 56(1): 165-184.

Polyakov D.M. 2015. Spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator with nonsmooth coefficients. Siberian Mathematical Journal, 56(1): 138-154.

16. Поляков Д.М. 2015. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора четвертого порядка. Дифференц. уравнения, 51(3): 417-420.

Polyakov D.M. 2015. The method of similar operators in the spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator. Differ. Equations, 51(3): 417-420.

17. Шелковой А.Н. 2004. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 144 с.

Shelkovoj A.N. 2004. Spectral analysis of differential operators with non-local boundary conditions: dis. ... cand. sci. sciences. Voronezh, 144.

18. Шелковой А.Н. 2003. Об асимптотике собственных значений и равносходимости спектральных разложений дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: тр. конф., Воронеж, 30 июня – 4 июля, Воронеж, 233.

Shelkovoj A.N. 2003. About the asymptotic behavior of own meanings and equiconvergence of the corresponding spectral decompositions of a second order differential operator with non-local boundary conditions. Modern problems of the functional analysis and differential equations: conf. works, Voronezh, on June 30 - on July 4, 233.

19. Данфорд Н., Шварц Д.Т. 1974. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. М.,Мир, 661.

Danford N. Schwartz J.T. 1971. Linear operators. V. III: Spectral operators. Intersci. Publ., New York – London, 661.

20. Наймарк М.А. 1969. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 528.

Naymark M.A. Linear differential operators. M., The Science, 528.