УДК 517.9

СИСТЕМА МОИСИЛА– ТЕОДОРЕСКУ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

THE MOISIL– TEODORESCU SYSTEM IN MULTIPLY CONNECTED DOMAINS

В.А. Полунин, А.П. Солдатов
V.A. Polunin, A.P. Soldatov

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье получено новое интегральное представление общего решения системы Моисила-Теодореску в многосвязных областях. Это представление использовано для исследования задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску.

Resume. In the paper a new integral representation of general solution of the Moisil – Teodorescu system is received in a multiply connected domain. Applications of this representation to Riemann - Gilbert problem for Moisil-Teodorescu system are also given.

Ключевые слова: система Моисила–Теодореску, задача Римана–Гильберта, интеграл типа Коши, сингулярные интегральные уравнения.

Key words: Moisil – Teodorescu system, Riemann - Gilbert problem, Cauchy type integral, singular integral equation.

Рассмотрим эллиптическую систему Моисила– Теодереску [1]

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0,\quad M(\zeta)=\begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

для четырехкомпонентного вектора $u(x)=(u_1,u_2,u_3,u_4)$. В силу очевидного соотношения $M^{\mathrm{T}}(\zeta)M(\zeta)=|\zeta|^2$ компоненты этого вектора являются гармоническими функциями. Полезно отметить также, что в обозначениях

$$u=(u_1,v) \tag{2}$$

система (1) записывается в виде

$$\operatorname{div}v=0,\quad \operatorname{rot}v+\operatorname{grad}u_1=0. \tag{3}$$

Напомним [1], что фундаментальным решением дифференциального оператора $M(\partial/\partial x)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ является матрица-функция $M^{\mathrm{T}}(x)/|x|^3$, где T – символ матричного транспонирования. Поэтому для непрерывной вектор-функции ψ, заданной на гладкой поверхности $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^3$, интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{M^{\mathrm{T}}(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)d_2y, \quad x \notin \Gamma, \tag{4}$$

где d_2y есть элемент площади и $n(y)$ – единичная нормаль, определяет решение системы (1).

Пусть поверхность Γ ограничивает конечную область D, по отношению к которой n является внешной нормалью, открытое множество $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ и для единообразия введены обозначения $D^+ = D, D^- = D'$. Тогда если функция φ удовлетворяет условию Гельдера и поверхность Γ ляпуновская, то существуют предельные значения

$$u^{\pm}(y_0) = \lim_{x \to y_0, x \in D^{\pm}} u(x), \quad y_0 \in \Gamma,$$

для которых справедлив аналог формул Сохоцкого- Племеля

$$u^{\pm} = \pm\psi + u^*. \tag{5}$$

Здесь $u^* = I^*\psi$ определяется сингулярным интегралом

$$(I^*\psi)(y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{M^{\mathrm{T}}(y-y_0)}{|y-y_0|^3} M[n(y)]\psi(y)d_2y,$$

который понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $S \cap \{|y-y_0| \geq \varepsilon\}$. Эти формулы впервые были получены А.В. Бицадзе [2]. С точки зрения минимальных требований на гладкость поверхности этот результат был уточнен в [3]: если Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}, 0 < \nu < 1$, то оператор I ограничен $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$.

Пусть задана на Γ непрерывная $2 \times 4-$ матрица

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{pmatrix},$$

имеющая ранг 2 в каждой точке поверхности. Рассмотрим для системы (1) аналог краевой задачи Римана - Гильберта

$$Bu^+ = f, \tag{6}$$

которую кратко назовем задачей R. Естественный подход к изучению этой задачи (для специальных матриц B), основанный на использовании интегралов типа Коши (2), был предложен А.В. Бицадзе[4]. Законченное исследование задач R в областях, гомеоморфных шару, было дано В.И. Шевченко [5, 6]. Другой подход, основанный на интегральном представлении специального вида, был описан в [7, 8].

В настоящей работе рассмотрим случай произвольной многосвязной области. С точки зрения общей эллиптической теории [9, 10] задача R фредгольмова при выполнении так называемого условия дополнительности. Известно[6, 8], что это условие можно описать следующим образом. Рассмотрим вектор $s = (s_1, s_2, s_3)$ с компонентами

$$s_1 = b^{12} + b^{34}, \quad s_2 = b^{13} - b^{24}, \quad s_3 = b^{14} + b^{23},$$

где $b^{kj} = b_{1k}b_{2j} - b_{1j}b_{2k}$ означают соответствующие миноры матрицы B. Тогда условие дополнительности равносильно тому, что вектор s нигде не выходит в касательную плоскость. Другими словами, скалярное произведение

$$s(y)n(y) \neq 0, \quad y \in \Gamma. \tag{7}$$

Как показано в [6], если поверхность Γ гомеоморфна сфере, то при выполнении этого условия задача R фредгольмова и ее индекс равен -1. В общем случае произвольной области D можно утверждать лишь свойство фредгольмовости этой задачи.

Теорема 1. *Пусть поверхность* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и матрица- функция* $B \in C^{\nu}(\Gamma)$ *удовлетворяет условию (7). Тогда оператор* R *задачи (1), (6) фредгольмов* $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. С каждым двукомпонентным вектором $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ свяжем четырехкомпонентный вектор $\psi = \widetilde{\varphi}$ по формуле $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, n\varphi_2)$ и положим

$$(I_0\varphi)(x) = (I\widetilde{\varphi})(x), \quad x \in D. \tag{8}$$

Таким образом, оператор I_0 действует из пространства $C^{\mu}(\overline{D})$ двукомпонентных вектор-функций в пространство $C^{\mu}(\overline{D})$ решений системы (1) в области D. Покажем, что этот оператор фредгольмов.

С этой целью рассмотрим частный случай задачи R, определяемую краевым условием

$$Cu^{+} = f \tag{9}$$

с матрицей- функцией

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что ядро этой задачи конечномерно.

В самом деле, пусть $Cu^{+} = 0$. Тогда в обозначениях (2) имеем:

$$u_1^{+} = 0 \quad v^{+}n = 0. \tag{10}$$

Поскольку функция u_1 гармонична в области D, отсюда $u_1 = 0$ и второе равенство (3) переходит в $\operatorname{rot} v = 0$. Следовательно, в каждой односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$ функция v представляется в виде градиента $\operatorname{grad} w_0$ некоторой функции w_0, которая с учетом первого равенства (3) гармонична. Если D_1 означает другую односвязную подобласть D с соответствующим представлением $v = \operatorname{grad} w_1$, то на открытом множестве $D_0 \cap D_1$ разность $w_0 - w_1$ является локально постоянной функцией, поскольку ее градиент равен нулю. Во всей вообще говоря многосвязной области D гармоническая функция w в представлении $v = \operatorname{grad} w$ многозначна и допускает ветвление вдоль контуров, не стягиваемых к точке в области D. При этом второе краевое условие в (10) переходит в

$$\frac{\partial w^{+}}{\partial n} = 0. \tag{11}$$

От многозначности можно освободиться, проводя в области D соответствующие разрезы. Условимся под разрезом R понимать односвязную гладкую поверхность с гладким краем ∂L, которая содержится в $\overline{D}$, причем $R \cap \Gamma = \partial L$. В области D всегда можно провести такие попарно непересекающиеся разрезы $R_1, \ldots, R_m$, что

$$D_R = D \setminus R, \quad R = R_1 \cup \ldots \cup R_m,$$

является односвязной областью. В этой области функция w является однозначной и ее граничные значения на разрезах связаны соотношением

$$(w^{+} - w^{-})\,|_{R_i} = c_i, \quad 1 \le i \le m, \tag{12}$$

с некоторыми постоянными c_i. При этом равенства $c_1 = \ldots = c_m = 0$ означают однозначность функции w, т.е. ее гармоничность во всей области D, что с учетом (11) возможно только когда w постоянна. Эти рассуждения и доказывают конечномерность пространства решений однородной задачи (9).

Обозначим S оператор задачи (9) и рассмотрим композицию SI_0, которая представляет собой оператор, действующий в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ двухкомпонентных вектор-функций. Заметим, что произведение CC^{T} представляет собой единичную $2 \times 2-$ матрицу. Кроме того, равенство (6) можно записать в форме $\overset{\square}{\varphi} = C^{\mathrm{T}}\varphi$. Поэтому в силу (4), (5) имеем равенство $SI_0 = 1 + K_0$ с интегральным оператором K_0, действующим по формуле

$$(K_0\varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{k_0(y_0, y)}{|\,y - y_0\,|^2}\varphi(y)d_2y, \quad y_0 \in \Gamma, \tag{13}$$

с матричной функцией

$$k_0(y_0, y) = C(y_0)M^{\mathrm{T}}(\xi)M[n(y)]C^{\mathrm{T}}(y), \quad \xi = \frac{y - y_0}{|\,y - y_0\,|}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$M^{\mathrm{T}}(\xi)M(n)C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ [n,\xi]_1 & \xi_1 \\ [n,\xi]_2 & \xi_2 \\ [n,\xi]_3 & \xi_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где здесь и ниже квадратные скобки означают векторное произведение, произведение без скобок – скалярное, и $[n,\xi]_k$ – компоненты вектора $[n,\xi]$. Отсюда в явном виде

$$k_0(y_0,y)=\begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ n(y_0)[n(y),\xi] & n(y_0)\xi \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ [n(y_0),n(y)]\xi & n(y_0)\xi \\ & \end{pmatrix}.$$

Как установлено в [3], в предположении $\Gamma\in C^{1,\nu}$ функция $k_0(t_0,t)$ принадлежит классу $C^{\nu}(\Gamma\times\Gamma)$ и обращается в нуль при $t=t_0$. Поэтому ядро оператора K_0 имеет слабую особенность, а сам оператор компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. На основании теоремы Рисса заключаем, что образ $\operatorname{im}(SI_0)$ является замкнутым подпространством конечной коразмерности. Поскольку $\operatorname{im}S\supseteq\operatorname{im}(SI_0)$, этим свойством обладает и образ оператора S. Таким образом, оператор S фредгольмов, что с учетом фредгольмовости произведения $SI_0=1+K$ приводит и к фредгольмовости оператора I_0.

Обратимся к исходной задаче (6). Как и выше убеждаемся, что композиция $RI_0=G+K$ с матрицей- функцией $G=BC^{\mathrm{T}}$ и интегральным оператором K, который определяется аналогично (13) по отношению к функции $k(y_0,y)=B(y_0)M^{\mathrm{T}}(\xi)M[n(y)]C^{\mathrm{T}}(y)$ и который в отличие от предыдущего случая является сингулярным.

Поскольку оператор I_0 фредгольмов, оператор R задачи фредгольмово эквивалентен оператору $N=G+K$. В случае поверхности Γ, гомеоморфной сфере, условие (7) гарантирует фредгольмовость сингулярного оператора N. Поскольку критерий фредгольмовости этого оператора носит локальный характер[11], аналогичное утверждение справедливо и для любой поверхности, что завершает доказательство теоремы.

Выражения для матриц G и k можно несколько упростить. С этой целью запишем матрицу $B=(B_{ij})$ в виде

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & b_1 \\ B_{21} & b_2 \\ & \end{pmatrix}$$

с векторами $b_k=(B_{k2},B_{k3},B_{k4})$. Тогда с учетом (14)

$$G=\begin{pmatrix} B_{11} & b_1 n \\ B_{21} & b_2 n \\ & \end{pmatrix},$$

$$k(y_0,y)=\begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi+b_1(y_0)[n(y),\xi] & b_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi+b_2(y_0)[n(y),\xi] & b_2(y),\xi \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi+[b_1(y_0),n(y)]\xi & b_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi+[b_2(y_0),n(y)]\xi & b_2(y)\xi \end{pmatrix},\quad \xi=\frac{y-y_0}{|y-y_0|}.$$

Список литературы

1. Бицадзе А.В. 1972. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука.

Bitsadze A.V. 1972. Osnovy teorii analiticheskih funkcij kompleksnogo peremennogo. M.:Nauka.

2. Бицадзе А.В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения, Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, Т. 17, 6., 525–538

Bitsadze A.V. Prostranstvennyj analog integrala tipa Koshi i nekotorye ego prilozhenija, Izv. AN SSSR, ser. matem., 1953, T. 17,6, 525-538.

3. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2011. Трехмерный аналог интеграла типа Коши. Дифференц. уравнения. Т. 47, №3: 366-375.

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2011. Three-dimensional analog of the Cauchy type integral. Differential equations, V .47, No.3: 366-375.

4. Бицадзе А.В. 1955. О двумерных интегралах типа Коши. Сообщ. Ан Груз. ССР, 16, 3: 177-184.

Bitsadze A.V. 1955. O dvumernyh integralah tipa Koshi, Soobsh. AN Gruz. SSR, 16,3: 177-184.

5. Шевченко В.И. 1966. О задаче Римана-Гильберта для голоморфного вектора. Докл. АН СССР, 169(6) :1285-1288.

Shevchenko V.I. 1966. O zadache Rimana-Gil'berta dlja golomorfnogo vektora. Dokl, AN SSSR, 169(6): 1285-1288.

6. Шевченко В.И. 1970. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора. Сб. "Матем. физика". Киев, Вып.8: 172-187.

Shevchenko V.I. 1970. O nekotoryh kraevyh zadachah dlja golomorfnogo vektora. Sb."Matem. fizika", Vip. 8: 172-187.

7. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2010. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в ограниченной области. Неклассические уравнения математической физики, Сб. науч. работ, Новосибирск: изд-во ин-та математики.

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2010. Zadacha Rimana-Gil'berta dla sistemy Moisila-Teodoresku v ogranichennoj oblasti. Neklassicheskie uravnenija matematicheskoi fiziki. Sb. nauchn. rabot, Novosibirsk:Institut matematiki: 192-201.

8. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2011. Об интегральном представлении решений системы Моисила"– Теодореску. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика.

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2011. Ob integral'nom predstavlenii reshenij sistemy Moisila-Teodoresku. Naushnie vedomosti BelGU, Matematika. Fizika.

9. Гилбарг Д., Трудингер Н. 1989. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука: 464.

Gilbarg D., Trudinger N.S. 1989. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Reprint of the 1998 Edition.

10. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. 1964. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math., 17: 35-92.

11. Михлин С.Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз.

Mikhlin S.G. 1965. Multidimensional singular integrals and integral equations. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 83, Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt.