УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ЧЕТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

THE SIMILAR OPERATOR METHOD AND SPECTRAL PROPERTIES OF THE DIFFERENCE OPERATOR WITH ORDER POTENTIAL

Г.В. Гаркавенко [1], Н.Б. Ускова [2], А.Р. Зголич [3]
G.V. Garkavenko [1], N.B. Uskova [2], A.R. Zgolich [3]

1) Воронежский государственный педагогический университет,
Россия, 394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

Voronezh State Pedagogical University,
86 Lenina St, Voronezh, 394043, Russia

2) Воронежский государственный технический университет,
Россия, 394026, г. Воронеж, Московский пр-т, 14

Voronezh State Technical University,
14 Moskovsky prospekt, Voronezh, 394026, Russia

3) Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл. 1

Voronezh State Universuty,
1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia

E-mail: g.garkavenko@mail.ru; nat-uskova@mail.ru; arsenij112@mail.ru

Аннотация. Рассматривается разностный оператор, соответствующий оператору Штурма-Лиувилля с растущим четным потенциалом. Получены приближения к собственным значениям и оценки спектральных проекторов, а также равносходимость спектральных разложений. Методом исследования является метод подобных операторов.

Resume. The difference operator which corresponding Sturm-Liouville operator with growing order potential is studied. The asymptotic estimates of eigenvalue, spectral projections and the estimate for uniform absolute equiconvergence of spectral resolutions are obtained. The similar operator method is the method of investigation.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, разностный оператор, спектральные проекторы.
Key words: the similar operator method, spectrum, difference operator, spectral projections.

Введение

Пусть $l_2(\mathbb{Z})$ – гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$. Скалярное произведение в $l_2(\mathbb{Z})$ задается формулой $(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}x(n)\overline{y(n)}, x,y\in l_2(\mathbb{Z}), x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}, y:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$. Норма $\|x\|=(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x(n)|^2)^{\frac{1}{2}}, x\in l_2(\mathbb{Z}), x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, порождается этим скалярным произведением. Рассмотрим линейный замкнутый оператор $\mathcal{E}: D(\mathcal{E})\subset l_2(\mathbb{Z})\to l_2(\mathbb{Z})$,

$$(\mathcal{E}x)(n)=a(n)x(n)+2x(n)-x(n-1)-x(n+1), n\in\mathbb{Z}, x\in D(\mathcal{E}),$$

с областью определения $D(\mathcal{E})\subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(\mathcal{E})=\left\{x\in l_2(\mathbb{Z}): \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a(n)|^2|x(n)|^2<\infty\right\}$$

Здесь $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ последовательность, обладающая свойствами:

1) $a(i) = a(-i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ (последовательность $a: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ чётна);

2) $a(i) \neq a(j)$ при $|i| \neq |j|, i, j \in \mathbb{Z}$;

3) $\lim_{n\to\infty}|a(n)| = \infty$;

4) $0 < d_i = \inf_{j\neq i,\ i,j\geq 0}|a(i) - a(j)| \to \infty$, при $i \to \infty$.

Оператор $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \subset H \to H$ рассматривался в конечномерном случае в [1]. Рассматриваемый класс операторов соответствует операторам Штурма-Лиувилля при их дискретизации [1,2].

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Существует такое целое число $k \geq 0$, что спектр $\sigma(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E}$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{i\geq k} \sigma_i), \tag{1}$$

где множество $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k + 1$ собственных значений, множества $\sigma_i, i > k$ двухточечны, $\sigma_i = \{\mu_i, \mu_{-i}\}$ и приближениями к собственным значениям $\mu_{\pm i}$ являются числа

$$\mu_{\pm i} = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}), i > k, \tag{2}$$

$$\mu_{\pm i} = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i+1)}{\big(a(i+1) - a(i)\big)\big(a(i-1) - a(i)\big)} + O(d_i^{-3}), i > k. \tag{3}$$

Обозначим через $P_n, n \in \mathbb{Z}$, проектор Рисса (спектральный проектор), построенный по двухточечному спектральному множеству $\{a(n), a(-n)\}, n \in \mathbb{Z}$, оператора $A: D(A) = D(\mathcal{E}) \subset H \to H$, задаваемого формулой

$$(Ax)(n) = a(n)x(n) + 2x(n), n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

и $P_0 = P(\{a(0)\}, A)$.

Обозначим символом $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}$, проектор $\widetilde{P}_n = P(\sigma_n, \mathcal{E})$, где множества $\sigma_n, n \in \mathbb{Z}_+$, определены в теореме 1.

Теорема 2. Для спектральных проекторов $\widetilde{P}_i, i > k$, имеют место оценки

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\| = O(d_i^{-1}), i > k, \tag{5}$$

$$\left\|\sum_{i\geq m}^{N} \widetilde{P}_i - \sum_{i\geq m}^{N} P_i\right\| = O(d_m^{-1}), \tag{6}$$

где $m > k, N > m, N \in \mathbb{N}$. Имеют место также следующие оценки равносходимости спектральных разложений

$$\left\|P(\sigma_{(k)}, \mathcal{E}) + \sum_{i>k}^{l} \widetilde{P}_i - \sum_{i=0}^{l} P_i\right\| = O(d_l^{-1}), \tag{7}$$

где $l > k$ и множество $\sigma_{(k)}$ определено в теореме 1.

Методом изучения спектра и спектральных проекторов оператора $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \subset H \to H$ служит метод подобных операторов [3]-[7], который и изложим в следующем параграфе в адаптированном для рассматриваемого оператора виде.

Метод подобных операторов

Метод подобных операторов берет начало с работ А. Пуанкаре, А.А. Ляпунова, Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, К. Фридрихса, Р. Тёрнера и окончательно оформляется в работах А.Г. Баскакова (см, например, [3]-[7]). Метод Р. Тёрнера с точки зрения метода подробных операторов подробно анализировался в [8]. Обычно метод подобных операторов используется в качестве метода исследования спектральных характеристик различных дифференциальных операторов [9]-[15].

В изложении метода будем придерживаться аксиоматического подхода, опираясь на работу [7].

Линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов, будем называть трансформаторами согласно терминологии М.Г. Крейна.

Определение 1 [7]. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset H \to H, i = 1,2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\, H$, такой что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = UA_2 x, x \in D(A_2)$. Оператор $U \in End\, H$ называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2.

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств, которые удобно представить в виде следующей леммы.

Лемма 1 [7]. Пусть $A_i: D(A_i) \subset H \to H, i = 1,2$ – два подобных оператора и $U \in End\, H$ – оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда:

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2), \sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2), \sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i), \sigma_d(A_i), \sigma_c(A_i), \sigma_r(A_i), i = 1,2$ – спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов $A_i, i = 1,2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|_{H_k}, k = 1,2$ – сужение оператора A_2 на $H_k, k = 1,2$ относительно прямой суммы $H = H_1 \oplus H_2$ инвариантных относительно оператора A_2 подпространств H_1 и H_2, то подпространства $\widetilde{H_k} = U(H_k), k = 1,2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|_{\widetilde{H_k}}, k = 1,2$, при этом $H = \widetilde{H_1} \oplus \widetilde{H_2}$. Кроме того, если P – проектор, осуществляющий разложение $H = H_1 \oplus H_2$, т.е. $H_1 = ImP$, $H_2 = Im(I - P)$, то проектор $\tilde{P} \in End\, H$, осуществляющий разложение $H = \widetilde{H_1} \oplus \widetilde{H_2}$ определяется формулой

$$\tilde{P} = UPU^{-1}.$$

Пусть $A: D(A) \subset H \to H$ – замкнутый линейный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, имеющий плотную в H область определения $D(A)$ и непустое резольвентное множество $\rho(A)$.

Спектральные свойства оператора A считаются известными. Основная идея метода подобных операторов состоит в преобразовании подобия возмущенного оператора $A - B$, где $B \in End\, H$, в оператор, спектральные свойства которого легко изучать, потому что они близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора.

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – система ортопроекторов (разложение единицы) из алгебры $End\, H$ со свойствами:

1) $P_i P_j = 0$ при $i \neq j$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}_+$;

2) ряд $A \sum_{n \in Z_+} P_n x$ безусловно сходится к $x \in H$ для любого $x \in H$;

3) из равенств $P_i x = 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ следует, что $x = 0$.

Каждому оператору $X \in End\, H$ поставим в соответствие матрицу $(X_{ij}), i, j \in \mathbb{Z}_+$, составленную из операторных блоков $X_{ij} = P_i X P_j, i, j \in \mathbb{Z}_+$. Введем, согласно [16], понятие диагонали матрицы (X_{ij}) оператора X. А именно, -ой диагональю, где $p \in \mathbb{Z}$, матрицы (X_{ij}) назовем оператор $X_p \in End\, H$, определяемый формулой

$$X_p = \sum_{i-j=p} X_{ij}.$$

Определим двустороннюю числовую последовательность $d_X: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, положив

$$d_X(p) = \|X_p\|.$$

Последовательность $d_X: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ является важной характеристикой убывания элементов матрицы оператора X, лежащих вне главной диагонали. Корректность определения операторов $X_p, p \in \mathbb{Z}$ (безусловная сходимость ряда) доказана в [16].

Если для некоторого оператора X из $End\ H$ выполнено условие

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} d_X(p) < \infty,$$

то оператор X будем называть оператором с суммируемыми диагоналями. Таким образом, этот оператор $X \in End\ H$ представим в виде (см. [16])

$$X = \sum_{p \in \mathbb{Z}} X_p.$$

Операторы с суммируемыми диагоналями образуют подалгебру $End_1\ H$ из алгебры $End\ H$. Если положить

$$\|X\|_1 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} d_X(p),$$

то $End_1\ H$ является банаховой алгеброй.

Важнейшим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 2 [7]. Пусть $J: End_1 H \to End_1 H, \Gamma: End_1 H \to End_1 H$ трансформаторы. Тройку $(End_1 H, J, \Gamma)$ назовём допустимой для невозмущенного оператора A, а $End_1 H$ допустимым пространством возмущений, если:

1) J и Γ – непрерывные трансформаторы, причём J – проектор;

2) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX, X \in End_1 H \tag{8}$$

и $Y = \Gamma X \in End_1 H$ – единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

3) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| \le \gamma, max\{\|X(\Gamma Y)\|_1, \|(\Gamma X)Y\|_1\} \le \gamma\|X\|_1\|Y\|_1$;

4) для любого $X \in End_1 H$ и $\epsilon > 0$ существует $\lambda_\epsilon \in p(A)$ такое, что

$$\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\|_\infty < \epsilon. \tag{9}$$

Теорема 3 [7]. Пусть $(End_1 H, J, \Gamma)$ – допустимая тройка для оператора $A: D(A) \subset H \to H$ и B – некоторый оператор из $End_1 H$. Тогда если

$$4\gamma\|B\|_1 < 1, \tag{10}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$,

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - J_* X),$$

где $X_* \in End_1\ H$ является решением нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{11}$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0, X_1 = B, \ldots$ (Оператор $\Phi: End_1 H \to End_1 H$, определённый правой частью равенства (11) является сжимающим в шаре $\{X \in End_1 H: \|X - B\|_1 < 3\|B\|_1\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in End_1 H$.

Построение допустимой тройки

В этом параграфе и далее $H = l_2(\mathbb{Z})$.Представим оператор $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{E} = A - B$, где оператор $A: D(A) \subset H \to H$ определяется формулой (4) и $(Bx)(n) = x(n+1) + x(n-1), n \in \mathbb{Z}, x \in H$, принадлежит $End_1 H$, причём $\|B\|_1 = 2$.

Заметим, что сопряженный к A оператор $A^*: D(A^*) \subset H \to H$ имеет вид $(A^*x)(n) = \overline{a(n)}x(n) + 2x(n), n \in \mathbb{Z}$, его область определения $D(A^*)$ совпадает с $D(A)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|, x \in D(A)$, поэтому, согласно [17, глава 13] он является нормальным оператором.

Отметим, что все операторы удобно также считать заданными своими матрицами относительно стандартного базиса $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ пространства H, где $e_k(n) = \delta_{nk}, n, k \in \mathbb{Z}$, и δ_{nk} – символ Кронекера. Тогда в качестве дизъюнктивной системы проекторов, образующих разложение единицы, удобно взять систему проекторов $\{P^{(n)}\}, n \in \mathbb{Z}$, где $P^{(n)}x = (x, e_n)e_n, n \in \mathbb{Z},\ x \in H$. Соответствующие спектральные проекторы $P_n, n \in \mathbb{Z}_+$, невозмущенного оператора A на спектральное множество $\sigma_n = \{a(n) + 2\}, n \in \mathbb{Z}_+$ задаются формулой $P_n = P^{(n)} + P^{(-n)}, n \in \mathbb{N}, P_0 = P^{(0)}$ (или, $P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, n > 0, P_0 x = (x, e_0)e_0$).

Перейдём к определению трансформаторов $J: End_1 H \to End_1 H$ и $\Gamma: End_1 H \to End_1 H$. Положим

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n, X \in End_1 H. \tag{12}$$

Очевидно, что трансформатор J диагонализует матрицу оператора X и $JB = 0$ в силу определения оператора B.

Перепишем равенство (8) для матричных элементов матрицы $Y = (y_{lm})$, где $Y = \Gamma X$:

$$a(l)y_{lm} - y_{lm}a(m) = x_{lm}, |l| \neq |m|,$$

откуда

$$y_{lm} = \frac{x_{lm}}{a(l) - a(m)}, |l| \neq |m| \tag{13}$$

и $y_{lm} = 0, |l| = |m|, l, m \in \mathbb{Z}$. Так как $a(l) \neq a(m)$ при $|l| \neq |m|$, то формула (13) корректна. Таким образом матричные элементы оператора $Y = \Gamma X$ определены. При этом $Y \in End_1 H$ и

$$\|Y\|_1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \|Y_p\| \leq (\min_{i\neq j, i,j\geq 0} |a(i) - a(j)|)^{-1} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \|X_p\| = (\min_{i\neq j, i,j\geq 0} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|_1.$$

Пусть $Q_k = \sum_{i\leq k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейство трансформаторов J_k и $\Gamma_k, k \geq 0$, задаваемых формулами

$$J_k X = \sum_{i>k} P_i X P_i + Q_k X Q_k, \tag{14}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - Q_k(\Gamma X)Q_k, k \geq 0, X \in End_1 H. \tag{15}$$

Очевидно, что $J_0 X = JX, \Gamma_0 X = \Gamma X$. Отметим также что операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X, X \in End_1 H$, отличаются от операторов JX и ΓX на оператор конечного ранга. Более того, операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X, X \in End_1 H$ не изменяются, если вместо невозмущенного оператора брать не оператор A, а оператор $A - \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $D(A) = D(A - \lambda_0 I)$.

Можно показать, что имеет место следующая

Лемма 2. Тройки $(End_1 H, J_k, \Gamma_k), k \geq 0$, являются допустимыми для оператора A тройками при любом $k \geq 0$.

Теорема 4. Существует такое число $k \geq 0$, что оператор $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \subset H \to H$ подобен оператору блочно-диагонального вида $A - J_k X_*$, где оператор $X_* \in End_1 H$ есть решение рассматриваемого в

End_1H уравнения (11) с операторами $\Gamma_k, J_k \in End(End_1H)$, определенными формулами (14), (15) и возмущением B.

Доказательство. Осталось проверить выполнение условия (10) теоремы 3. Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\|\Gamma_k X\|_1 \le \sum_{p\in\mathbb{Z}} \|(\Gamma X)_p\| \le (\min_{i,j\in\Omega} |(a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|_1,$$

где $\Omega = \{i, j \ge 0, i \ne j, \max\{i,j\} > k\}$, поэтому $\|\Gamma_k X\|_1 \le d_k^{-1} \|X\|_1$. Так как $d_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то условие (10) выполняется за счет выбора подходящего числа k. Теорема доказана.

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 4 и леммы 1 следует, что $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(A - J_k X_*)$, где X_* - решение уравнения (11) и $\sigma_i = \sigma(A_i), A_i = (a(i) + 2)I - P_i X_*|_{H_i}, H_i = Im\, P_i$ при $i > k$. Таким образом, для асимптотики спектра оператора $\mathcal{E}$ нам нужен оператор $P_i X_*|_{H_i}$. Однако, нам известен не сам оператор $X_* \in End_1 H$, а последовательные приближения к нему, первым из которых $X_{(1)}$ является оператор $X_{(1)} = B$, вторым – оператор $X_{(2)} = B\Gamma_k B - \Gamma_k B J_k B - \Gamma_k B J_k (B\Gamma_k B) + B$. При этом с учётом того, что при всех k и всех $Y, Z \in End_1 H$ $J_k((\Gamma_k Y) J_k Z) = 0, j > k$, получаем $P_i X_{(2)}|_{H_i} = P_i(B\Gamma_k B + B)|_{H_i}, i > k$. Приближения выше второго порядка обычно не используются в методе подобных операторов из-за их громоздкости.

Представим оператор $P_i X_*|_{H_i}, i > k$, в виде $P_i X_*|_{H_i} = P_i B|_{H_i} + P_i(X_* - B)|_{H_i} = P_i(X_* - B)|_{H_i}$, здесь учтено, что $P_i B|_{H_i} = 0$ в силу определения оператора B. Из уравнения (11) следует $X_* - B = B\Gamma_k X_* - \Gamma_k X_* J_k B - \Gamma_k X_* J_k (B\Gamma_k X_*)$, откуда $P_i(X_* - B)|_{H_i} = P_i(B\Gamma_k X_*)|_{H_i}$ и $\left\|P_i B\Gamma_k X|_{H_i}\right\|_1 \le d_i^{-1} \|B\|_1 \|X_*\|_1 = C_1 d_i^{-1}$. Таким образом, оператор A_i имеет диагональный вид с полупростыми собственными значениями кратности 2, $\mu_i = \mu_{-i} = a(i) + 2$ и погрешность приближения не превосходит величины $C_1 d_i^{-1}, i > k$, для некоторой постоянной $C_1 > 0$. Итак, формула (2) установлена. Оценка (3) устанавливается аналогично, если в качестве X_* рассмотреть второе приближение к нему, равное оператору $X_{(2)}$. Также учтено, что блоки $P_i B\Gamma_k B P_i, i \ge k + 1$, двумерны и имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a(i-1)-a(i)} + \frac{1}{a(i+1)-a(i)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(i+1)-a(i)} + \frac{1}{a(i-1)-a(i)} \end{pmatrix},$$

и $P_i\big(B\Gamma_k X_{(2)}\big)|_{H_i} = P_i\big(B\Gamma_k X_{(3)}\big)|_{H_i}, i > k$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для спектральных проекторов $\tilde{P}_i = P(\{\mu_i\}, \mathcal{E}), i > k$, и $\tilde{Q}_k = \sum_{i \le k} \tilde{P}_i$ имеют место формулы

$$\tilde{P}_i = P_i U^{-1} + \Gamma_k X_* P_i U^{-1}, i > k, U = I + \Gamma_k X_*, \tag{16}$$

$$\tilde{Q}_k = Q_k U^{-1} + \Gamma_k X_* Q_k U^{-1}, \tag{17}$$

$$\tilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*) U^{-1}, i > k, \tag{18}$$

$$\tilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_k X_* Q_k - Q_k \Gamma_k X_*) U^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что спектральные проекторы $P_i, i > k$, оператора A и спектральные проекторы $\tilde{P}_i, i > k$, оператора $\mathcal{E}$ связаны равенством

$$\tilde{P}_i = (I + \Gamma_k X_*) P_i (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, i \ge k + 1,$$

откуда и следуют формулы (16), (18). Аналогично получаются формулы (17), (19) для проектора Q_k.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 следует, что

$$\|\tilde{P}_i - P_i\|_\infty \le \|\tilde{P}_i - P_i\|_1 \le C_2(\|\Gamma_k X_* P_i\|_1 + \|P_i \Gamma_k X_*\|_1)\|U^{-1}\|_1, i > k,$$

и $\|P_i \Gamma_k X_*\|_1 = O(d_i^{-1}), i > k$.

Обозначим символом Ω произвольное множество из $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots k\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_n, n \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\Delta, A)$ определим равенством $P_\Delta x = P(\Delta, A)\,x = \sum_{n\in\Omega} P_n x, x \in H$. Аналогично $\tilde{\Delta} = \Delta(\Omega) = \{\mu_n, n \in \Omega\}, \tilde{P}_\Delta x = P(\tilde{\Delta}, \varepsilon)x = \sum_{n\in\Omega} \tilde{P}_n x, x \in H$.

Из подобия операторов $\mathcal{E}$ и $A - J_k X_*$ следуют равенства

$$\tilde{P}_\Delta = (I + \Gamma_k X_*) P_\Delta (I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$

$$\tilde{P}_\Delta - P_\Delta = (\Gamma_k X_* P_\Delta - P_\Delta \Gamma_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{P}_\Delta - P_\Delta\|_\infty \le \|(I + \Gamma_k X_*)^{-1}\|(\|\Gamma_k X_* P_\Delta\|_1 + \|P_\Delta \Gamma_k X_*\|_1).$$

Оператор $(I + \Gamma_k X_*)^{-1}$ ограничен, а нормы $\|\Gamma_k X_* P_\Delta\|_1$ $\|P_\Delta \Gamma_k X_*\|_1$ оцениваются величиной $C(d(\Omega))^{-1}$, где $d(\Omega) = \min_{i\in\Omega} d_i$, поэтому $\|\tilde{P}_\Delta - P_\Delta\| = O(d^{-1}(\Omega))$. В формуле (10) берем в качестве Ω множество $\Omega = \{m, m+1, \dots, N\}, m > k, N > k$. А в формуле (11) положим $\Omega = \{n : n > l\}$, где $l > k$. □

Определение 3 [18]. Пусть $C: D(C) \subset H \to H$ – линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(C) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n \tag{20}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств и P_n – проектор Рисса, построенный по множеству σ_n. Оператор C называется спектральным относительно разложения (20) или обобщенно спектральным, если ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n x$ сходится для любого вектора $x \in H$.

Отметим, что если $\sigma_n = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{Z}$, - одноточечные множества, а проекторы $P_n, n \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $CP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$, исключая конечное число, то оператор C является спектральным по Данфорду, причём C – спектральный оператор скалярного типа, если $CP_n = \lambda_n P_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{E}$ является спектральным относительно разложения (1).

Пример. Пусть числа $a(n), n \in \mathbb{Z}$, таковы, что $a(n) = c_3 n^2 + c_4$, где c_3, c_4 – некоторые константы. Тогда имеют место теоремы 1 и 2 об асимптотической оценке собственных векторов, собственных значений и спектральных проекторов оператора $\mathcal{E}$. Заметим, что в этом случае $d_i = c_5 i, i \ge 1$, $d_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Отметим, что исследование спектральных свойств оператора $\mathcal{E}$, но с другими условиями на последовательности $a: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ проведено в [19]. Там в качестве пространства допустимых возмущений выступает пространство $End\ l_2(\mathbb{Z})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00197.

Список литературы

1. Мусилимов Б., Отелбаев М. 1981. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма-Лиувилля. Ж. Вычислит. матем. и матем. Физики, № 6 (21): 1430-1434.

Musilimov B., Otelbaev M. 1981. Estimation of the least eigenvalues for the matrix class corresponding to the Sturm-Liouville difference equation. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, №6 (21): 68-73. (in Russian)

2. Отелбаев М.О. 1988. О коэрцитивных оценках решений разностных уравнений. Исследования по теории дифференциальных функций многих переменных и ее приложениям. Часть 12. Труды математического института АН СССР, 181: 241-249.

Otelbaev M.O. 1989. Coercive estimates for the solution of difference equation. Proceeding of the Steklov Institute of mathematics, 181: 265-274. (in Russian)

3. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ: 165.

Baskakov A.G. 1987. Harmonic analysis of linear operators. Voronezh: Publicher hause VSU: 165 . (in Russian)

4. Баскаков А.Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. мат. журн., № 1 (24): 21-39.

Baskakov A.G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., № 1 (24): 21-39. (in Russian)

5. Баскаков А.Г. 1986. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. Изв. АН СССР, № 3 (50): 435-457.

Baskakov A.G. 1987. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. Mathematics of the USSR Izvestya, № 3 (28): 421-444. (in Russian)

6. Баскаков А.Г. 1994. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., № 4 (58): 3-32.

Baskakov A.G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, № 1 (45): 1-31. (in Russian)

7. Баскаков А.Г. 2011. Метод подобных операторов в спектральныом анализе несамосопряжённого оператора Дирака с негладким потенциалом. Изв. РАН. Сер. матем., № 3 (75): 3-28.

Baskakov A.G. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izvestiya: Mathematics. № 3 (75): 445-469. (in Russian)

8. Ускова Н.Б. 2004. К одному результату Р. Тёрнера. Мат. заметки, № 6 (76): 905-917.

Uskova N.B. 2004. On a Result of R. Turner. Mathematical Notes, № 6 (76): 844-854. (in Russian)

9. Баскаков А.Г. 2015. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений. Мат. сборник, № 8 (205): 23-62.

Baskakov A.G. 2015. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations. Sbornik: Mathematics, № 8 (206): 1049-1086. (in Russian)

10. Ускова Н.Б. 2015. О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом. Уфим. мат. журн., № 3 (7): 88-99.

Uskova N.B. 2015. On spectral properties of Stourm-Liouville operator with matrix potential. Ufa Mathematical Journal, № 3 (7): 84-94. (in Russian)

11. Ускова Н.Б. 2016. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом. Дифференциальные уравнения, №5 (53): 579-588.

Uskova N.B. 2016. On the spectral properties of a second-order differential operator with matrix potential. Differential equations, №5 (52): 557-567. (in Russian)

12. Гаркавенко Г.В. 1994. О диагонализации некоторых классов линейных операторов. Известия вузов. Математика, №11: 14-19.

Garkavenko G.V. 1994. On diagonalization of certain classes of linear operators. Russian Mathematics (Isvestiya VUZ. Matematika), №11 (38): 11-16. (in Russian)

13. Романова Е.Ю. 2014. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, №5 (34): 73-77.

Romanova E.Yu. 2014. Similar operators method at spectral analysis of differential operator with an involution. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, №5 (34): 73-77. (in Russian)

14. Карпикова А.В. 2014. Асимптотика спектра оператора Хилла-Шредингера. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, №5 (34): 34-37.

Karpikova A.V. 2014. Spectral analysis of the Hill-Schrodinger operator. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, №5 (34): 34-37. (in Russian)

15. Шелковой А.Н. 2016. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, Вып. 43, № 13. : 72 - 80.

Shelkovoj A.N. 2016. Asymptotic behavior of the eigenvalues of a differential operator with non-local boundary conditions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, № 13 (43): 72 - 80. (in Russian)

16. Баскаков А.Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. Изв. РАН. Сер. Математика, №6 (61): 3-26.

Baskakov A.G. 1997. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Russian Academy of Sciences. Mathematics, №6(61): 1113-1135. (in Russian)

17. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М.: Мир: 449. (Rudin W. 1973. Functional Analysis. McGraw-Hill Education: 397)

Rudin W. 1973. Functional Analysis. McGraw-Hill Education: 397.

18. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. 1974. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. М.:Мир: 661. (Dunford N., Schwartz J.T. 1971. Linear operators. Part III. Spectral operators. Wiley-Interscience: 2592)

Dunford N., Schwartz J.T. 1971. Linear operators. Part III. Spectral operators. Wiley-Interscience: 2592.

19. Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б. 2015. Гармонический анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом. Таврический вестник информатики и математики, №3: 40-48.

Garkavenko G.V., Uskova N.B. 2015. Spectral analysis of second order difference operators with growing potential. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki, №3: 40-48. (in Russian)