МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР «БАБСТОНОВ» В АТМОСФЕРЕ

MODELING THE OCCURRENCE OF FRACTAL STRUCTURES "BUBSTONS" IN THE ATMOSPHERE

Т.С. Кумыков
T.S. Kumykov

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации»
360004, Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 [а]

Federal state scientific institution «Institution of Applied Mathematics and Automation»
89a Shortanova St., Nalchik,360004, Russia

E-mail:macist20@mail.ru;

Аннотация. Предложена упрощенная математическая модель возникновения фрактальных структур «бабстонно-кластерной» фазы в облачной среде. Выявлен порог смены броуновской коагуляции на более мощный механизм - гравитационной коагуляции, которая сопровождается бурным выделением крупных «бабстонов» из капель.

Resume. The paper proposed a simplified mathematical model of the emergence of fractal structures "bubbston-cluster phase in the cloud. The revealed threshold shifts of Brownian coagulation on a more powerful mechanism - gravitational coagulation, which is accompanied by rapid evolution of a large "bubston" from the drops.

Ключевые слова: фрактальная структура, бабстон, броуновская коагуляция.
Key words: fractal structure, Bubston, Brownian coagulation.

Введение

Известно, что с одной стороны агрегация частиц дисперсной фазы с образованием кластеров разнообразной пространственной структуры существенно влияет на физические свойства дисперсных систем [1], с другой стороны эти частицы могут образовывать структуры, называемые фрактальными кластерами (ФК) [2, 3]. Интерес к ФК обусловлен тем, что они являются весьма распространенными природными объектами. Поэтому изучение процессов кластеризации дисперсных частиц, определяющих степень участия в атмосферных процессах, является актуальной проблемой.

В [4] была впервые предложена и теоретически обоснована модель, представляющая долгоживущие микронеоднородности в водных ионных растворах как бабстонные кластеры. Там же был введен термин «бабстон» (аббревиатура от англ. bubble, stabilized by ions) для обозначения стабильных нанопузырьков, спонтанно возникающих при нормальных условиях в жидкостях, насыщенных растворенным газом и содержащих ионную компоненту. Присутствие бабстонов и их кластеров в водных средах существенно влияет на их физические свойства, снижая пороговые значения разного рода явлений [5]. Например в области давлений, несколько превышающих давление насыщения, реологические и релаксационные свойства газожидкостных систем во многом определяются наличием «зародышей» - мельчайших газовых «пузырьков»-«бабстонов».

Наличие большого количества «бабстонов» присутствующие в водных растворах, могут играть существенную роль в геофизических процессах, связанные с возникновением больших разностей потенциалов при кристаллизации капель.

В данной работе рассматривается формирование фрактальной структуры бабстонно-кластерной фазы в облачной среде.

Постановка и решение задачи

В работе [6] было отмечено, что поскольку бабстонные кластеры формируются вследствие диффузионно-контролируемой агрегации, можно заключить, что образующиеся в таком процессе кластеры являются фракталами - объектами нецелой размерности.

Полагая, что такие кластеры могут формироваться в облачных структурах, которые имеют фрактальную природу, рассмотрим коагуляцию «бабстонов», когда первоначально дисперсная система (облачная капля) содержит газовые зародыши одинакового размера с концентрацией n_0.

Первичные «бабстоны», сталкиваясь, дают двойные частицы, которые, в свою очередь, соприкасаясь друг с другом или с оставшимися в системе одиночными пузырьками, образуют тройные и четверные «бабстоны», а затем появляются пятерные, шестерные и т.д..

Обозначим число одиночных «бабстонов» в единице объема через n_1, а число двойных, тройных и т.д. через n_2, n_3, и т.д. В начальный момент времени $n_1 = n_0 . n_2 = n_3 = \ldots = 0$. Через некоторое время в системе появляются двойные, тройные и т.д. «бабстоны».

Если рассматривать столкновение между «бабстонами» i-ой и j-ой кратности, то число соприкосновений между ними в единице объема за 1 сек будет равно

$$Z_{ij} = 4\pi R_{ij} D_{ij} n_i n_j , \tag{1}$$

где $D_{ij} = D_i + D_j = \dfrac{kT}{4\pi\eta}\left(\dfrac{1}{r_i}+\dfrac{1}{r_j}\right), R_{ij} = r_i + r_j,$ а r_i и r_j - радиусы «бабстонов», состоящих из i и из j первоначальных «бабстонов», соответственно. При столкновении i-го пузырька с j-м образуются «бабстоны» категории k ($k = i + j$).

Эти k-ые «бабстоны» получаются только при столкновении «бабстонов» категории $i-1$ с $j+1$, $i-2$ с $j+2$ и т.д. до $i=1$ и $j=k-1$. Таким образом, прирост числа «бабстонов» k-ой категории в одиночном объеме за 1 сек за счет столкновения «бабстонов» составляет:

$$\left(\frac{dn_k}{dt}\right)_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=k \\ i=1,2,..k-1 \\ j=1,2,..k-1}} 4\pi R_{ij} D_{ij} n_i n_j$$

Здесь множитель $\frac{1}{2}$ поставлен из-за того, что при суммировании каждое слагаемое учитывается дважды.

Далее, все k -ые «бабстоны», сталкиваясь с любым другим «бабстоном», покидают свою категорию, т.е. образуются «бабстоны» более высокой категории. Уменьшение числа «бабстонов» k -ой категории за счет таких столкновений равно

$$\left(\frac{dn_k}{dt}\right)_2 = \sum_{i=1}^{\infty} 4\pi R_{ik} D_{ik} n_i n_k$$

Таким образом, изменение числа «бабстонов» k-ой категории равно

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=k \\ i=1,2,..k-1 \\ j=1,2,..k-1}} 4\pi R_{ij} D_{ij} n_i n_j - \sum_{i=1}^{\infty} 4\pi R_{ik} D_{ik} n_i n_k \tag{2}$$

Интегрирование системы уравнений (2) в общем виде не представляется возможным. Однако, если «бабстоны» имеют близкие размеры, то задача существенно упрощается. Представив D_i в виде $D_i = D_1 \frac{r_1}{r_i}$, можно записать [7]

$$D_{ij} R_{ij} = D_1 r_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_j}\right)(r_i + r_j) = D_1 r_1 \left[4 + \sqrt{\frac{r_i}{r_j}} - \sqrt{\frac{r_j}{r_i}}\right].$$

Если $r_i \approx r_j$, то в этом равенстве разность $\sqrt{\frac{r_i}{r_j}} - \sqrt{\frac{r_j}{r_i}}$ мала по сравнению с 4. Поэтому, можно предположить, что произведение

$$D_{ij} R_{ij} \cong 4 D_1 r_1 = 2 R_1 D_1 ,$$

где D_1 и R_1 - коэффициент диффузии и диаметр первичных «бабстонов», соответственно.
Уравнение (2) при этом принимает вид:

$$\frac{dn_k}{dt} = 4\pi D_1 R_1 \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i=1,2,..k-1 \\ j=1,2,..k-1}} n_i n_j - 2 n_k \sum_{i=1}^{\infty} n_i \right). \tag{3}$$

Мы получаем, таким образом, бесконечную цепочку уравнений относительно n_1, n_2 и т.д. Просуммировав все эти уравнения, получим

$$\frac{d\sum n_k}{dt} = 4\pi D_1 R_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_i n_j - 2 \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sum_{k=1}^{\infty} n_k \right).$$

При $\sum n_i = \sum n_k$, $\sum \sum n_i n_k = \left(\sum n_k\right)^2$, отсюда получаем

$$\frac{d\left(\sum n_k\right)}{dt} = -4\pi D_1 R_1 \left(\sum n_k\right)^2. \tag{4}$$

Учитывая, что при $t = 0, n_1 = n_0,\ n_2 = 0,\ n_3 = 0$ и т.д., а $\sum n_k = n_0$, его решение можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k = \frac{n_0}{1+\frac{t}{\theta_1}}, \tag{5}$$

где $\theta_1 = \frac{1}{4\pi D_1 R_1 n_0}$ - время коагуляции, т.е. время, в течение которого число «бабстонов» в системе уменьшается вдвое.

В таблице представлены значения θ_1 при различных пересыщениях и $T = 300\,^oK$. Значения n_0 взяты из таблицы 3 работы [8].

Таблица

Table

Значения времени коагуляции при различных пересыщениях раствора

The values of the coagulation time at different supersaturated solution

φ	30	25	20	15	10
θ_1, с$^{-1}$	1.8×10^{-4}	1.5×10^{-3}	3×10^{-2}	4.3	1.7×10^{5}
	3×10^{-5}	1.8×10^{-4}	2.4×10^{-3}	0.13	6×10^{2}

Верхняя строка относится к случаю, когда рост частиц подсчитывался на основе свободно – молекулярного течения, нижняя строка – когда частицы растут за счет диффузионного механизма.

При $k=1$ сумма слева в уравнении (3) равна нулю, $\sum n_i n_j = 0$, (при соприкосновении одиночные «бабстоны» не образуются); $n_k = n_1$, и оно принимает вид

$$\frac{dn_1}{dt} = -8\pi D_1 R_1 \frac{n_0}{1+\frac{t}{\theta_1}} n_1 .$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$n_1 = \frac{n_0}{1+\frac{t}{\theta_1}} . \tag{6}$$

В правой части равенства (5) стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которого определяется равенством (6):

$$\frac{n_1}{1-q} = \frac{n_0}{1+\frac{t}{\theta_1}},$$

где q - знаменатель прогрессии. Отсюда получаем, что $q = \frac{\frac{t}{\theta_1}}{1+\frac{t}{\theta_1}}$.

Далее, зная n_1 и q находим:

$$n_1 = n_0 \frac{\frac{t}{\theta_1}}{\left(1+\frac{t}{\theta_1}\right)^3},\ n_2 = n_0 \frac{\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^2}{\left(1+\frac{t}{\theta_1}\right)^4},\dots\ n_k = n_0 \frac{\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{k-1}}{\left(1+\frac{t}{\theta_1}\right)^{k+1}},\dots \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) дают изменение со временем числа «бабстонов», состоящих из одного, двух, трех и т.д. первоначальных «бабстонов». Радиус «бабстона», принадлежащего i-ой градации, (т.е. состоящего из i первоначальных микропузырьков), определяется уравнением:

$$r_i^3 + \frac{2\sigma}{P_0} r_i^2 - i\left(r_i^3 + \frac{2\sigma}{P_0} r_i^2\right) = 0, \quad i = 2,3,\dots \tag{8}$$

При пересыщениях, $\varphi > 20$, радиус «бабстона» $r_i << \frac{2\sigma}{P_0}$. Тогда из (8) получаем

$$r_i = r_1\sqrt{i}\ .$$

Из таблицы видно, что при $\varphi \geq 20$ по истечении времени $t \approx 10^{-2} c$ отношение $\frac{t}{\theta_1}$ значительно превосходит единицу, следовательно, можем записать:

$$n_1 = n_0\left(\frac{\theta_1}{t}\right)^2,\ n_2 = n_0\left(\frac{\theta_1}{t}\right)^2,\dots\ n_k = n_0\left(\frac{\theta_1}{t}\right)^2,\dots$$

т.е. $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n_0\left(\frac{\theta_1}{t}\right)^2$.

Таким образом, концентрация «бабстонов», принадлежащих различным градациям, по истечении небольшого промежутка времени порядка $10^{-2} - 10^{-1} c$ становятся одинаковыми.

Если обозначить через i число первоначальных одиночных «бабстонов», содержащихся в самом большом пузырьке, то общее число одиночных «бабстонов», сосредоточенных во всех пузырьках, будет равняться

$$n_0\left(1+2+\dots+i\right)\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^2 = n_0\frac{i+1}{2}\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^2 .$$

Приравняв последнее к общему числу «бабстонов» n_0, содержавшихся в системе в начальный момент времени, получаем:

$$i = 2\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^2 - 1\ .$$

Максимальный радиус кластера «бабстонов» при этом будет равняться

$$r_{\max} = r_1\sqrt{i} = r_1\sqrt{2\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^2 - 1} \approx \sqrt{2}r_1\frac{t}{\theta_1},$$

т.е. $r_{\max}$ растет пропорционально времени, как и в случае диффузионного режима роста «бабстонов». Однако такой рост «бабстонов» не может продолжаться сколь угодно долго.

Заключение

В заключении отметим, что крупные «бабстоны» достигающие размеров порядка $10^{-6}-10^{-4}м$, начинают всплывать» быстрее, чем мелкие, захватывая на своем пути последние. Броуновская коагуляция сменяется более мощным механизмом гравитационной коагуляцией, которая сопровождается бурным выделением крупных «бабстонов» из жидкости. Смена механизма происходит после достижения порогового радиуса $r_{\max}$ «бабстоном». Эта стадия процесса требует специального исследования и в будущем представления о бабстонных кластерах в облачных структурах позволят развить новый взгляд на физическую природу разного рода явлений в конвективных облаках.

Список литературы

1. Bunkin N.F., Yurchenko S.O., Suyazov N.V., Starosvetskiy A.V., Shkirin A.V., Kozlov V.A. 2011. Modeling the cluster structure of dissolved air nanobubbles in liquid media. Mathematics Research Developments. Classification and Application of Fractals, Nova Science Publishers, Eds: W. L. Hagen. : 3-52.

2. Смирнов Б.М. 1986. Фрактальные кластеры Успехи физических наук. 149 (2) :.177-217.

Smirnov B. M., 1986. Fractal clusters advances in physical Sciences. 149 (2) : 177-217.

3. Потапов А.А. 2005. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Издательство: Университетская книга. : 848.

Potapov A. A. 2005. Fractals in Radiophysics and radiolocation: Topology of sample. Publisher: University book. : 848.

4. Бункин Ф.В., Бункин Н.Ф. 1992. Бабстоны: стабильные микроскопические газовые пузыри в слабых растворах электролитов ЖЭТФ, 101 (2) : 512-527.

Bunkin, F. V. Bunkin, N. F. 1992. Babstoni: stable microscopic gas bubbles in weak solutions of electrolytes, JETPh., 101 (2) : 512-527.

5. Кумыков Т.С. 2008. Об электрических свойствах дисперсных систем, содержащих пузырьки. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. №6 : 42-44.

Kumykov T. S. 2008. About electrical properties of disperse systems containing bubbles. Izvestiya vuzov. The North Caucasus region. Natural science. No. 6 : 42-44.

6. Бункин Н. Ф., Лобеев А.В. 1993. Фрактальная структура бабстонных кластеров в воде и водных растворах электролитов. Письма в ЖЭТФ, 58(2) : 91 – 97.

Bunkin N. F., A. V. Lobeev 1993. Fractal structure of bubbston clusters in water and aqueous electrolyte solutions. Pis'ma JETPh. 58(2) : 91 – 97.

7. Эйнштейн А., Смолуховский М. 1936. Брауновское движение Сборник статей под ред. Б.И. Давыдова. ОНТИ-Главная редакция общетехнической литературы.: 606.

Einstein A., Smoluchowski, M. 1936. Brown movement a Collection of articles under the editorship of B. I. Davydov. Auntie-the Main edition of technical literature.: 606.

8. Кумыков Т.С. 2012. Математическая модель самопроизвольного образования и роста газовых «бабстонов» критического радиуса в облачных каплях. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 14 (3) : 56-63.

Kumykov T. S. 2012. Mathematical model of spontaneous formation and growth of gas «Babstonov» critical radius of cloud droplets. The reports of the Adyge (Circassian) International Academy of Sciences. 14 (3) : 56-63