



УДК 517.958:52/59; 519.711.3

ФУНКЦИИ ГРИНА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II И III ПОРЯДКОВ И ПРИМЕНЕНИЕ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

GREEN'S FUNCTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS II AND III ORDERS AND APPLY TO ONE TASK EIGENVALUES

Н.А. Чеканов¹, **И.Н. Беляева**¹, **Б.М. Башкатов**¹,
Н.Н. Чеканова², **В.Е. Богачев**³, **И.С. Кузнецова**⁴

N.A. Chekanov, I.N. Belyaeva, B.M. Bashkatov,
N.N. Chekanova, V.E. Bogachev, I.S. Kuznetsova

¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

²Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ,
Украина, 61174, г. Харьков, прт. Победы, 55

Kharkov Institute of Banking of National University of Banking, 55 av. Pobedy, Kharkov, 61174, Ukraine

³Белгородский университет кооперации, экономики и права, Россия, 308007, г.Белгород, ул. Садовая, 116 А
Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, 116 A Sadovaya St, Belgorod, 308007, Russia

⁴Алексеевский филиал Белгородского государственного национального исследовательского университета,
Alexeevka branch of Belgorod research university

E-mail: chekanov@bsu.edu.ru; ibelyaeva@bsu.edu.ru; chekanova76@list.ru

Аннотация. В работе описаны алгоритмы символьно-численного построения функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Получены собственные значения для конусообразного стержня и найдена величина внешней нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость. Показано что полученные результаты хорошо согласуются с аналогичными величинами, имеющимися в литературе.

Resume. The paper describes algorithms for symbolic - numerical construction of the Green's function of the boundary value problems for differential equations of the second and third orders. Eigenvalue problem for the tapered rod is considered and the value of the external load, in which the rod loses stability is found. It is shown that the results are in good agreement with those values available in the literature.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, функция Грина, краевая задача, задача на собственное значение, компьютерное моделирование.

Key words: ordinary differential equations, Green's function, boundary value problem, eigenvalue problem, computer modeling.

Постановка проблемы

Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\hat{L}_n y(x) = 0, \quad \hat{L}_n p_0 \frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + p_n \quad (1)$$



и граничные условия
$$\sum_k \alpha_{i,k} y^{(k)}(a) + \sum_k \beta_{i,k} y^{(k)}(b) = 0, \quad \alpha_{i,k}^2 + \beta_{i,k}^2 \neq 0.$$

В общей теории дифференциальных уравнений доказано, что функция Грина существует и единственна при условии, что однородные ОДУ имеют только тривиальное решение $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$. Это соответствует тому, что при рассмотрении задачи на собственные значения имеется собственное значение равное нулю $\lambda = 0$. Нетривиальные решения уравнения $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$, которые находятся из граничных условий для функции Грина, соответствуют собственным значениям $\lambda \neq 0$. Так как функция Грина строится при помощи всех линейно независимых решений соответствующего дифференциального уравнения, то возникает задача их поиска, что представляет собой достаточно сложную задачу, как и построение функции Грина. Поэтому возникает проблема построения функции Грина с применением современных компьютерных систем. Важнейшим понятием в теории дифференциальных уравнений является функция Грина [1-3]. Однако универсальных методов построения функции Грина не существует.

Целью статьи является разработка алгоритма и составление компьютерной программы для символично-численного построения функции Грина в том числе в виде степенных рядов и применение ее для исследования устойчивости конусообразного стержня при наличии внешней осевой нагрузки.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{2a}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2б}$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ есть непрерывные функции вместе с их производными на отрезке $[a, b]$, а $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$ – заданные числа.

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с производными данная задача на отрезке $[a, b]$ имеет только тривиальное решение. Однако, если ослабить требование непрерывности первой производной, например, в точке $x = \xi$, $a \leq \xi \leq b$, то для краевой задачи (2) существует ненулевое решение, которое называется функцией Грина. Обозначим ее как $G(x, \xi)$.

Функция Грина имеет следующие свойства [1, 3-5]:

- 1) является непрерывной вместе со своими производными в точке $x = \xi$;
- 2) ее производная в точке $x = \xi$ терпит разрыв равный

$$\left. \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$



3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2а);

4) удовлетворяет граничным условиям (2б).

При условии, что краевая задача (2) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то существует, как указано выше, одна и только одна функция Грина [4].

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ есть два линейно независимых решения исходного дифференциального уравнения II порядка (2), в этом случае функцию Грина ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & a \leq x \leq \xi \leq b \\ G_R(x, \xi), & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}, \quad (3)$$

где

$$G_L(x, \xi) = \sum_{k=1}^2 (A(\xi) + B(\xi)) \cdot y_k(x), \quad (4a)$$

$$G_R(x, \xi) = \sum_{k=1}^2 (A(\xi) - B(\xi)) \cdot y_k(x). \quad (4б)$$

Здесь функция Грина на отрезке $a \leq x \leq \xi \leq b$ обозначается $G_L(x, \xi)$, а на отрезке $a \leq \xi \leq x \leq b$ – $G_R(x, \xi)$.

Из выражений (4) видно, что для построения функции Грина необходимо определить функции $A_k(\xi)$, $B_k(\xi)$. Для их определения используем свойства функции Грина, в частности, ее непрерывность и скачок первой производной по x в точке $x = \xi$. В результате получаем уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 B_k(\xi) y_k(\xi) = 0 \\ \sum_{k=1}^2 B_k(\xi) y'_k(\xi) = -\frac{1}{2p_0(\xi)} \end{cases} \quad (5)$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} B_1(\xi) y_1(\xi) + B_2(\xi) y_2(\xi) = 0 \\ B_1(\xi) y'_1(\xi) + B_2(\xi) y'_2(\xi) = -\frac{1}{2p(\xi)}. \end{cases} \quad (6)$$

Определитель

$$W(\xi) = y_1(x) y'_2(x) - y_2(x) y'_1(x) \quad (7)$$

неоднородной системы (6) не равен нулю, так как он есть вронскиан двух линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$. Поэтому система (6) определена и имеет единственное решение $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, из которой находим эти решения.



Для определения коэффициентов-функций $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$ используем краевые условия (2б). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) + \beta_{1,0}y_1(b) + \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) + \beta_{1,0}y_2(b) + \beta_{1,1}y_2'(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) - \beta_{1,0}y_1(b) - \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) - \beta_{1,0}y_2(b) - \beta_{1,1}y_2'(b)] \\ \\ A_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) + \beta_{2,0}y_1(b) + \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) + \beta_{2,0}y_2(b) + \beta_{2,1}y_2'(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) - \beta_{2,0}y_1(b) - \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) - \beta_{2,0}y_2(b) - \beta_{2,1}y_2'(b)] \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что если краевая задача (2) является самосопряженной, то есть выполняются условия [6]:

$$p_0(b) \begin{vmatrix} \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} \end{vmatrix} = p_0(a) \begin{vmatrix} \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

тогда функция Грина является симметричной $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Подставляя найденные коэффициенты функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ в выражение (5) находим функцию Грина в аналитическом виде. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ представляют собой степенные ряды, то и функция Грина будет представлена в виде степенных рядов. В соответствии с приведенными выше формулами (3 – 9) был разработан алгоритм и составлена программа GRESA для символично-численного построения функции Грина в среде Maple.

Алгоритм построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка
Ввод:

$p_0(x) \neq 0$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ – коэффициенты-функции в заданном дифференциальном уравнении второго порядка (2);

a, b – граничные точки отрезка $[a, b]$, на котором ищется функция Грина.

$\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$ – коэффициенты в граничных условиях (2б) для конкретной краевой задачи.

Вывод:

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений заданного дифференциального уравнения (2а);

$G_left(x, \xi) = G_L(x, \xi)$, функция Грина на отрезке $a \leq x \leq \xi \leq b$;

$G_right(x, \xi) = G_R(x, \xi)$, функция Грина на отрезке $a \leq \xi \leq x \leq b$.

Описание шагов алгоритма:



1. Нахождения двух линейно независимых решений заданного дифференциального уравнения второго порядка (2а).
2. Ввод матрицы начальных условий и вычисление ее ранга (2б).
3. Проверка краевой задачи на самосопряженность (9).
4. Вычисление и проверка коэффициентов-функций $B1(\xi)$, $B2(\xi)$, исходя из системы уравнений (6).
5. Вычисление и проверка коэффициентов-функций $A1(\xi)$, $A2(\xi)$, исходя из заданных граничных условий (8).
6. Проверка существования функции Грина, то есть неравенство нулю детерминанта системы (8).
7. Построение функции Грина $G_{left}(x, \xi)$ ($G_L(x, \xi)$, $a \leq x \leq \xi \leq b$) и $G_{right}(x, \xi)$ ($G_R(x, \xi)$, $a \leq \xi \leq x \leq b$).
8. Проверка всех свойств функции Грина $G(x, \xi)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx} \right] + \lambda^2 y = 0 \quad (10)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Эта задача описывает продольный изгиб стержня, имеющего форму усеченного конуса [7]. В этой задаче необходимо определить наименьшую критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость. Из теории сопротивления материалов известно, что критическая сила равна произведению модуля Юнга на наименьшее собственное число. Параметр α определяет различие диаметров усеченного конуса.

С помощью разработанной программы по описанному выше алгоритму была построена функция Грина и решена задача на собственные значения (10).

В этой задаче два линейно независимых $y_1(x)$, $y_2(x)$ решения имеют вид:

$$y_1(x) = \alpha \cos \left[\frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \sin \left[\frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right], \quad (11a)$$

$$y_2(x) = -\alpha \sin \left[\frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \cos \left[\frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right]. \quad (11б)$$

Если значения параметра λ не равны собственным значениям, определяемых равенством нулю следующего определителя

$$U = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (12)$$



то получена функция Грина в следующем виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq L \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq L \end{cases}, \quad (13a)$$

где

$$G_L(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(x, \lambda)] \cdot \sin[z_2(\xi, \lambda)] (\alpha^2 + \alpha^3 x - \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_1(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \cdot (\alpha^2 + \alpha^3 L + \xi \alpha^3 + \xi \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (13b)$$

$$G_R(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(\xi, \lambda)] \cdot \sin[z_2(x, \lambda)] (\alpha^2 + \xi \alpha^3 - \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_1(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \cdot (\alpha^2 + \alpha^3 L + x \alpha^3 + x \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (13b)$$

где $z(L, \lambda) = \frac{\lambda L}{1 + \alpha L}$, $z_1(x, \lambda) = \frac{\lambda x}{1 + \alpha x}$, $z_2(\xi, \lambda) = \frac{\lambda(-\xi + L)}{(1 + \alpha L)(1 + \alpha \xi)}$.

Если детерминант (12) не равен нулю, то существуют собственные значения λ , которые определяются из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda^2 - \alpha^2 L \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda L}{1 + \alpha L}\right) \lambda + \alpha^2 + \alpha^3 L = 0 \quad (14)$$

В книге [7] приведена приближенная формула (в случае $\alpha \ll 1$) для вычисления наименьшего собственного значения краевой задачи (10) в виде:

$$\frac{1}{\lambda^4} = L^4 \left(\frac{1}{90} - \frac{2}{45} \alpha \right), \quad (15)$$

которая дает отклонение от точного значения меньше, чем на 5%.

Для конкретных значений параметров $L = 1$ и $\alpha = 0.01$ нами было проведено сравнение значения наименьшего собственного значения, полученного по точной формуле (14) с результатами, следующими из формулы Михлина (15). По формуле (14) была получена величина собственного значения равная $\lambda = 3.17$, а по формуле (15) – $\lambda = 3.11$, которые отличаются менее, чем на 2%.

Для наглядности на рис. 1 приведены графики двух функций

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 + \alpha^3 L, \quad f_2(\lambda) = -\alpha^2 L \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda L}{1 + \alpha L}\right) \lambda, \quad (16)$$

из точек пересечения которых можно также найти величины первых собственных значений, которые согласуются с полученными выше результатами.

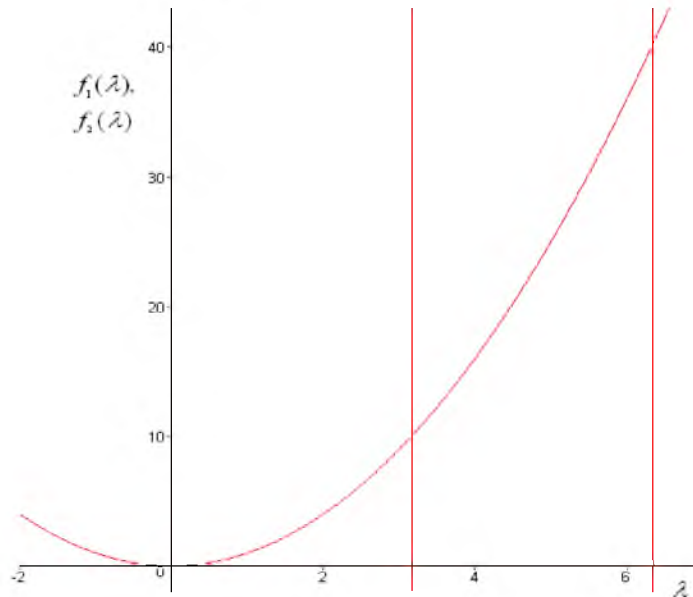


Рис 1. Графики функций (16)

Fig 1. Graphs of functions (16)

Рассмотрим дифференциальное уравнение II порядка вида

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (17a)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (17б)$$

В случае, если дифференциальное уравнение (17) не содержит регулярных особых точек в окрестности точки $x = x_0$, то линейно независимые решения y_1 и y_2 могут быть представлены виде степенных рядов:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=2} c_k^{(1)} (x - x_0)^k, \quad (18a)$$

$$y_2(x) = (x - x_0) + \sum_{k=2} c_k^{(2)} (x - x_0)^k. \quad (18б)$$

Коэффициенты $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ определяются посредством подстановки рядов (18) в уравнение (17a) и приравниванием коэффициентов при различных степенях независимой переменной.

При наличии полюсов не выше второго порядка в точке $x = x_0$ решение уравнения (17) ищется в виде

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (c_0 \neq 0), \quad (19)$$

где показатель ρ находится из определяющего уравнения

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \quad (20)$$

а коэффициенты a_0 , b_0 из разложений:



$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k}{x-x_0}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^2}. \quad (21)$$

Если корни определяющего уравнения (20) различны ($\rho_1 \geq \rho_2$), но их разность $\rho_1 - \rho_2$ не равна целому положительному числу, то линейно независимые решения имеют вид:

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)} \neq 0), \quad (22a)$$

$$y_2(x) = (x-x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(2)} \neq 0), \quad (22б)$$

в которых коэффициенты $c_0^{(1)}$ и $c_0^{(2)}$ остаются произвольными.

Если разность ($\rho_1 - \rho_2$) – целое положительное число, то одно решение, соответствующее корню ρ_1 , по-прежнему имеет вид

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \cdot (x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)} = 1), \quad (23)$$

а второе линейно независимое решение определяется рядом, содержащим логарифмический член:

$$y_2(x) = (x-x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} \cdot (x-x_0)^k + \eta \cdot y_1(x) \cdot \ln(x-x_0) \quad (24)$$

Если случится, что $\eta = 0$, то второе линейно независимое решение будет иметь вид обобщенного степенного ряда.

В случае равенства $\rho_1 - \rho_2 = 0$ одно частное решение уравнения (17а) имеет вид (23), а второе – вид (24), в котором коэффициент $\eta \neq 0$.

Из общего вида решений дифференциального уравнения (17а) следует, что линейно независимые решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$y_1(x): \begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}, \quad y_2(x): \begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}. \quad (23)$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (17а) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x). \quad (24)$$

Зная общее решение (24) и основные свойства функции Грина (см. раздел 3.1), построим функцию Грина для дифференциального уравнения (17а) с однородными граничными условиями (17б) следующим образом. Из общего решения (24) находим частные решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$, которые удовлетворяют однородным краевым условиям $u_1(a) = 0$ и $u_2(b) = 0$. Легко видеть, что такими частными решениями являются функции



$$u_1(x) = y_2(x), \quad (25a)$$

$$u_2(x) = y_1(x) \cdot y_2(b) - y_1(b) \cdot y_2(x) \quad (25b)$$

Тогда в соответствии с общими правилами [4] функция Грина строится следующим образом

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{W(\xi)p_0(\xi)}, & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(\xi)p_0(\xi)}, & a \leq \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$W(\xi) \equiv W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix} \quad (27)$$

функциональный определитель Вронского.

Для краевой задачи

$$y'' - y = 0 \quad (28a)$$

с граничными условиями

$$y(x=0) = 0, \quad y(x=1) = 0 \quad (28b)$$

известна точная функция Грина в виде [4]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (29a)$$

где

$$G_L = \frac{\sinh(x)\sinh(\xi-1)}{\sinh(1)}, \quad G_R = \frac{\sinh(\xi)\sinh(x-1)}{\sinh(1)} \quad (29b)$$

С использованием разработанной программы нами была получена функция Грина для этой краевой задачи в виде обобщенных степенных рядов.

$$\begin{aligned} G_L^{(15)} = & \frac{x}{175194229827984272546525518233600000} (1307674368000 + \\ & + x^{14} + 217945728000x^2 + 10897286400x^4 + 259459200x^6 + 3603600x^8 + \\ & + 32760x^{10} + 210x^{12}) (-133973896036466681395200 - \\ & - 66986948018233340697600\xi^2 - 5582245668186111724800\xi^4 - \\ & - 186074855606203724160\xi^6 - 3322765278682209360\xi^8 - \\ & - 36919614207580104\xi^{10} - 279694047027122\xi^{12} - 1536780478171\xi^{14} + \\ & + 175912452831694715136000\xi + 29318742138615785856000\xi^3 + \\ & + 1465937106930789292800\xi^5 + 34903264450733078400\xi^7 + \\ & + 484767561815737200\xi^9 + 4406977834688520\xi^{11} + \\ & + 28249857914670\xi^{13} + 134523132927\xi^{15}). \end{aligned} \quad (30a)$$

$$G_R^{(15)} = \frac{\xi}{175194229827984272546525518233600000} (-1536780478171x^{14} - 133973896036466681395200 - 66986948018233340697600x^2 - 5582245668186111724800x^4 - 186074855606203724160x^6 - 3322765278682209360x^8 - 36919614207580104x^{10} - 279694047027122x^{12} + 175912452831694715136000x + 29318742138615785856000x^3 + 1465937106930789292800x^5 + 34903264450733078400x^7 + 484767561815737200x^9 + 4406977834688520x^{11} + 28249857914670x^{13} + 134523132927x^{15})(1307674368000 + 217945728000\xi^2 + 10897286400\xi^4 + 259459200\xi^6 + 3603600\xi^8 + 32760\xi^{10} + 210\xi^{12} + \xi^{14}) \quad (30б)$$

На рис. 2.1-2.3 представлено сравнение результатов расчета значений точной функции Грина (29) и вычисленной по нашей программе (30).

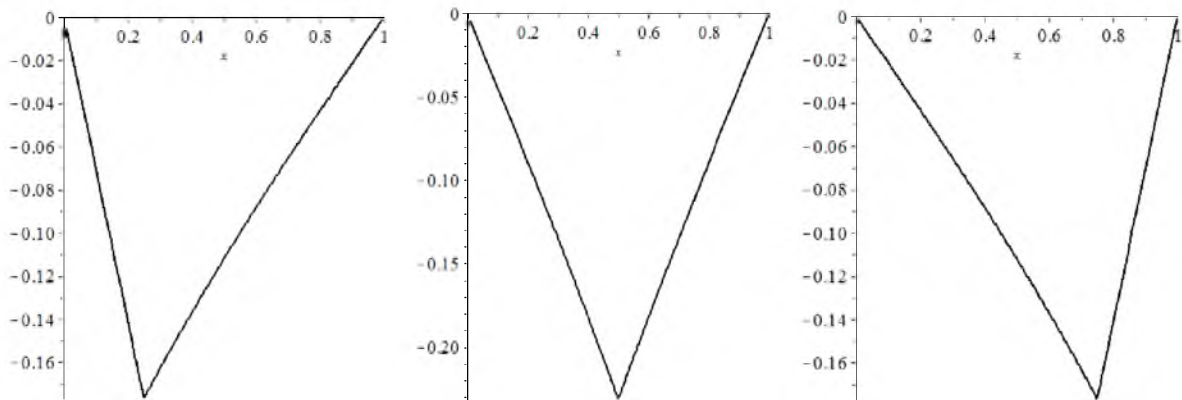


Рис. 2.1. Теоретическая (сплошная) и практически вычисленная (точки) функция Грина для $\xi = 0.25$ (слева), $\xi = 0.5$ (центр) и $\xi = 0.75$ (справа) при $n = 15$

Fig. 2.1. Theoretical (solid) and calculated (point) Green function for $\xi = 0.25$ (left), (center) and (right)

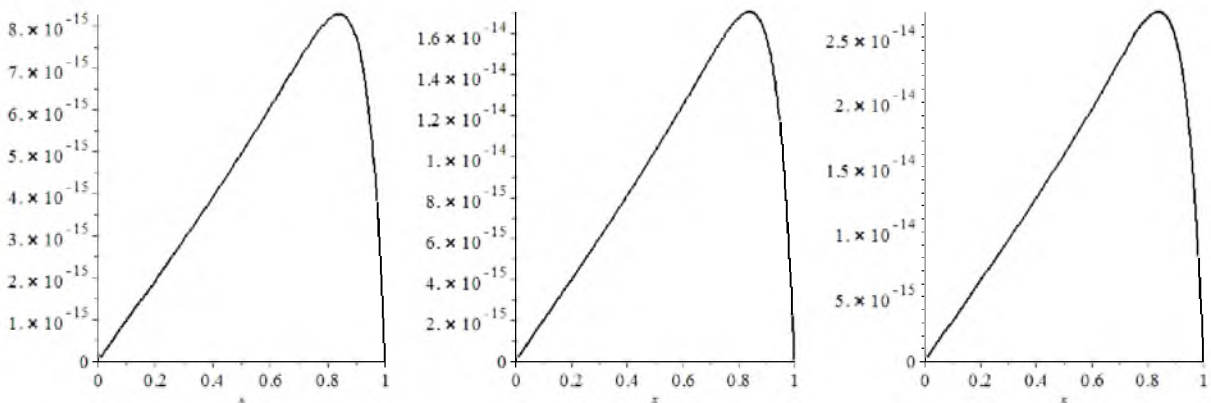


Рис. 2.2. Абсолютная погрешность вычислений $\Delta = G_{theor} - G_{prac}$ для $\xi = 0.25$ (слева), $\xi = 0.5$ (центр) и $\xi = 0.75$ (справа) при $n = 15$

Fig. 2.1. Absolute error calculations for $\Delta = G_{theor} - G_{prac}$ for $\xi = 0.25$ (left), $\xi = 0.5$ (center) и $\xi = 0.75$ (right) when $n = 15$

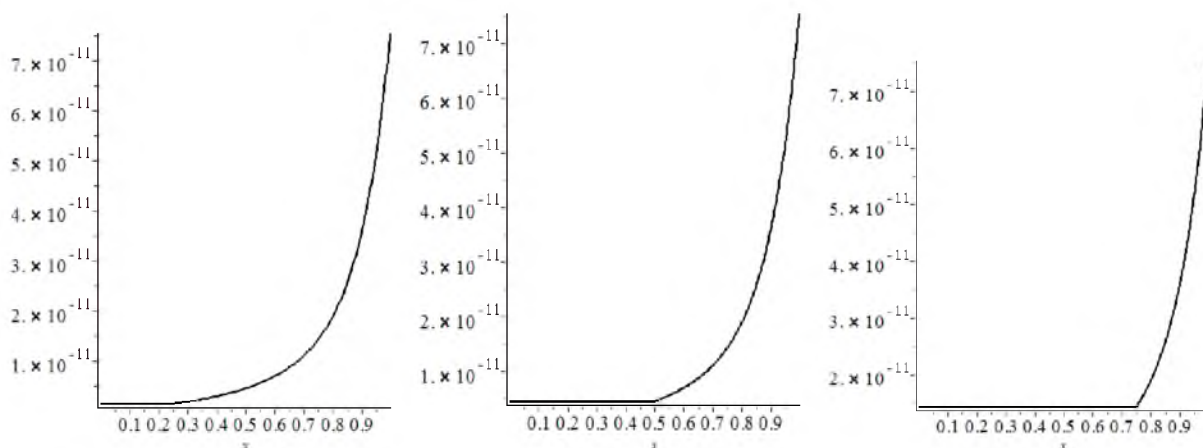


Рис. 2.3. Относительная погрешность $\varepsilon = \Delta / G_{theor} \cdot 100\%$ для $\xi = 0.25$ (слева), $\xi = 0.5$ (центр) и $\xi = 0.75$ (справа) при $n = 15$

Fig. 2.3. The relative error $\varepsilon = \Delta / G_{theor} \cdot 100\%$ for $\xi = 0.25$ (left), $\xi = 0.5$ (center) and $\xi = 0.75$ (right) when $n = 15$

Из рис. 2.2 видно, что точная функция Грина и ее приближение совпадают с абсолютной точностью менее чем $8 \cdot 10^{-11}$.

Дифференциальные уравнения зго порядка

В науке и технике чаще всего используется дифференциальные уравнения второго и четвертого порядков [2] вместе с краевыми условиями. Однако, в некоторых случаях необходимо знать решения и функцию Грина для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [8, 9, 10]. Обзоры работ, относящихся к этому уравнению имеются в работах [11, 12]. Это нелинейное уравнение второго порядка впервые было введено в работе киевского профессора В.П. Ермакова в 1880 году [13]. Найти решение нелинейного уравнения является сложной задачей, однако, иногда их решение можно найти рассматривая линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, как например, это сделано в работах [3, 9].

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$p_0(x)y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \quad (31)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \alpha_{1,2}y''(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) + \beta_{1,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \alpha_{2,2}y''(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) + \beta_{2,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{3,0}y(a) + \alpha_{3,1}y'(a) + \alpha_{3,2}y''(a) + \beta_{3,0}y(b) + \beta_{3,1}y'(b) + \beta_{3,2}y''(b) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ есть непрерывные функции на этом отрезке $[a, b]$.

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с первой и второй производными данная задача на отрезке $[a, b]$ имеет только тривиальное решение и не существует другого решения.

Однако, если ослабить требования непрерывности второй производной, например в точке $x = \xi$,



$a \leq \xi \leq b$, то для краевой задачи (31), (32) существует ненулевое решение, которое называется функцией Грина. Обозначим как $G(x, \xi)$.

Вначале приведем основные свойства функции Грина:

- 1) является непрерывной вместе со своей первой производной в точке $x = \xi$;
- 2) ее вторая производная в точке $x = \xi$ терпит разрыв равный

$$\left. \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

- 3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (31);
- 4) удовлетворяет граничным условиям (32).

Таким образом, если краевая задача (31), (32) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то существует одна и только одна функция Грина.

Пусть краевая задача (31), (32) такова, что система Maple позволяет получить в явном аналитическом виде три линейно независимых решения $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ исходного дифференциального уравнения третьего порядка (31).

Тогда в разработанной нами программе (см. Приложение Д) функция Грина ищется в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ G_R(x, \xi), & a \leq \xi \leq x \leq b, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$G_L(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) + B_k(\xi)] \cdot y_k(x), \tag{34a}$$

$$G_R(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) - B_k(\xi)] \cdot y_k(x). \tag{34б}$$

Например, из выражений (34) видно, что для построения функции Грина необходимо определить функции $A_k(\xi), B_k(\xi)$. Для их определения используем вышеуказанные свойства функции Грина. Из ее свойств 1), 2) и 4) в результате получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $B_1(\xi), B_2(\xi), B_3(\xi)$.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 B_k(\xi) y_k(\xi) = 0, \\ \sum_{k=1}^3 B_k(\xi) y'_k(\xi) = 0, \\ \sum_{k=1}^3 B_k(\xi) y''_k(\xi) = -\frac{1}{2p_0(\xi)}. \end{cases} \tag{35}$$

Определитель этой системы



$$W(\xi) \equiv W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \quad (36)$$

не равен нулю, так как он есть вронскиан трех линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$

Поэтому система (35) определена и имеет единственное решение $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $B_3(\xi)$.

Затем из граничных условий (32) при уже известных коэффициентах-функциях $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $B_3(\xi)$ находим, если они существуют, коэффициенты-функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, $A_3(\xi)$ из системы уравнений (37):

$$\begin{aligned} & A_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) + \beta_{1,0}y_1(b) + \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ & A_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) + \beta_{1,0}y_2(b) + \beta_{1,1}y_2'(b)] + \\ & A_3(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) + \beta_{1,0}y_2(b) + \beta_{1,1}y_2'(b)] = \\ & B_1(\xi) [\alpha_{1,0}y_1(a) + \alpha_{1,1}y_1'(a) - \beta_{1,0}y_1(b) - \beta_{1,1}y_1'(b)] + \\ & B_2(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) - \beta_{1,0}y_2(b) - \beta_{1,1}y_2'(b)] + \\ & B_3(\xi) [\alpha_{1,0}y_2(a) + \alpha_{1,1}y_2'(a) - \beta_{1,0}y_2(b) - \beta_{1,1}y_2'(b)] \quad , \quad (37a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) + \beta_{2,0}y_1(b) + \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ & A_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) + \beta_{2,0}y_2(b) + \beta_{2,1}y_2'(b)] + \\ & A_3(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) + \beta_{2,0}y_2(b) + \beta_{2,1}y_2'(b)] = \\ & B_1(\xi) [\alpha_{2,0}y_1(a) + \alpha_{2,1}y_1'(a) - \beta_{2,0}y_1(b) - \beta_{2,1}y_1'(b)] + \\ & B_2(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) - \beta_{2,0}y_2(b) - \beta_{2,1}y_2'(b)] + \\ & B_3(\xi) [\alpha_{2,0}y_2(a) + \alpha_{2,1}y_2'(a) - \beta_{2,0}y_2(b) - \beta_{2,1}y_2'(b)] \quad , \quad (37б) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_1(\xi) [\alpha_{3,0}y_1(a) + \alpha_{3,1}y_1'(a) + \beta_{3,0}y_1(b) + \beta_{3,1}y_1'(b)] + \\ & A_2(\xi) [\alpha_{3,0}y_2(a) + \alpha_{3,1}y_2'(a) + \beta_{3,0}y_2(b) + \beta_{3,1}y_2'(b)] + \\ & A_3(\xi) [\alpha_{3,0}y_2(a) + \alpha_{3,1}y_2'(a) + \beta_{3,0}y_2(b) + \beta_{3,1}y_2'(b)] = \\ & B_1(\xi) [\alpha_{3,0}y_1(a) + \alpha_{3,1}y_1'(a) - \beta_{3,0}y_1(b) - \beta_{3,1}y_1'(b)] + \\ & B_2(\xi) [\alpha_{3,0}y_2(a) + \alpha_{3,1}y_2'(a) - \beta_{3,0}y_2(b) - \beta_{3,1}y_2'(b)] + \\ & B_3(\xi) [\alpha_{3,0}y_2(a) + \alpha_{3,1}y_2'(a) - \beta_{3,0}y_2(b) - \beta_{3,1}y_2'(b)] \quad , \quad (37в) \end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты-функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, $A_3(\xi)$, $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $B_3(\xi)$ в выражение (34), находим функцию Грина в аналитическом виде.

В соответствии с приведенными выше формулами (33)-(37) был разработан алгоритм и составлена программа GRETA для символьно-численного построения функции Грина в среде Maple. Текст этой программы приведен в Приложении Д.



В разработанной программе GRETA в явном аналитическом виде вычисляется функция Грина $G_{left}(x, \xi)$ ($G_L(x, \xi)$) и $G_{right}(x, \xi)$ ($G_R(x, \xi)$).

Для граничной задачи

$$y''' + 4xy' + 2y = 0 \tag{38}$$

с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) - y'(1) = 0$ была получена функция Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ G_R(x, \xi), & 1 \leq \xi \leq x \leq 2, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$G_L(x, \xi) = \frac{22949 \left(\frac{3187}{30645} Ai(-\xi) - \frac{10723}{20022} Bi(-\xi) \right)}{62270 \left(Ai(-\xi) Bi(1, -\xi) - Ai(1, -\xi) Bi(-\xi) \right)^{-2}} \cdot \left[\frac{38501}{23373} Ai(-\xi) Bi^2(-x) - \frac{37778}{13241} Ai(-\xi) Ai(-x) Bi(-x) - \frac{20042}{12167} Ai(-x) Bi(-x) Bi(-\xi) + \frac{37273}{13064} Ai^2(-x) Bi(-\xi) - \frac{1}{10000000000} Bi(-\xi) Bi^2(-x) \right], \tag{40a}$$

$$G_R(x, \xi) = - \frac{22949 \left(\frac{10723}{20022} Bi(-x) - \frac{3187}{30645} Ai(-x) \right)}{62270 \left(Ai(-\xi) Bi(1, -\xi) - Ai(1, -\xi) Bi(-\xi) \right)^{-2}} \cdot \left[\frac{78585}{47707} Bi(-x) Bi(-\xi) Ai(-\xi) - \frac{37273}{13064} Bi(-x) Ai^2(-\xi) - \frac{1}{10000000000} Bi(-x) Bi^2(-\xi) - \frac{20042}{12167} Ai(-x) Bi^2(-\xi) + \frac{37273}{13064} Ai(-x) Bi(-\xi) Ai(-\xi) + \frac{1}{23255813953} Ai(-x) Ai^2(-\xi) \right]. \tag{40б}$$

где Ai , Bi – линейно независимые функции Эйри [14].

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$p_0(x)y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \tag{41}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \alpha_{1,2}y''(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) + \beta_{1,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \alpha_{2,2}y''(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) + \beta_{2,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{3,0}y(a) + \alpha_{3,1}y'(a) + \alpha_{3,2}y''(a) + \beta_{3,0}y(b) + \beta_{3,1}y'(b) + \beta_{3,2}y''(b) &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$



где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ есть непрерывные функции вместе с непрерывными производными первого и второго порядков на отрезке $[a, b]$, $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,0}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$, $\beta_{3,0}$, $\beta_{3,1}$, $\beta_{3,2}$ – коэффициенты в граничных условиях (42) для

конкретной краевой задачи, $\sum_i \sum_k \alpha_{ik}^2 \neq 0$, $\sum_i \sum_k \beta_{ik}^2 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2$.

Для построения функции Грина краевой задачи (41-42) вначале, решая задачу Коши в точке x_0 , находим линейно независимые решения для уравнения (41) в виде рядов:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=3} c_k^{(1)} \cdot (x - x_0)^k, \quad (43a)$$

$$y_2(x) = (x - x_0) + \sum_{k=3} c_k^{(2)} \cdot (x - x_0)^k, \quad (43б)$$

$$y_3(x) = (x - x_0)^2 / 2 + \sum_{k=3} c_k^{(3)} \cdot (x - x_0)^k, \quad (43в)$$

где $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $c_k^{(3)}$ – числовые коэффициенты.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & a \leq x \leq \xi \leq b \\ G_R(x, \xi), & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}, \quad (44a)$$

где

$$G_L(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) + B_k(\xi)] \cdot y_k(x), \quad (44б)$$

$$G_R(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) - B_k(\xi)] \cdot y_k(x). \quad (44в)$$

Используя свойства функции Грина, приведенные в разделе 4.1, и в соответствии с теорией, изложенной в этом же разделе, находим коэффициенты-функции $A_k(\xi)$, $B_k(\xi)$ и с их помощью строим функцию Грина по формулам (44). Так как линейно независимые решения (43) представлены степенными рядами, то и функция Грина также находится в виде степенных рядов.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad (45a)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(0) = 0. \quad (45б)$$

Для уравнения (45a) решения

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{3x} \quad (46)$$

составляют фундаментальную систему решений. Согласно предыдущему разделу 4.1. функция Грина $G(x, \xi)$ может быть построена из общих решений по формулам:



$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ G_R(x, \xi), & a \leq \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (47)$$

где

$$G_L(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A(\xi) + B(\xi)] \cdot y_k(x), \quad (48a)$$

$$G_R(x, \xi) = \sum_{k=1}^3 [A(\xi) - B(\xi)] \cdot y_k(x). \quad (48b)$$

Из условий непрерывности функции Грина, ее первой производной, а также скачка второй производной получаем систему для определения коэффициентов функций $B_1(\xi), B_2(\xi), B_3(\xi)$:

$$\begin{cases} B_1(\xi)y_1(\xi) + B_2(\xi)y_2(\xi) + B_3(\xi)y_3(\xi) = 0, \\ B_1(\xi)y_1'(\xi) + B_2(\xi)y_2'(\xi) + B_3(\xi)y_3'(\xi) = 0, \\ B_1(\xi)y_1''(\xi) + B_2(\xi)y_2''(\xi) + B_3(\xi)y_3''(\xi) = -1/(2P_0(\xi)) \end{cases} \quad (49)$$

Система (49) всегда разрешима и имеет единственное решение, так как $P_0(\xi) \neq 0$, а, следовательно, главный определитель этой системы есть вронскиан $W[y_1, y_2, y_3]$, который не равен нулю.

Из системы (49) находим решения:

$$B_1(\xi) = -\frac{1}{4}e^{-\xi}, \quad B_2(\xi) = \frac{1}{2}e^{-2\xi}, \quad B_3(\xi) = -\frac{1}{4}e^{-3\xi}. \quad (50)$$

Для нахождения коэффициентов-функций $A_i(\xi), (i=1, 2, 3)$, воспользуемся граничными условиями (45б) и в результате получаем систему

$$\begin{cases} A_1(\xi) + A_2(\xi) + A_3(\xi) = -B_1(\xi) - B_2(\xi) - B_3(\xi), \\ A_1(\xi) + 4A_2(\xi) + 9A_3(\xi) = -B_1(\xi) - 4B_2(\xi) - 9B_3(\xi), \\ A_1(\xi) + eA_2(\xi) + e^2A_3(\xi) = B_1(\xi) + eB_2(\xi) + e^2B_3(\xi). \end{cases} \quad (51)$$

Из этой системы находим решения:

$$A_1(\xi) = -\frac{1}{4(3e^2 - 8e + 5)} \left(-20e^{1+\xi} + 5e^{2\xi} + 10e^2 + 8e^{1-2\xi} - 3e^{2+2\xi} \right) e^{-3\xi}, \quad (52a)$$

$$A_2(\xi) = \frac{1}{2(3e^2 - 8e + 5)} \left(-8e^{1+\xi} + 8e^{2\xi} + 8e^2 - 5e^\xi - 3e^{2+\xi} \right) e^{-3\xi}, \quad (52b)$$

$$A_3(\xi) = -\frac{1}{4(3e^2 - 8e + 5)} \left(-12e^{1+\xi} - 5 + 6e^{2\xi} + 3e^2 + 8e \right) e^{-3\xi}. \quad (52b)$$

Подставляя найденные выражения для $A_k(\xi), B_k(\xi), (k=1, 2, 3)$, в формулы (4.6.2), находим точную функцию Грина для краевой задачи (45) в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (53)$$

где



$$G_L(x, \xi) = \frac{e^x \left(-5/2e^{-\xi} + 5e^{1-2\xi} - 5/2e^{2-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5} + \frac{e^{2x} \left(4e^{-\xi} - 8e^{1-2\xi} + 4e^{2-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5} +$$

$$+ \frac{e^{3x} \left(-3/2e^{-\xi} + 3e^{1-2\xi} - 3/2e^{2-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5}, \quad (54a)$$

$$G_R(x, \xi) = \frac{e^x \left(3/2e^{2-\xi} - 4e^{1-\xi} + 5e^{1-2\xi} - 5/2e^{2-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5} + \frac{e^{2x} \left(4e^{-\xi} - 3e^{2-2\xi} - 5e^{-2\xi} + 4e^{2-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5} +$$

$$+ \frac{e^{3x} \left(-3/2e^{-\xi} + 3e^{1-2\xi} + 5/2e^{-3\xi} - 4e^{1-3\xi} \right)}{3e^2 - 8e + 5}. \quad (54b)$$

С помощью разработанной программы GRETSA для краевой задачи (45) была получена приближенная функция Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (55)$$

где

$$G_L^{(7)} = \frac{19663}{35489}x - \frac{82489}{35489}x\xi + \frac{308167}{70978}x\xi^2 - \frac{216293}{212934}x^3 - \frac{1059601}{212934}x\xi^3 + \frac{907379}{212934}x^3\xi - \frac{98315}{70978}x^4$$

$$+ \frac{3462703}{851736}x\xi^4 - \frac{3389837}{425868}x^3\xi^2 + \frac{412445}{70978}x^4\xi - \frac{4699457}{4258680}x^5 - \frac{10969609}{4258680}x\xi^5 + \frac{11655611}{1277604}x^3\xi^3$$

$$- \frac{1540835}{141956}x^4\xi^2 + \frac{19714871}{4258680}x^5\xi - \frac{137641}{212934}x^6 + \frac{46783051}{12776040}x\xi^6 - \frac{38089733}{5110416}x^3\xi^4 + \frac{5298005}{425868}x^4\xi^3$$

$$- \frac{73651913}{8517360}x^5\xi^2 + \frac{577423}{212934}x^6\xi - \frac{7783739}{25552080}x^7 + \frac{120665699}{25552080}x^3\xi^5 - \frac{17313515}{1703472}x^4\xi^4$$

$$+ \frac{253244639}{25552080}x^5\xi^3 - \frac{2157169}{425868}x^6\xi^2 + \frac{228577019}{178864560}x^7\xi - \frac{514613561}{76656240}x^3\xi^6 + \frac{10969609}{1703472}x^4\xi^5$$

$$- \frac{827586017}{102208320}x^5\xi^4 + \frac{7417207}{1277604}x^6\xi^3 - \frac{853930757}{357729120}x^7\xi^2 - \frac{46783051}{5110416}x^4\xi^6 + \frac{2621736551}{511041600}x^5\xi^5$$

$$- \frac{24238921}{5110416}x^6\xi^4 + \frac{2936154371}{1073187360}x^7\xi^3 - \frac{11181149189}{1533124800}x^5\xi^6 + \frac{76787263}{25552080}x^6\xi^5 - \frac{9595150013}{4292749440}x^7\xi^4$$

$$- \frac{327481357}{76656240}x^6\xi^6 + \frac{4342398077}{3066249600}x^7\xi^5 - \frac{18519404903}{9198748800}x^7\xi^6, \quad (56a)$$

$$G_R^{(7)} = \frac{19663}{35489}x + 1/2\xi^2 - \frac{117978}{35489}x\xi + 1/2x^2 - \xi^3 + \frac{521101}{70978}x\xi^2 - 3x^2\xi - \frac{3359}{212934}x^3 + \frac{25}{24}\xi^4$$

$$- \frac{324471}{35489}x\xi^3 + \frac{25}{4}x^2\xi^2 + \frac{3359}{35489}x^3\xi - \frac{292555}{851736}x^4 - 3/4\xi^5 + \frac{6656713}{851736}x\xi^4 - 15/2x^2\xi^3$$

$$- \frac{195827}{425868}x^3\xi^2 + \frac{292555}{141956}x^4\xi - \frac{1505447}{4258680}x^5 + \frac{301}{720}\xi^6 - \frac{3608633}{709780}x\xi^5 + \frac{301}{48}x^2\xi^4 + \frac{54079}{70978}x^3\xi^3$$

$$- \frac{7807831}{1703472}x^4\xi^2 + \frac{1505447}{709780}x^5\xi - \frac{5834731}{25552080}x^6 + \frac{31962119}{6388020}x\xi^6 - \frac{161}{40}x^2\xi^5 - \frac{3807359}{5110416}x^3\xi^4$$

$$+ \frac{1627427}{283912}x^4\xi^3 - \frac{39369539}{8517360}x^5\xi^2 + \frac{5834731}{4258680}x^6\xi - \frac{2886257}{25552080}x^7 + \frac{605}{144}x^2\xi^6 + \frac{2218579}{4258680}x^3\xi^5$$

$$-\frac{100407955}{20441664}x^4\xi^4 + \frac{8105023}{1419560}x^5\xi^3 - \frac{30301211}{10220832}x^6\xi^2 + \frac{2886257}{4258680}x^7\xi - \frac{26994701}{76656240}x^3\xi^6. \quad (566)$$

На рис. 3 представлены графики функции Грина и ее производных.

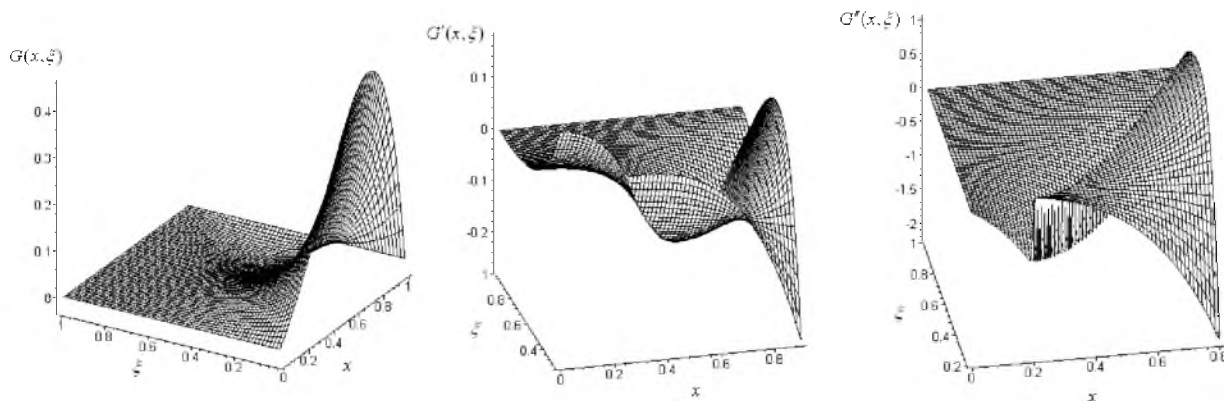


Рис. 3. Трехмерные графики функции Грина (56) (слева), ее первой производной (в центре) и ее второй производной (справа)

Fig. 3. Three-dimensional plots of the green function (56) (left), its first derivative (middle) and its second derivative (right)

Было проведено численное сравнение точной функции Грина (54) и ее приближенного значения (56), которое приведено на рис. 4.1-4.2.

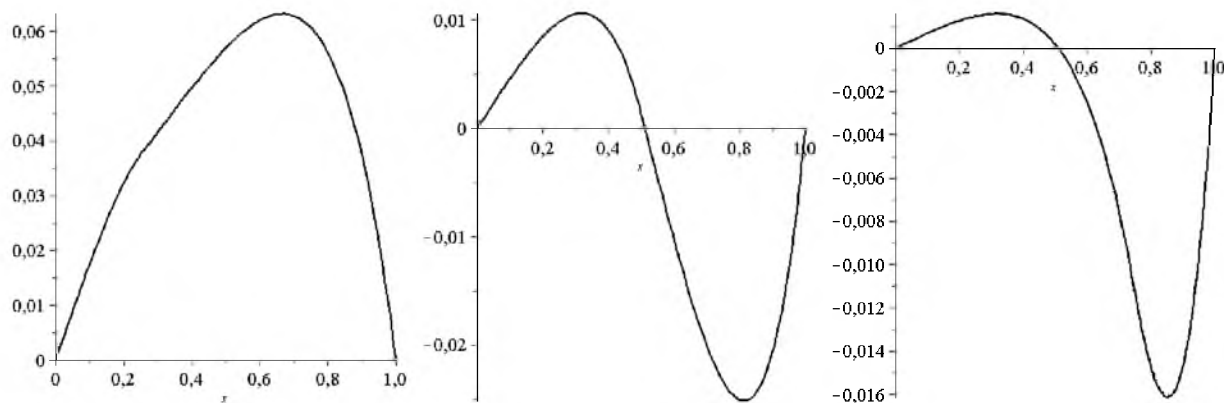


Рис. 4.1. Теоретически (54) (сплошная) и практически (56) вычисленные (точки) функции Грина для $\xi = 0.25$ (слева), $\xi = 0.5$ (центр) и $\xi = 0.75$ (справа) при $n = 13$

Fig. 4.1. Theoretically (54) (solid) and (56) are computed (dots) Green's functions for $\xi = 0.25$ (left), $\xi = 0.5$ (center) and $\xi = 0.75$ (right) when $n = 13$

Абсолютная погрешность Δ при $\xi = 0.25$, $\xi = 0.5$, $\xi = 0.75$ менее $8 \cdot 10^{-7}$, $1,5 \cdot 10^{-6}$, $0,00015$, соответственно. $\Delta = |G_{theor} - G_{calc}|$. Относительная погрешность ε при $\xi = 0.25$, $\xi = 0.5$, $\xi = 0.75$ менее $0,038\%$, 3% , $1,3\%$, соответственно. $\varepsilon = \Delta / G_{theor} \cdot 100\%$

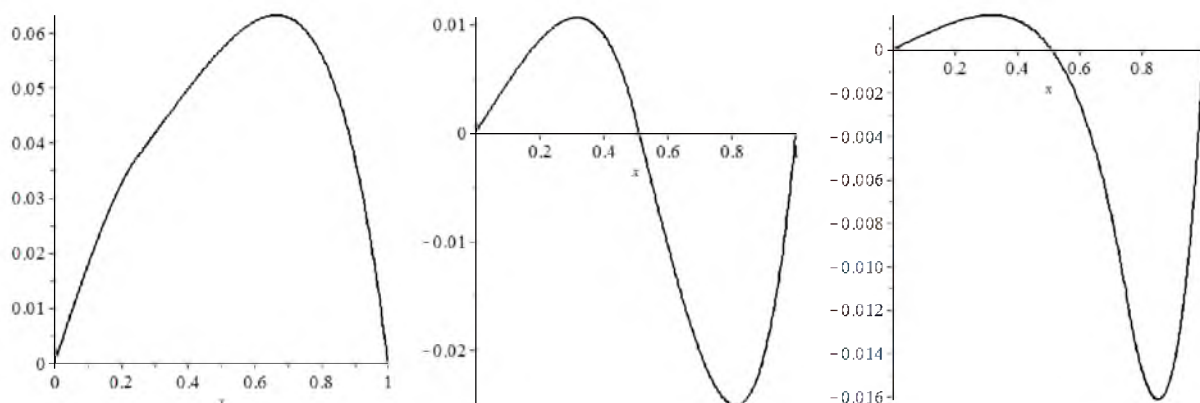


Рис. 4.2. Теоретически (54) (сплошная) и практически (56) вычисленные (точки) функции Грина для

$\xi = 0.25$ (слева), $\xi = 0.5$ (центр) и $\xi = 0.75$ (справа) при $n = 16$

Fig. 4.2. Theoretically (54) (solid) and (56) are computed (dots) Green's functions for $\xi = 0.25$ (left), $\xi = 0.5$

(center) and $\xi = 0.75$ (right) $n = 16$

Абсолютная погрешность Δ при $\xi = 0.25$, $\xi = 0.5$, $\xi = 0.75$ менее $6 \cdot 10^{-9}$, $8 \cdot 10^{-9}$, $6 \cdot 10^{-7}$, соответственно. $\Delta = |G_{theor} - G_{calc}|$. Относительная погрешность ε при $\xi = 0.25$, $\xi = 0.5$, $\xi = 0.75$ менее $4 \cdot 10^{-5}\%$, $0,003\%$, $6 \cdot 10^{-3}\%$, соответственно. $\varepsilon = \Delta / G_{theor} \cdot 100\%$

Из приведенных расчетов следует, что полученная нами приближенная функция Грина (56) отличается от точной (54) на $1,3\%$ и $6 \cdot 10^{-3}\%$ при $n = 13$ и $n = 16$, соответственно.

Выводы

В работе разработаны алгоритмы для символьно-численного построения функции Грина дифференциальных уравнений второго и третьего порядка, согласно которому составлены программы для символьно-численного построения функции Грина, с помощью функции Грина дифференциального уравнения второго порядка исследована задача на устойчивость конусообразного стержня при наличии внешней нагрузки. В этой задаче найдены собственные значения и величина критической нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость – происходит выпучивание стержня. Полученные результаты хорошо согласуются с известными из текущей литературы. Исследованы также некоторые задачи, которые описываются дифференциальными уравнениями третьего порядка.

В дальнейшем планируется решение других задач на собственные значения.

Список литературы

1. Сансоне Дж. 1953. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 1 – М.: Изд-во иностранной литературы: 346.
Sansone J. 1953. Ordinary differential equations. V.1., М.: Izdatelstvo inostrannoi literatury: 346.
2. Сансоне Дж. 1954. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 2. М.: ИЛ: 416.
Sansone J. 1954. Ordinary differential equations. V.2. – М.: Izdatelstvo inostrannoi literatury: 416.



3. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения, М.: ИЛ: 352.
- Tricomi F. 1961. Differential equations. Turin: Blackie & son limited: 348.
4. Краснов М.Л. 1976. Интегральные уравнения, М.: Наука: 216.
- Krasnov M.L. 1976. Integral equation. М.: Nauka: 216.
5. Филиппов А.Ф. 2005. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М. Ижевск: НИЦ РХД: 176.
- Filippov A.F. 2005. Sbornik zadach po differential equftions, М.: Izhevsk, RCD: 176.
6. Привалов И.И. 1937. Интегральные уравнения, М.-Л.: ОНТИ: 248.
- Privalov I.I. 1937. Integral equation. М. – L.: ONTI: 248.
7. Михлин С.Г. 1947. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, да математической физики и техники, М., Л.: ОГИЗ изд. тех.-теор. лит.: 304.
- Mikhlin S.G. 1947. Applications of Integral equations to some problems of mechanics, М.-L.: 304.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. 1980. Дифференциальные уравнения, М.: Наука: 232.
- Tikhonov A.N. Vasilieva A.B. , Sveshnikov A.G. Differential equations, М.: Nauka: 232.
9. Смирнов В.И. 1953. Курс высшей математики в 5-ти т. , М.: ГИТТЛ, Т. 4: 804.
- Smirnov V.I. 1953. Kurs vyshey matematiki. М.: Izdatelstvo techniko-technicheskoi literatury: 804.
10. Lewis H.R. 1967. Class of Exact Invariants for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators. Journ. of math. Phys, Vol. 9, num. 11: 1976-1986.
11. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука: 704.
- Kamke E. 1965. Spravochnik po ordinary differential equations, М.: Nauka: 704.
12. Соловьев Е.А. 1984. Уравнение Милна и высшие порядки ВКВ приближения. Письма в ЖЭТФ, Т.39, Вып. 2: 84-86.
- Solovev E.A. 1984. Milne equation and high VKB approach. Pisma v JETPhys, V.39, IsNo.. 2: 86.
13. Pinney E. 1950. The nonlinear differential equation. Proc. Amer. Math. Soc.: 581
14. Абрамовиц М., Стиган И. 1979. Справочник по специальным функциям, М.: Наука: 832.
- Abramovitz M., Stugan I. 1979. Spravochnik po special functions, М.: Nauka: 832.