УДК 621.3.015.4

ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

THE SECOND LYAPUNOV'S METHOD IN ANALYSIS TIME VARYING PARAMETRIC CIRCUIT STABILITY

Н.Д. Бирюк [1], А.Ю. Кривцов [2]
N.D. Birjuk [1], A.Yu. Krivtsov [2]

[1)] Воронежский государственный университет,
394006, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2)] АО «Концерн «Созвездие»,
394018, Россия, г. Воронеж, ул. Плехановская, 14

[1]Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia

[2]JSC «Sozvezdie «Concern»,
Str. Plekhanovskaya, 14, Voronezh, Russia

E-mail: lidia@vmail.ru, bobr5me@rambler.ru

Аннотация. Анализ устойчивости радиоцепей напрямую связан с качеством функционирования радиотехнических приборов, поскольку паразитная автогенерация радикально понижает их технические характеристики. Второй метод Ляпунова часто применяется в естествознании, но не в радиоэлектронике, что является упущением. Здесь предложен один из подходов применения второго метода Ляпунова, позволяющий получить критерий устойчивости параметрического контура общего вида.

Resume. The analysis radio circuits stability directly connects with quality of radio devices so far as parasitic oscillation radically makes worse technique characteristic of this devices. The second Lyapunov's method is applied in natural science but not in radio electronics, this is a great omission. Set forth below application of time varying circuit stability.

Ключевые слова: теория устойчивости Ляпунова, принцип линейного включения, параметрический контур, критерий устойчивости

Keywords: Lyapunov's stability theory, the principle of linear inclusion, time varying circuit, stability criterion

Введение

Под параметрическим контуром понимается колебательный контур со всеми изменяющимися во времени по непрерывным функциям элементами независимо от протекающим по ним токов (условие линейности). Такой контур, в отличие от обычного, может быть неустойчивым, т. е. его свободный процесс может неограниченно возрастать. Во многих практических случаях требуется гарантия устойчивости контура. Соответствующий анализ оказывается трудной задачей, требующей применения теории устойчивости Ляпунова. Ниже применен второй метод Ляпунова, позволивший получить достаточные условия устойчивости контура. Частный случай такого контура применяется в малошумящих резонансных усилителях, но в данном случае контур используется как удобный объект анализа устойчивости, удобный для обобщений на более сложные параметрические радиоцепи.

Проблемы применения теории устойчивости Ляпунова к реальным системам

Теория устойчивости Ляпунова [1] включает в себя первый и второй методы Ляпунова. Она разработана для систем любой природы с сосредоточенными параметрами. В общем случае такие системы описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Если нелинейности разложить в степенные ряды и отбросить все члены второго и выше порядков, то получим системы в линейных приближениях. Это могут быть либо дифференциальные уравнения с постоянными, либо с переменными (зависящими от аргумента) коэффициентами. Во многих случаях по устойчивости или неустойчивости линейного приближения можно судить об устойчивости или неустойчивости исходной нелинейной системы уравнений. Исключения известны, они требуют отдельного рассмотрения. В случае постоянных коэффициентов методы анализа устойчивости относительно хорошо разработаны. В случае переменных коэффициентов аналогичная задача радикально усложняется.

Первый метод Ляпунова принципиально позволяет получить полное решение задачи об устойчивости, но для этого требуется предварительно найти фундаментальную систему решений, что очень непросто. По этой причине первый метод Ляпунова не получил широкого распространения в естествознании. В обстоятельной монографии [2] он из-за трудностей применения назван неэффективным. В связи с широким применением компьютерных расчетов такая оценка может быть изменена.

Второй метод Ляпунова намного удобнее в применении, но требует построения специальной функции, функции Ляпунова, прямых рекомендаций по выбору таких функций не содержится в теории устойчивости Ляпунова. Второй метод Ляпунова получил широкое применение в естествознании. В радиоэлектронике по непонятным причинам, возможно, в силу неблагоприятных традиций, второй метод Ляпунова в должных масштабах не применяется. Объективно, второй метод Ляпунова не позволяет получить полного решения задачи. Он дает возможность найти критерии устойчивости в частных случаях, определяемых конкретными функциями Ляпунова. Такой подход может быть использован в практике, кроме того, он частично проясняет и общий случай, поскольку иногда путь к общему случаю проложен через частные случаи. Центральный вопрос в таком подходе, как построить функцию Ляпунова. Ниже рассмотрена проблема устойчивости параметрического контура общего вида. Предложена конкретная функция Ляпунова, которая отнюдь не препятствует применению других функций Ляпунова, позволяющих получить новые результаты.

Математическая модель параметрического контура общего вида

Нас будет интересовать свободный процесс параметрического контура, схема которого представлена на рис. 1.

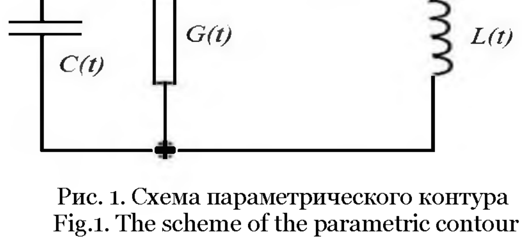

Рис. 1. Схема параметрического контура
Fig.1. The scheme of the parametric contour

Математических моделей такого контура может быть построено сколько угодно, все зависит от того, какие две функции выбраны в качестве определяющих.

Однако, есть одна особая математическая модель, максимально приближенная к таковой для хорошо известного контура с постоянными параметрами. Она получается, если в качестве определяющих функций выбрать заряд *q(t)* емкости *C(t)* и потокосцепление *Ф(t)* индуктивности *L(t)*. В таком случае первый и второй законы Кирхгофа приводят к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка –

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{G}{C}q - \dfrac{1}{L}\Phi \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{1}{C}q - \dfrac{R}{L}\Phi \end{cases}.$$

Трудности анализа устойчивости этой системы имеют математический характер, поэтому ее желательно представить в таком виде, который характерен для математических дисциплин, т. е. нормировать. С этой целью введем постоянные масштабные делители времени t_M, заряда q_M и магнитного потока Φ_M, затем перейдем к нормированным переменным времени $\tau = \dfrac{t}{t_M}$, заряда $x_1 = \dfrac{q}{q_M}$ и магнитного потока $x_2 = \dfrac{\Phi}{\Phi_M}$. В нормированных переменных предыдущая система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = -\dfrac{t_M G(\tau)}{C(\tau)}x_1 - \dfrac{t_M r}{L(\tau)}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = \dfrac{t_M}{rC(\tau)}x_1 - \dfrac{t_M R(\tau)}{L(\tau)}x_2 \end{cases}, \tag{1}$$

где $r = \dfrac{\Phi_M}{q_M}$ – нормирующее сопротивление.

Эта система может быть представлена в компактном векторном виде

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – неизвестный вектор-столбец, $\mathbf{A}(\tau) = \{a_{i,j}\}$, i,j=1,2 – матрица системы.

Здесь $a_{11} = -\dfrac{t_M G}{C}$, $a_{12} = -\dfrac{t_M r}{L}$, $a_{21} = \dfrac{t_M}{rC}$, $a_{22} = -\dfrac{t_M R}{L}$.

Представление (2) носит название векторного дифференциального уравнения первого порядка. Уравнение (2) и его развернутое представление (1) являются объектом нашего анализа. Уточним исходные допущения.

Элементы контура *C(t), G(t), L(t), R(t)* изменяются во времени по любым непрерывным функциям, оставаясь всегда положительными. В таком случае система (1) представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, изменяющимися во времени по любым непрерывным функциям. Требуется указать условия, гарантирующие устойчивость этой системы уравнений. Для линейной системы это равнозначно ограниченности всех свободных процессов контура, стимулированные ограниченными начальными условиями. Поясним выбор контура со всеми изменяющимися во времени параметрами, хотя такое состояние на практике маловероятно. Это продиктовано желанием охватить хотя бы частично нелинейные контуры с такой же схемой (рис. 1).

В математической монографии [3] доказан принцип линейного включения, утверждающий, что любое решение произвольной нелинейной системы уравнений может быть реализовано в специально подобранной системе линейных уравнений. Сам факт существования принципа, охватывающего все нелинейные системы, имеет непреходящее методологическое значение. По неизвестным причинам он не используется в теории радиоцепей, что на наш взгляд, является большим ограничением. Из принципа линейного включения следует, что нелинейные и линейные системы имеют тесное взаимопроникающее соприкосновение, так что любое достижение в теории линейных систем общего вида автоматически является достижением и в области нелинейных систем. Из этих соображений здесь выбрана задача анализа контура со всеми изменяющимися во времени элементами при произвольных функциях изменения.

Второй метод Ляпунова применительно к параметрическому контуру

Второй метод Ляпунова имеет весьма общий характер и применяется к нелинейному векторному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mathbf{x} = \mathrm{colon}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – неизвестный вектор-столбец любого порядка, $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ – вектор-столбец того же порядка, элементы которого являются известными нелинейными функциями времени t и элементов неизвестного вектора $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$. Уравнение (3) считается приведенным, т. е.

$$\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0.$$

Для применения первой теоремы Ляпунова об устойчивости требуется построение непрерывно дифференцируемой определенно положительной функции

$$\begin{aligned} &V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0, \text{ при } \mathbf{x} \neq 0, \\ &V(t, 0) = W(0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Неравенство (4) представляет собой условие определенной положительности функции $V(t, \mathbf{x})$, являющейся явно зависящей от времени нелинейной функцией своих аргументов, $W(\mathbf{x})$ – соответствующая явно независящая от времени функция.

Кроме того, требуется найти полную производную функции $V(t, \mathbf{x})$ в силу дифференциального уравнения (3) –

$$\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j(t, \mathbf{x}), \tag{5}$$

где $X_1,\ X_2, ..., X_n$ – элементы вектора $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ из (3).

Первая теорема Ляпунова об устойчивости утверждает, что при совместном выполнении неравенств (4) и

$$\frac{d}{dt}V(t,\mathbf{x}) \le 0 \text{ при } \mathbf{x} \ne 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}V(t,0) = 0.$$

во временном интервале $[t_0,\infty)$, где t_0 – любое, тривиальное решение векторного дифференциального уравнения устойчиво. Функция Ляпунова $V(t,\mathbf{x})$ должна быть определенно положительной (строго больше нуля при $\mathbf{x} \ne 0$), а ее полная производная $\frac{dV}{dt}$ – знакоотрицательной (меньше или равна нулю).

Линейное приближение уравнения (3) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{7}$$

где $\mathbf{x} = \text{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестный вектор, $\mathbf{A} = \{a(t)_{i,j}\}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ – матрица системы. Линейное приближение (7) для уравнения (3) получается, если все нелинейности по $\mathbf{x}$ в (3) разложить в степенные ряды и ограничиться нулевой и первой степенью. К уравнению (7) также можно применить первую теорему Ляпунова об устойчивости. Если в линейной системе тривиальное решение устойчиво, то и все его решения устойчивы. Понятие «устойчивость системы» и «ограниченность системы уравнений» для линейной системы (7) совпадают, что не верно для нелинейной системы уравнений (3). Если линейное приближение (7) системы (3) устойчиво, то в большинстве случаев (исключения известны) устойчиво и тривиальное решение исходной нелинейной системы (3). В нашем случае ограничиваемся получением критерия устойчивости линейного векторного уравнения (7) при $n = 2$.

Критерий устойчивости параметрического контура

Для уравнения (1,2) выбираем функцию Ляпунова

$$V(\tau,\mathbf{x}) = \left(1+\frac{a}{\tau}\right)(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \left(1+\frac{1}{\tau}\right)\left(x_1^2+x_2^2\right), \tag{8}$$

где $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ – скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$, а – положительная константа, и соответствующую ей функцию

$$W(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \tag{9}$$

Очевидно, что функция $V(\tau,\mathbf{x})$ – определенно положительная и удовлетворяет первой теореме Ляпунова. Если найдем условие, при котором и первая производная в силу системы (1) удовлетворяет первой теореме Ляпунова, то это условие и будет критерием устойчивости нашего контура.

Применительно к дифференциальной системе (1) найдем полную производную функции Ляпунова –

$$\frac{dV}{d\tau}=\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=-\frac{a}{\tau^2}\left(x_1^2+x_2^2\right),\ \frac{\partial V}{\partial x_1}=2\left(1+\frac{a}{\tau}\right)x_1,\ \frac{\partial V}{\partial x_2}=2\left(1+\frac{a}{\tau}\right)x_2.$$

Уточним первую производную функции Ляпунова –

$$\frac{dV}{d\tau}=-\frac{a}{\tau^2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+2\left(1+\frac{a}{\tau}\right)x_1\frac{dx_1}{d\tau}+2\left(1+\frac{a}{\tau}\right)x_2\frac{dx_2}{d\tau}. \qquad (10)$$

Это выражение можно упростить, учитывая известное условие, что для решения вопроса об устойчивости выбирается бесконечный интервал аргумента, т. е. в нашем случае

$$\tau_0\le\tau<\infty,$$

где τ_0 – любое. Выбираем τ_0 настолько большим, чтобы можно было пренебречь первым слагаемым в (10), а так же выражением $\dfrac{a}{\tau}$ по сравнению с единицей. Тогда

$$\frac{dV}{d\tau}\cong 2\left(x_1\frac{dx_1}{d\tau}+x_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Разворачивая производные правой части по формулам (1), после преобразований получим

$$\frac{dV}{d\tau}=2t_M\left[-\frac{G}{C}x_1^2+\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)x_1x_2-\frac{R}{L}x_2^2\right].$$

В квадратных скобках имеем квадратичную форму [4], которую можно представить через симметричную матрицу –

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x})=-\frac{G}{C}x_1^2+\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)x_1x_2-\frac{R}{L}x_2^2=\mathbf{x}^\tau\mathbf{A}_C\mathbf{x}.$$

В нашем случае

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^\tau=\left(x_1,x_2\right)$$

$$\mathbf{A}_C=\begin{Vmatrix}-\dfrac{G}{C} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{L}-\dfrac{1}{rC}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{L}-\dfrac{1}{rC}\right) & -\dfrac{R}{L}\end{Vmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра [4], квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Будет отрицательно определенной, если упорядоченные главные миноры матрицы $\mathbf{A}_C$ поочередно изменяют знаки, начиная с отрицательного, т. е.

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\dots,\Delta_{2k-1}<0,\ \Delta_{2k}>0,\dots .$$

В нашем случае главных миноров два:

$$\Delta_1=-\frac{G}{C}<0,\ \Delta_2=\det\mathbf{A}_C.$$

Таким образом, квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$, и вместе с ней и полная производная функции Ляпунова $\frac{dV}{d\tau}$ будет определенно отрицательными при выполнении условия

$$\det \mathbf{A}_C > 0. \tag{11}$$

Раскрывая определитель, получим $\frac{GR}{LC}-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{L}-\frac{1}{rC}\right)^2>0$ или после преобразований $\sqrt{G(\tau)R(\tau)}>\frac{1}{2}\left|\frac{r}{\rho(\tau)}-\frac{\rho(\tau)}{r}\right|$, где $\rho(\tau)=\sqrt{\frac{L(\tau)}{C(\tau)}}$ – характеристическое сопротивление контура. Здесь предполагается, что элементы контура являются функциями нормированного времени, предыдущее неравенство не измениться, если перейти к реальному времени т. е.

$$\sqrt{G(t)R(t)}>\frac{1}{2}\left|\frac{r}{\rho(t)}-\frac{\rho(t)}{r}\right|. \tag{12}$$

Это неравенство, согласно первой теореме Ляпунова, гарантирует устойчивость нашего контура, для этого достаточно выполнения нестрогого неравенства $\frac{dV}{dt}\le 0$. У нас же получилось строгое неравенство $\frac{dV}{dt}<0$. Поэтому можно утверждать, что контур не просто устойчив, а асимптотически устойчив. Что бы убедиться в этом, достаточно применить вторую теорему Ляпунова [1].

Теорема. Пусть для приведенной системы (3) существует положительно определенная функция $V(t,\mathbf{x})$, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая отрицательно определенную производную по времени в силу этой системы. Тогда тривиальное решение системы (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Покажем, что в нашем случае эта теорема выполняется. Ранее доказано, что полная производная функции Ляпунова не только знакоотрицательная $\left(\frac{dV}{dt}\le 0\right)$, что достаточно для устойчивости, но и определенно отрицательная $\left(\frac{dV}{dt}<0\right)$. Если докажем, что функция Ляпунова имеет бесконечно малый высший предел, то вторая теорема Ляпунова выполняется и наш контур асимптотически устойчив.

Определение 1. Функция $V(t,\mathbf{x})$ имеет бесконечно малый высший предел, если в любой момент времени t из бесконечного интервала (t_0,∞), t_0 – любое, выполняется предельное равенство $V(t,\mathbf{x})\to 0$ при $\mathbf{x}\to 0$. В нашем случае $V(t,\mathbf{x})=\left(1+\frac{a}{\tau}\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

Предельный переход $\mathbf{x}\to 0$ равнозначен двум предельным переходам $x_1\to 0$ и $x_2\to 0$. Очевидно, что в интервале $[\tau_0,\infty)$ при $\tau_0>0$ $V(\tau,\mathbf{x})\to 0$ при $\mathbf{x}\to 0$ переходя от нормированного времени к реальному получим то же условие. Таким образом, неравенство (11) является достаточным условием (критерием) асимптотической устойчивости параметрического контура (рис. 1). Сформулируем его.

Критерий асимптотической устойчивости параметрического контура

Параметрический контур (рис. 1) асимптотически устойчив, если при любом t из интервала $[t_0, \infty)$, t_0 – любое, выполняется строгое неравенство

$$\sqrt{G(t)R(t)} > \frac{1}{2}\left|\frac{r}{\rho(t)} - \frac{\rho(t)}{r}\right|$$

хотя бы при одном значении $r = const > 0$.

Заключение

Разработан способ применения второго метода Ляпунова к конкретному физическому объекту и получен критерий, гарантирующий устойчивость параметрического контура.

Список литературы

1. Демидович Б. П. 1998. Лекции по математической теории устойчивости, М.: Изд. МГУ ЧеРо : 480.
Demidovich B. P. 1998. Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow: Izd. MGU CheRo: 480. (in Russian)

2. Якубович В. А., Старжинский В. М. 1972. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М.: Наука: 715.
Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M. 1972. Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications], Moscow: Nauka: 715. (in Russian)

3. Былов Б. Ф., Гробман Р. Э., Немыцкий В. В. 1966. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М.:Наука: 582.
Bylov B. F., Grobman R. E., Nemytskiy V. V. 1966. Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its application to issues of sustainability], Moscow: Nauka: 582. (in Russian)

4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. 1984. Линейная алгебра, М.:Наука: 294.
Il'in V. A., Poznyak E. G. 1984. Lineynaya algebra [Linear Algebra], Moscow:Nauka: 294. (in Russian)