УДК 517.9

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

И. И. Струкова
I. I. Strukova

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г.Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia

E-mail: irina.k.post@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются функции ограниченной вариации, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве. В этом классе функций вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций ограниченной вариации. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций ограниченной вариации. Также получен критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы чисто периодической и исчезающей на бесконечности функций. Результаты статьи получены с существенным использованием спектральной теории изометрических представлений.

Resume. We consider functions of bounded variation defined on $\mathbb{R}$ with their values in a complex Banach space. We introduce the notions of slowly varying and periodic at infinity functions with bounded variation. The main results of the article are connected with harmonic analysis of periodic at infinity functions with bounded variation. For this class of functions we introduce the notion of a generalized Fourier series; the Fourier coefficients in this case may not be constants, they are functions that are slowly varying at infinity. We derive the analog of Wiener's theorem about absolutely convergent Fourier series for periodic at infinity functions with bounded variation. We also establish a criterion for representation of periodic at infinity functions as the sum of periodic functions and functions converging to zero. Basic results are derived with the use of isometric representations spectral theory.

Ключевые слова: банахово пространство, функция ограниченной вариации, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, периодический вектор, $L^1(\mathbb{R})$-модуль, теорема Винера, ряд Фурье.

Key words: Banach space, function of bounded variation, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, periodic vector, $L^1(\mathbb{R})$-module, Wiener's theorem, Fourier series.

Основные результаты

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\ X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Рассмотрим функцию $x: [a,b] \to X$ и разбиение $\tau: a = t_0 < t_1 <\ldots< t_n = b$ отрезка $[a,b]$. *Вариацией* функции x по разбиению τ называется величина $V_a^b(x,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \| x(t_{k+1}) - x(t_k) \|_X$. *Полной вариацией* функции x называется величина $V_a^b(x) = \sup\limits_{\tau} V_a^b(x,\tau)$. Функция x называется *функцией ограниченной вариации,* если $V_a^b(x) < \infty$. Класс функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ обозначим символом $\mathbb{V}([a,b],X)$.

Символом $\mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ обозначим банахово пространство, состоящее из функций $x: \mathbb{J} \to X$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{t\in\mathbb{J}} V_t^{t+1}(x) < \infty$, где за норму функции x принимается величина $\| x \|_{\mathbb{V}} = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} V_t^{t+1}(x) + \| x \|_\infty$, где $\| x \|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \| x \|_X$. Если $X = \mathbb{C}$, то вместо $\mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ будем писать просто $\mathbb{V}(\mathbb{J})$.

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ f,g \in L^1(\mathbb{R})$.

В $\mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ определена и ограничена полугруппа $S(t),\ t \in \mathbb{J}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t),\ s,t \in \mathbb{J},\ x \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X). \tag{1}$$

Отметим, что S — группа операторов, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Через $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ вида $\{x \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X) :$ *функция* $t \mapsto S(t)x : \mathbb{J} \to \mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ непрерывна$\}$.

Через $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathbb{V}(\mathbb{J},X)$, содержащее все функции $\varphi x,\ x \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X),\ \varphi \in C_b(\mathbb{J},X),\ supp\ \varphi$ – компакт. Такие функции будем называть исчезающими на бесконечности.

Определение 1. Функция $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ вида $x(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{J}$, где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$.

В теории дифференциальных уравнений (см. [1, p. 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{J},X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [2]), в теории вероятности [3], а также в теории целых функций [4]. Они составляют часть класса регулярно растущих функций, которые впервые в 1925 году ввел в рассмотрение Р. Шмидт [5].

Определение 2. Функция $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ (ω-периодической на бесконечности),* если $(S(\omega)x - x) \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$.

Таким образом, каждая ω-периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega) - x(t) = y(t),\ t \in \mathbb{J}$, где $y \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. В [6 - 8] получены аналоги теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для непрерывных периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и с рядами Фурье, суммируемыми с весом. В работах [9, 10] изучаются вопросы гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций нескольких переменных. В [11] описан спектр алгебры непрерывных периодических на бесконечности функций, определенных на полуоси.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ обозначим через $\mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$ и $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ соответственно. Отметим,что они оба образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$. Таким образом, имеют место включения $\mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X) \subset \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X) \subset \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$, при этом все указанные пространства инвариантны относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{J}$.

Символом $\mathbb{V}_\omega(\mathbb{J},X)$ обозначим подпространство банахова пространства $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$, состоящее из ω-периодических функций, т.е. функций $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$, для которых выполнено условие $S(\omega)x = x$.

Примерами периодических на бесконечности функций из $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции $x: \mathbb{J} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J},X)$, $y_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$;

2) функция $\overline{x} \in \mathbb{V}_c(\mathbb{R},X)$ такая, что она совпадает с $x \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{R},X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \| \overline{x}(t) \|_X = 0$;

3) любая функция из $\mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$;

4) любая функция $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$, представимая в виде $x = \sum_{k=-n}^{n} x_k(t)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{J}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in \mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее введем определение рядов Фурье функций из $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$.

Определение 3. *Каноническим рядом Фурье функции* $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J},$$

где функции $x_n: \mathbb{J} \to X,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau,\ t \in \mathbb{J},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{J},X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau,\ t \in \mathbb{J},\ k \in \mathbb{Z},$ – обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 4. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},\mathrm{X})$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J}, \tag{3}$$

где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$, для которых $y_n - x_n \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (2).

Лемма 1. *Канонические коэффициенты Фурье* x_n, $n \in \mathbb{Z}$, *(определенные формулой (2)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е.* $x_n \in \mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Утверждение леммы следует из равенств $x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau, t \in \mathbb{J}, n \in \mathbb{Z}$.

Непосредственно из определения 4 и леммы 1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in \mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 5. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье (3) периодической на бесконечности функции $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},\mathrm{X})$ *сходится к* x *относительно подпространства* $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},\mathrm{X})$, если существует последовательность функций (x_n^0) из $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},\mathrm{X})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x - \sum_{k=-n}^{n} y_k e_k + x_n^0 \|_{\mathbb{V}} = 0,$$

где функции $e_k, k \in \mathbb{Z}$, задаются формулами $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $\mathrm{t} \in \mathbb{J}$.

Важно отметить, что данное определение корректно, т.е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции x. Это объясняется тем, что $y_n - x_n \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2). Символом $\| y_n \|_\sim$, $n \in \mathbb{Z}$, обозначим величину $\inf\limits_{x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)} \| y_n - x_0 \|_{\mathbb{V}}$.

Определение 6. *Будем говорить, что функция $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, если существует обобщенный ряд Фурье (3) этой функции такой, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| y_n \|_\sim < \infty$.*

Отметим также, что если функция x имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ее канонический ряд Фурье сходится к x относительно подпространства $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$. Однако канонический ряд Фурье функции x может не быть абсолютно сходящимся, хотя функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье в смысле определения 6.

Если X – банахова алгебра, то функции из $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$, имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$, обозначаемую символом $\mathcal{A}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ (символом $\mathcal{A}_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$, если $X = \mathbb{C}$).

Одним из основных результатов статьи является теорема 2, в которой следующая знаменитая теорема Н. Винера распространяется на функции из $\mathcal{A}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$.

Теорема 1. *[12]. Если функция $f \in \mathcal{A}_\omega(\mathbb{R})$ обладает свойством $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то функция $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Пусть X – банахова алгебра с единицей e.

Определение 7. Функцию $x \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $y \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ такая, что $xy - e, yx - e \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$, где $e(t) \equiv e$, $t \in \mathbb{J}$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства* $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$.

Если y_1, y_2 – обратные к $x \in \mathbb{V}(\mathbb{J},X)$ относительно подпространства $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ функции, то $y_1 - y_2 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 2. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $a \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ обратима относительно подпространства $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Рассмотрим последовательность операторов (A_N) из $End\ \mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ следующего вида $A_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)$, $N \geq 1$, причем $\| A_N \| = 1$, $N \geq 1$.

В статье получен критерий представимости периодической на бесконечности функции из пространства $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J},X)$, $x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathbb{V}_c(\mathbb{J},X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.*

О гармоническом анализе периодических векторов и операторов

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $End\ \mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [13, 14]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ выполняются следующие условия:*

1. из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);

2. для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x).$$

Если $T: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 1, причем эта модульная структура ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. *С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ (см. [13-18]).*

Определение 8. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем *T-непрерывным*, если функция $\varphi_x: \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$. Непосредственно из последнего определения следует, что $\mathcal{X}_c$ – замкнутый подмодуль из $\mathcal{X}$, причем представление T на нем сильно непрерывно.

Банахово пространство $\mathbb{V}(\mathbb{R}, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$ –модуля (см. [14, 15]) с помощью операции свертки

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{V}(\mathbb{R}, X)$. Однако, формула (4) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathbb{R})$ –модуля в $\mathbb{V}(\mathbb{R}_+, X)$. Тем не менее, такой структурой наделяется фактор-пространство $\mathbb{V}(\mathbb{J}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$.

Далее через $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 9. *Спектром Бёрлинга вектора* $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что

$\Lambda(x) = \mathbb{R} \backslash \{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{f}(\mu_0) \neq 0$ *и* $fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X (см. [13, 14, 19]):

Лемма 2. *Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы свойства:*

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\ supp\hat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(\ supp\hat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = exp(i\lambda_0 t)x,\ t \in \mathbb{R}$;

6) функция $t \mapsto T(t)x: \mathbb{R} \to X$ для x с компактным $\Lambda(x)$ допускает расширение до целой функции.

Определение 10. Пусть $\omega > 0$. Вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ назовем *ω-периодическим (*относительно представления *T),* если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ был ω-периодическим (т.е. $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}.$$

Доказательство теоремы 4 приводится в [8].

Из равенств $\square T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0, t \in \mathbb{R}$, для любого $\square x \in \mathcal{X}_\omega$, следует, что функция $\square_\square \varphi_x: \mathbb{R} \to \mathcal{X},\ \varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},$$

где

$$x_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau)x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Определение 11. Ряд

$$x \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$$

назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$, а векторы $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* вектора x.

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathcal{X}$ абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n \| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} x_n$.

Наряду с изометрическим (не обязательно периодическим) представлением $T: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ рассмотрим представление $\tilde{T}: \mathbb{R} \to End\ \ (End\ \ \mathcal{X}),\ \tilde{T}(t)A = T(t)AT(-t), t \in \mathbb{R},\ A \in End\ \mathcal{X}$.

Определение 12. Пусть $\omega > 0$. Оператор $A \in End\ \mathcal{X}$ назовем *ω −периодическим* (относительно представления *$\tilde{T}$),* если

$$\tilde{T}(\omega)A = T(-\omega)AT(\omega) = A,$$

(т.е. оператор A перестановочен с оператором $T(\omega)$) и функция $t \mapsto T(t)AT(-t): \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ непрерывна в равномерной операторной топологии.

Множество ω –периодических операторов образует замкнутую подалгебру $End_\omega\ \mathcal{X} = (End\ \mathcal{X})_\omega$ из алгебры $End\ \mathcal{X}$.

В соответствии с определением 10 рассмотрим ряд Фурье

$$A \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \tag{5}$$

оператора A относительно представления $\tilde{T}$, где $A_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau)AT(-\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau$.

Концепция рядов Фурье периодических операторов рассматривалась в [13, 18, 20, 21].

В работах [20, 22] была установлена

Теорема 5. *Пусть $A \in End_\omega\mathcal{X}$ – ω –периодический непрерывно обратимый оператор с абсолютно сходящимся рядом Фурье (5). Тогда обратный оператор $B = A^{-1}$ также является ω –периодическим и его ряд Фурье $A^{-1} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ также абсолютно сходится.*

Доказательства основных теорем

Далее через X обозначается банахова алгебра с единицей.

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathbb{V}_c(\mathbb{J}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\| \tilde{x} \| = \inf\limits_{y\in x+\mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)} \| y \|$, где $\tilde{x} = x + \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J}, X)$. Символом $\mathcal{X}_\omega$ обозначим подпространство $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$ фактор-пространства $\mathcal{X}$.

Отметим, что банахово пространство $\mathcal{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{X}.$$

В пространстве $\mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}, X)$ действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\tilde{S}: \mathbb{R} \to End\ \mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}, X)$, действующая по правилу $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)}x$, $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$. Фактор-пространство $\mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$ –модуля с помощью формулы

$$f * \tilde{x} = \widetilde{f * x},\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X).$$

Ясно, что подпространства $\mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $\mathbb{V}_c(\mathbb{R}, X)$ являются замкнутыми подмодулями из $L^1(\mathbb{R})$ –модуля $\mathbb{V}(\mathbb{R}, X)$. Однако, формула (4) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathbb{R})$ –модуля в $\mathbb{V}_c(\mathbb{R}_+, X)$. Тем не менее, такой структурой наделяются фактор-пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_\omega$.

Пусть $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$. В фактор-пространстве $\mathbb{V}_c(\mathbb{R}_+, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}_+, X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий $\tilde{S}: \mathbb{R} \to End(\mathbb{V}_c(\mathbb{R}_+, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}_+, X))$, действующая по правилу

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)}x,\ t \in \mathbb{R},\ \tilde{x} \in \mathbb{V}_c(\mathbb{R}_+, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{R}_+, X),$$

где $S(t)x$ – сдвиг функции x влево (см. формулу (1)) для $t \geq 0$, а для $t < 0$ символ $\widetilde{S(t)}x$ обозначает класс эквивалентности, содержащий функцию $x_t \in \mathbb{V}_c(\mathbb{R}_+, X)$ вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t) & , \quad s+t > 0, \\ -t^{-1}x(0)s & , \quad s+t \leq 0,\ s \geq 0. \end{cases}$$

Структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ –модуля на $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}_\omega$ в частности) наделяется формулой

$$f\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x}d\tau,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ \tilde{x} \in \mathcal{X}, \mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}.$$

Непосредственно из определения представления $\tilde{S}: \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ следует, что $\tilde{S}(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$. Таким образом, функция $t \mapsto \tilde{S}(t)\tilde{x}: \mathbb{R} \to \mathcal{X}_\omega$ является непрерывной ω −периодической функцией, т.е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X}_\omega)$. Следовательно, имеет место

Теорема 6. *Функция $x \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J}, X)$ является ω −периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\tilde{x} = x + \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$ является ω −периодическим вектором относительно представления $\tilde{S} \in End\ \mathcal{X}$.*

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $a \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима на бесконечности и $b \in \mathbb{V}_c(\mathbb{J}, X)$ – одна из обратных к a (относительно подпространства $\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$) функций. Следовательно, $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a} = \tilde{e}$ – единица алгебры $\mathcal{X} = \mathbb{V}_c(\mathbb{J}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$. Рассмотрим оператор $A \in End\ \mathcal{X}$ вида $A\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$.Этот оператор является ω −периодическим относительно представления $\tilde{S} \in End\ \mathcal{X}$, и коэффициенты A_n, $n \in \mathbb{Z}$, его ряда Фурье $A \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ относительно представления $\tilde{S}$ имеют вид $A_n\tilde{x} = \widetilde{a_n}\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, где $a_n \in \mathbb{V}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции a. Поскольку $\| \widetilde{a_n} \| = \inf\limits_{x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J},X)} \| a_n + x_0 \|$, то ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| A_n \| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \| \widetilde{a_n} \|$ абсолютно сходится. Оператор A непрерывно обратим, и обратный к нему оператор $B = A^{-1} \in End\ \mathcal{X}$, имеет вид $B\tilde{x} = \tilde{b}\tilde{x}$. В силу теоремы 5 оператор B также является ω −периодическим относительно представления $\tilde{S}$ и его ряд Фурье $B \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ также абсолютно сходится.

Поскольку $B_n\tilde{x} = \widetilde{b_n}\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, где $\widetilde{b_n}$, n $\in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье класса $\tilde{b}$, и $\| B_n \| = \| \widetilde{b_n} \|$, то $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| B_n \| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \| \widetilde{b_n} \| < \infty$. Откуда получаем абсолютную сходимость ряда Фурье функции b. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть функция $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_N x_0$, $N \geq 1$. Поскольку $x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x_0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = x_1$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $x \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{A}_N x = y$. Покажем, что x представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$. В силу равенств

$$S(\omega)y - y = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x \right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} (S(N\omega)x - x) \right) = 0$$

функция y является периодической, т.е. $y \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J}, X)$, откуда вытекает, что $A_N y = y$ для любого $N \geq 1$. Обозначив $x - y = x_0 \in \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N\to\infty} A_N x_0 = \lim_{N\to\infty} A_N (x - y) = \lim_{N\to\infty} (A_N x - y) = y - y = 0. \qquad (6)$$

По функции x_0 построим класс $\widetilde{x_0} \in \mathcal{X}$, который в силу теоремы 6 является ω-периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X}_\omega = \mathbb{V}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/\mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$. Наряду с операторами A_N, $N \geq 1$, рассмотрим последовательность операторов $(\widetilde{A_N})$, $N \geq 1$, из $End\ \mathcal{X}$ следующего вида $\widetilde{A_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}(k\omega)$. Тогда $\widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \widetilde{x_0}$ для любого $N \geq 1$. С другой стороны, из (6) следует справедливость равенства $\lim\limits_{N\to\infty} \widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \tilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\widetilde{x_0} = \tilde{0}$. А значит,

$x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$, т.е. функция x представима в виде $x = y + x_0$, где $y \in \mathbb{V}_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in \mathbb{V}_0(\mathbb{J}, X)$. Теорема доказана.

Постановка задачи и теорема 2 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете), остальные результаты – при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Список литературы

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. 1970. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 534.

Daletsky Yu. L., Krein M. G. 1970. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Nonlinear Analysis and Its Applications. Nauka, Moscow, 534. (in Russ).

2. Hardy G.H. 1928. A theorem concerning trigonometrical series. J. London Math. Soc., 3 : 12–13.

3. Сенета Е. 1985. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 144.

Seneta E. 1976. Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics. V. 508, Springer-Verlag, Berlin.

4. Левин Б.Я. 1956. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 632.

Levin B. Ya. 1956. Distribution of zeros of entire functions. Gostekhizdat, Moscow, 632. (in Russ).

5. Schmidt M.R. 1925. Uber divergent Folgen und linear Mittelbildurgen. Math. Z., 22(1) : pp. 89–152.

6. Струкова И.И. 2012 Теорема Винера для периодических на бесконечности функций. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика., 12(4) : 34–41.

Strukova I. I. 2012. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 12(4) : 34–41. (in Russ).

7. Струкова И.И. 2013. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом. Уфимск. матем. журн., 5(3) : 144–152.

Strukova I. I. 2013. Wiener's theorem for periodic at infinity functions with summable weighted Fourier series. Ufa Math. J., 5(3) : 144–152.

8. Струкова И.И. 2016 О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн., 57(1) : 186–198.

Strukova I. I. 2016. On Wiener's theorem for functions periodic at infinity. Siberian Math. J., 57(1) : 145–154.

9. Струкова И.И. 2014. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 14(1) : 28–38.

Strukova I. I. 2014. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 14(1) : 28–38. (in Russ).

10. Струкова И.И. 2014. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 14(1) : 98–111.

Strukova I. I. 2015. Harmonic analysis of periodic vectors and functions periodic at infinity. Journal of Mathematical Sciences, 211(6) : 874–885.

11. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика, 3 : 161–165.

Strukova I. I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika, 3 : 161–165. (in Russ).

12. Wiener N. 1932. Tauberian theorems. Ann. of Math., 33(1) : 1–100.

13. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН, 9 : 3–151.

Baskakov A. G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.), 137(4) : 4885–5036.

14. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем., 69(3) : 3–54.

Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math., 69(3) : 439–486.

15. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН, 68(1) : 77–128.

Baskakov A. G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys, 68(1) : 69–116.

16. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. Заметки, 97(2) : 174–190.

Baskakov A. G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes., 97(2) : 164–178.

17. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки., 24(2) : 195–206.

Baskakov A. G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes., 24(1-2) : 606–612.

18. Баскаков А.Г. 1979. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе. Сиб. матем. журн., 20(5) : 942–952.

Baskakov A. G. 1979. Bernšte n-type inequalities in abstract harmonic analysis. Siberian Math. J., 20(5) : 665–672.

19. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: ВГУ, 165.

Baskakov A. G. 1987. Harmonic analysis of linear operators. Voronezh : VSU, 165. (in Russ).

20. Баскаков А.Г. 1992. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц. Матем. Заметки, 52(2) : 17–26.

Baskakov A. G. 1992. Abstract haemonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices. Math. Notes., 52(2) : 764–771.

21. Баскаков А.Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., 61(6) : 3–26.

Baskakov A. G. 1997. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Izvestiya: Mathematics, 61(6) : 1113–1135.

22. Balan R., Krishtal I. 2010. An almost periodic noncommutative Wiener's Lemma. J. Math. Anal. Appl., 370(2) : 339–349.