УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE EIGENVALUES OF ADIFFERENTIAL OPERATOR WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

А.Н. Шелковой
A.N. Shelkovoj

Воронежский государственный технический университет,
Россия, 394016, г. Воронеж, Московский пр-т, 14

Voronezh State Technical University,
14, Moskovskii av., Voronezh, 394016, Russia

E-mail: shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями методом подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра и сходимости спектральных разложений дифференциального оператора.
Resume. We use the method of similar operators to study the spectral properties of a second order differential operator with non-local boundary conditions. We obtain results on the asymptotic behavior of the spectrum of such operators and convergence of the corresponding spectral decompositions.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.
Key words: operator spectrum, differential of second order operator, spectrum asymptotic, method of similar operators.

Введение

Пусть $L_2[0,2\pi]$ - гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{x\in L_2[0,2\pi]: x'$ абсолютно непрерывна, $x''\in L_2[0,2\pi]\}$. Рассматривается дифференциальный оператор $L:\ D(L)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi]$, задаваемый дифференциальным выражением вида

$$(Lx)(t)=-\ddot{x}(t)+x(t)-\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\dot{x}(t_k), \qquad (1)$$

где a_k - функции из $L_2[0,2\pi]$, $t_k\in[0,2\pi]$, $k=\overline{1,n}$, с областью определения $D(L)=\{x\in W_2^2[0,2\pi], x(0)=x(2\pi), \dot{x}(0)=\dot{x}(2\pi)\}$.

В частности, такого класса (случай $n=2$) оператор возникает при переходе к сопряжённому при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,2\pi]$, задаваемого выражением

$$Ly = -\ddot{y} + y \tag{2}$$

и начальными краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt, \\ \dot{y}(0) = \dot{y}(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0,2\pi]$.

Для исследования спектра оператора L рассмотрим сопряжённый ему оператор L^* (см. [5]), который задаётся дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - [\dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t)] \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = x(2\pi), \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi). \end{cases} \tag{5}$$

В настоящей статье для исследования спектральных свойств рассматриваемого класса применяется вариант метода подобных операторов, позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемых операторов.

Приведём основные определения и теоремы метода подобных операторов.

Пусть H - бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 1. *Два оператора $A_i : D(A_i) \subset H \to H, i = 1,2,$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $V \in End\, H$ (т. е. $V^{-1} \in End\, H$, $End\, H$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H), такой, что $VD(A_2) = D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1Vx = VA_2x,\ x \in D(A_2)$. Оператор V называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2.*

Определение 2. *Линейный оператор $C : D(C) \subset H \to H$ называется подчинённым оператору $A : D(A) \subset H \to H$, если выполнены следующие два условия:*

1. $D(C) \supseteq D(A)$;
2. *существует постоянная $M > 0$, такая, что*

$$\|Cx\| \le M(\|Ax\| + \|x\|) \quad \forall x \in D(A).$$

Определение 3. *Тройка (U, J, Γ), $J : U \to U$, $\Gamma : U \to End\, H$, называется допустимой для оператора A, а U - допустимым пространством возмущений, если:*

1. U - банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $L_A(H)$ линейных операторов, подчинённых оператору A;

2. J,Γ - трансформаторы (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);

3. $(\Gamma X)x\in D(A)\quad \forall x\in D(A)$ и имеет место равенство:

$$A\Gamma X-(\Gamma X)A=X-JX,\ X\in U,$$

(равенство понимается как равенство элементов из U);

4. $X\Gamma Y,(\Gamma Y)X\in U,\ X,Y\in U$, и существуют постоянные $\gamma_1>0,\gamma_2>0$, такие, что $\|\Gamma\|\le\gamma_1$ и $\max\left\{\|X\Gamma Y\|_*,\|(\Gamma Y)X\|_*\right\}\le\gamma_2\|X\|_*\|Y\|_*$;

5. выполнены условия:

а) $\operatorname{Im}\Gamma X\subset D(A)$ и $A\Gamma X\in End\ H$ или

б) $\forall X\in U$ и $\forall\varepsilon>0$ существует число $\nu_\varepsilon\in\rho(A)$ ($\rho(A)$ - резольвентное множество оператора A), такое, что $\|XR(\nu_\varepsilon,A)\|_\infty<\varepsilon$, где $\|X\|_\infty=\sup\limits_{\|x\|\le1}\|Xx\|$ - норма оператора в $End\ H$; $R(\nu_\varepsilon,A)=(A-\nu_\varepsilon I)^{-1}$.

Здесь $\operatorname{Im}\Gamma X$ - образ оператора ΓX. Непрерывность вложения банахова пространства U в $L_A(H)$ означает, что существует постоянная $M_0>0$, такая, что $\|B\|_A\le M_0\|B\|_*\quad\forall B\in U$. Пусть $A:D(A)\subset H\to H$ - нормальный оператор (см., например, [19]) (частный случай нормального – самосопряжённый оператор), т. е. $D(A)=D(A^*),\|Ax\|=\|A^*x\|,x\in D(A)$, спектр которого представим в виде:

$$\sigma(A)=\bigcup_{j\ge1}\sigma_j,\ 0\overline{\in}\sigma(A),$$

где $\sigma_j,\ j\ge1$, - взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что

$$dist(0,\sigma_1)<dist(0,\sigma_2)<\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}dist(0,\sigma_n)=\infty.$$

Пусть $P_j,\ j\ge1$, - проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j, $A_j=AP_j,\ j=1,2,\ldots,\ A_j\in End\ H,\ |\sigma_j|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma_j}|\lambda|$. В качестве пространства возмущений U рассматриваются операторы $B:D(A)\subset H\to H$, допускающие представление

$$B=B_0A,\ B_0\in\sigma_2(H)$$

(здесь $\sigma_2(H)$ - идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, с нормой $\|\cdot\|_2$), причём существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $\{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеет место оценка:

$$\|P_j B_0 P_i\| \le c \cdot \alpha_j \cdot \beta_i, i, j = 1, 2, \dots,$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в U. Пусть n – некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ - проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n.

Положим $Q_1 = Q_{1n} = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, $Q_2 = Q_{2n} = I - Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n : U \to U$, $\Gamma_n : U \to \sigma_2(H), n \ge 1$, определяются следующим образом:

$$J_n X = Q_1 X Q_1 + Q_2 X Q_2,$$

$$\Gamma_n X = \Gamma_n^{(1)} X + \Gamma_n^{(2)} X,$$

где

$$\Gamma_n^{(1)} X = \sum_{m \ge n+1} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k), \quad \Gamma_n^{(2)} X = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \ge 1} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k).$$

На операторных блоках $P_m X_0 P_k A$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения

$$A P_m Y_{0mk} - Y_{0mk} A P_k = P_m X_0 P_k,$$

удовлетворяющее условию

$$P_m Y_{0mk} P_k = Y_{0mk},$$

где $k \ge n+1$, $m \le n$ либо $k \le n$, $m \ge n+1$. Для всех остальных значений m и k полагается $\Gamma_n(P_m X_0 P_k A) = 0$.

Теорема 1. *Пусть n – натуральное число, такое, что*

$$\gamma_1(n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \ge n+1} \frac{|\sigma_k|^2 \beta_k^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_k^2 |\sigma_m|^2}{(dist(\sigma_m, \sigma_k))^2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{ \max_{j \le n}\left\{ \sum_{k \ge n+1} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist(\sigma_j, \sigma_k)} \right\}, \sup_{j \ge n+1}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist(\sigma_j, \sigma_k)} \right\} \right\} < \infty,$$

причём выполнено условие

$$2\max\{\gamma_1(n), \gamma_2(n)\} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1,$$

Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - J_n X^*(n)$, *где* $X^*(n) \in U$ *имеет вид:*

$$X^*(n) = X_{11}^*(n) + X_{12}^*(n) + X_{21}^*(n) + X_{22}^*(n), \tag{6}$$

где $X_{ij}^*(n) = Q_i X^*(n) Q_j, i, j = 1, 2,$ *есть решение системы уравнений*

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij}\Gamma X_{ji} + B_{ii}, (i=1, j=2) \vee (i=2, j=1); \\ X_{ij} = F_{ij}(X_{ij}), \end{cases} \tag{7}$$

где оператор $F_{ij} : U_{ij} \to U_{ij}$ *задаётся формулой*

$$F_{ij}(X) = B_{ii}\Gamma X - (\Gamma X)B_{jj} - (\Gamma X)(B_{ji}\Gamma X) + B_{ij},$$

$B_{ij} = Q_i B Q_j, i, j = 1, 2,$ *- блоки оператора* $B \in U,$ *являющегося возмущением оператора* $A,$ *допустимое пространство возмущений* U *является прямой суммой четырёх замкнутых подпространств вида*

$$U_{ij} = \{Q_i X Q_j, X \in U\}, i, j = 1, 2.$$

Оператор преобразования подобия имеет вид $I + \Gamma_n X^*(n)$.

Теорема 2. *Пусть операторы* A *и* $B \in U$ *таковы, что* $\gamma_1(n) \to 0, \gamma_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, начиная с некоторого* n_0, *оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - J_n X^*(n), n \geq n_0,$ *где* $X^*(n)$ *представим в виде (6), и* $\left\| P(\Delta_n, A) - P(\Delta_n, A - B) \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причём*

$$\Delta_n = \sigma\left(\left(A - J_n X^*(n)\right) | P(\Delta_n, A)H\right) \subset \sigma(A - B),$$

где $P(\Delta_n, A - B)$ *- проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* Δ_n *оператора* $A - B$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда*

$$\left\| \left(I - P(\Delta_n, A - B)\right)x - \sum_{i \geq n+1} P_i X \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

для любого фиксированного $x \in H$.

Основные результаты

Перейдём к исследованию основных свойств оператора $L: D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, задаваемого выражением (1). Методом исследования оператора L является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-16]. Представим его в виде $Lx = Ax - Bx,$ где A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x} + x,$

$$D(A) = \{x \in L_2[0, 2\pi]: \ x, \dot{x} \in C[0, 2\pi], \ \ddot{x} \in L_2[0, 2\pi],$$

$$x(0)=x(2\pi),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(2\pi)\},$$

с краевыми условиями (5) и

$$(Bx)(t)=\dot{x}(2\pi)a_0(t)-x(2\pi)a_1(t), t\in[0,2\pi], x\in D(A). \qquad (8)$$

Оператор A - самосопряжённый оператор с дискретным спектром, собственное значение которого $\lambda_0=1$ является простым, а остальные собственные значения $\lambda_n=n^2+1, n\geq 1,$ двукратны; собственные функции оператора $A,$ отвечающие этим собственным значениям, $e_0(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$ $e_{2n-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ e_{2n}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, n\in N,$ где N - множество натуральных чисел, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$ (см., например, [1]). Положим $\Delta_1(n)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\},\ P_n=P(\Delta_1(n),A),\quad P_j=P(\lambda_j,A)$ - проектор Рисса, $j=1,2,\ldots.$

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $Lx=Ax-Bx,$ мы получим следующие результаты.

Теорема 3. *Оператор* $B:D(A)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi],$ *задаваемый соотношением (8), представим в виде*

$$B=B_0A, \qquad (9)$$

где $B_0\in\sigma_2(L_2[0,2\pi])$ $(\sigma_2(L_2[0,2\pi])$ - *идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве* $L_2[0,2\pi]$), *и*

$$\|P_iB_0P_j\|\leq\alpha_i\beta_j, i, j=0,1,2,\ldots, \qquad (10)$$

где P_j - *проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству* $\sigma_j=\{j^2+1\},$ ($P_jx=(x,e_{2j-1})e_{2j-1}+(x,e_{2j})e_{2j}, j\neq 0,(\cdot,\cdot)$ - *скалярное произведение в* $L_2[0,2\pi]$),

$$\begin{cases}\alpha_0=\sqrt{\dfrac{|a_0^0|^2+|a_1^0|^2}{2}};\ \beta_0=1;\\ \alpha_i=\sqrt{|a_{0i}^{\sin}|^2+|a_{0i}^{\cos}|^2+|a_{1i}^{\sin}|^2+|a_{1i}^{\cos}|^2};\ \beta_j=\dfrac{j}{j^2+1}, i, j=1,2,\ldots;\end{cases}$$

(11)

$$a_0^0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)dt;\ a_1^0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)dt;$$

$$a_{0i}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\sin it\,dt;\ a_{0i}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\cos it\,dt;$$

$$a_{1i}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\sin itdt;\ a_{1i}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\cos itdt.$$

Теорема 4. *Пусть для любых функций a_0 и a_1, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0,2\pi]$, для последовательностей величин γ_1 и γ_2, определённых формулами*

$$\gamma_1(n)=\left(\frac{\alpha_0^2\beta_n^2\left(n^2+1\right)^2+\alpha_n^2\beta_0^2}{n^4}+\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{\alpha_m^2\beta_n^2\left(n^2+1\right)^2+\alpha_n^2\beta_m^2\left(m^2+1\right)^2}{\left|n^2-m^2\right|^2}\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\frac{\alpha_n\beta_n\left(n^2+1\right)}{2n-1};\ \frac{\alpha_0\beta_0}{n^2}+\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{\alpha_m\beta_m\left(m^2+1\right)}{\left|n^2-m^2\right|}\right\}<\infty,$$

выполнены условия:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\ \lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

Тогда спектр $\sigma(A-B)$ оператора $A-B$ представим в виде

$$\sigma(A-B)=\bigcup_{n\geq1}\tilde{\sigma}_n,$$

где $\tilde{\sigma}_n,\ n\geq1,$ - не более чем двухточечное множество, и пусть $\tilde{\lambda}_n$ - взвешенное среднее собственных значений из $\tilde{\sigma}_n$. Тогда имеет место оценка:

$$\left|\tilde{\lambda}_n-\left(n^2+1\right)+\right.$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(na_{0n}^{\sin}\left(1+\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^m ma_{0m}^{\sin}}{n^2-m^2}\right)-a_{1n}^{\cos}\left(1+\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^{m+1}a_{1m}^{\cos}}{n^2-m^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(na_{1n}^{\sin}\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^{m+1}a_{0m}^{\cos}}{n^2-m^2}-a_{0n}^{\cos}\sum_{\substack{m\geq1\\ m\neq n}}\frac{(-1)^m ma_{1m}^{\sin}}{n^2-m^2}\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\frac{n\gamma_2(n)\sqrt{\left|a_{0i}^{\sin}\right|^2+\left|a_{0i}^{\cos}\right|^2+\left|a_{1i}^{\sin}\right|^2+\left|a_{1i}^{\cos}\right|^2}}{\sqrt{D(n)}},$$

где $D(n)=\left(1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n)\right)^2-4\gamma_1(n)\gamma_2(n),\ n\geq1.$

Также справедлива оценка:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\left(\tilde{P}_nx\right)(t)-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt\right)\cos nt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}x(t)\sin ntdt\right)\sin nt\right|^2dt\right)^{1/2}\leq\frac{2\gamma_1(n)}{\sqrt{D(n)}+1-3\gamma_1(n)-\gamma_2(n)},\ n\geq1.$$

где $\tilde{P}_n$ *- проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* $\tilde{\sigma}_n$ *оператора* $A-B$.

Здесь $a_{0j}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\cos jtdt;\ a_{1j}^{\cos}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\cos jtdt;$

$a_{0j}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_0(t)\sin jtdt;\ a_{1j}^{\sin}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}a_1(t)\sin jtdt,\ j=1,2,\ldots,$ - коэффициенты Фурье функций

$a_0(t)$ и $a_1(t)$ по системе собственных функций оператора A.

Лемма. *Для последовательностей* γ_1 *и* γ_2, *заданных формулами*

$$\gamma_1(n)=\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{k\ge n+1}\frac{|\lambda_k|^2\beta_k^2\alpha_m^2+\beta_m^2\alpha_k^2|\lambda_m|^2}{|\lambda_m-\lambda_k|^2}\right)^{1/2}<\infty, \tag{12}$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\},\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\}\right\}<\infty, \tag{13}$$

выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\ \lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

На основе приведённой выше леммы сформулируем утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1).

Теорема 5. *Пусть функции* $a_0, a_1\in L_2[0,2\pi]$. *Тогда, начиная с некоторого натурального* n_0, *оператор* $A-B$ *подобен оператору* $A-J_nX^*(n)$, $n\ge n_0$, *где* $X^*(n)$ *представим в виде (6), и* $\left\|P(\Delta_1(n),A)-P(\tilde{\Delta}_1(n),A-B)\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Список литературы

1. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов, Воронеж: Изд-во ВГУ :165.
Baskakov A.G. 1987. Harmonic analysis of linear operators, Voronezh: Publicher hause VSU: 165 .
2. Баскаков А.Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. мат. журн, 1 (24): 21-39.
Baskakov A.G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 1 (24): 21-39.
3. Баскаков А.Г. 1986. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. Изв. АН СССР, 3 (50): 435-457.
Baskakov A.G. 1987. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. Mathematics of the USSR, № 3 (28): 421-444.
4. Баскаков А.Г. 1994. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., 4 (58) : 3-32.
Baskakov A.G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 1 (45): 1-31.
5. Баскаков А.Г., Кацаран Т.К. 1988. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями. Дифференц. уравнения, 8 (24): 1424-1433.
Baskakov A.G., Katsaran T.K. 1988. Spectral analysis of integro-differential operators with non-local boundary conditions. Differ. Equations, 8 (24): 1424-1433.
6. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. 2011. Метод подобных операторов в спектральныюм анализе несамосопряжённого оператора Дирака с негладким потенциалом. Изв. РАН. Сер. матем., 3 (75) :3-28.
Baskakov A.G., Derbushev A.V., Sherbakov A.O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izvestiya: Mathematics, 3 (75): 445-469.
7. Баскаков А.Г., Диденко В.Б. 2015. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами. Дифференц. уравнения. 3 (51): 323-338.

Baskakov A.G., Didenko V.B. 2015. Spectral analysis of differential operators with periodic unbounded coefficients. Differ. Equations, 3(51): 323-338.

8. Баскаков А.Г. 2015. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений. Мат. сборник, 8 (205): 23-62.

Baskakov A.G. 2015. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations. Sbornik: Mathematics, 8 (206) : 1049-1086.

9. Ульянова Е.Л. 1998. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущённых относительно конечномерными: дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, Воронеж : 100.

Ul'yanova E.L. 1998. Spectral analysis of the normal operators with perturbed relatively finite-dimensional: dis. ... cand. sci. sciences, Voronezh : 100.

10. Ускова Н.Б. 1994. О спектре некоторых классов дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 2 (30): 350-352.

Uskova N.B. 1994. About a spectrum of some differential operators classes. Differ. Equations, 2 (30): 350-352.

11. Ускова Н.Б. 1997. Об оценках спектральных разложений собственных векторов некоторых классов дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 4 (33): 564-566.

Uskova N.B. 1997. About estimates for spectral decompositions of own vectors of some differential operators classes. Differ. Equations, 4 (33): 564-566.

12. Ускова Н.Б. 2000. Об оценках спектральных проекторов возмущённых самосопряжённых операторов. Сиб. мат. журн., 3 (41): 712-721.

Uskova N.B. 2000. On estimates for spectral projections of perturbed selfadjoint operators. Siberian Mathematical Journal, 3 (41): 592-600.

13. Ускова Н.Б. 2004. К одному результату Р. Тёрнера. Мат. заметки, 6(76): 905-917.

Uskova N.B. 2004. On a Result of R. Turner. Mathematical Notes, 6 (76): 844-854.

14. Ускова Н.Б. 2015. О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом. Уфим. мат. журн., 3 (7): 88-99.

Uskova N.B. 2015. On spectral properties of Stourm-Liouville operator with matrix potential. Ufa Mathematical Journal, 3 (7): 84-94.

15. Поляков Д.М. 2015. Спектральный анализ несамосопряжённого оператора четвёртого порядка с негладкими коэффициентами. Сиб. мат. журн., 1 (56): 165-184.

Polyakov D.M. 2015. Spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator with nonsmooth coefficients. Siberian Mathematical Journal, 1 (56): 138-154.

16. Поляков Д.М. 2015. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряжённого оператора четвёртого порядка. Дифференц. уравнения, 3 (51): 417-420.

Polyakov D.M. 2015. The method of similar operators in the spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator. Differ. Equations, 3 (51): 417-420.

17. Шелковой А.Н. 2004. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, Воронеж: 144 .

Shelkovoj A.N. 2004. Spectral analysis of differential operators with non-local boundary conditions: dis. ... cand. sci. sciences, Voronezh : 144.

18. Шелковой А.Н. 2003. Об асимптотике собственных значений и равносходимости спектральных разложений дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: тр. конф., Воронеж, 30 июня – 4 июля 2003 г. – Воронеж: 233.

Shelkovoj A.N. 2003. About the asymptotic behavior of own meanings and equiconvergence of the corresponding spectral decompositions of a second order differential operator with non-local boundary conditions. Modern problems of the functional analysis and differential equations: conf. works, Voronezh, on June 30 - on July 4: 233.

19. Данфорд Н., Шварц Д.Т. 1974. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы, М.: Мир: 661.

Danford N., Schwartz J.T. 1971. Linear operators. V. III: Spectral operators. Intersci. Publ., New York – London: 661 .

20. Наймарк М.А. 1969. Линейные дифференциальные операторы, М.: Наука: 528.

Naymark M.A. 1969. Linear differential operators, M.: The Science: 528.