MSC 37J05

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

SYMPLECTIC DYNAMICAL SYSTEMS

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко
A.V. Subbotin, Yu.P. Virchenko

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail:virch@bsu.edu.ru;

Аннотация. В работе вводится понятие симплектической алгебры дифференцируемых функций и на основе этого понятия определяется класс симплектических динамических систем, который является расширением, в некотором смысле максимальным, класса гамильтоновых систем аналитической механики. Доказывается, что для каждойсимплектической системы существует диффеоморфизм, который переводит эту систему в гамильтонову, и, наоборот, каждый диффеоморфизм, который преобразует фазовоепространство $\mathbf{R}^{2n}$ переводит гамильтонову систему в некоторую симплектическую.

Resume. The concept of symplectic algebra of differentiable functions is introduced. On the basis of this concept, the class of of symplectic dynamical systems is defined. It is an extension of the hamiltonian systems class which is an investigation object of analytical mechanics. The introduced class is maximal in a sense. It is proved that there is a diffeomorphism that for each symplectic system translates the system into a hamiltonian one. Otherwise, each diffeomorphism that transforms the phase space $\mathbf{R}^{2n}$ translates the hamiltonian system into a symplectic one.

Ключевые слова: динамическая система, гамильтониан, симплектическая матрица, каноническое преобразование, тождество Якоби, тождество Лейбница

Key words: dynamical system, hamiltonian, symplectic matrix, canonical transformation, Jacobi's identity, Leibniz' identity.

Введение

Известно, что основой одного из вариантов формализации классической механики является их запись в гамильтоновой форме (см., например, [1]), которая является объектом исследования одного разделов математической физики, который называется *аналитической механикой* (см. [2]). Формализм гамильтоновых динамических систем и связанный с них лагранжев формализм, обобщенные на случай бесконечномерных (пространственно распределенных) динамических систем, являются, в настоящее время, основой при построении фундаментальных динамических уравнений современной теоретической физики (см., например, [3]). В разное время производились попытки представления установленных к тому времени базовых уравнений динамики сплошных сред при пренебрежении в них диссипативными членами, в гамильтоновой или лагранжевой форме. Более того, с определенного момента времени [4-6], стали считать, что гамильтонова (лагранжева) форма эволюционных уравнений механики сплошных сред, в условиях отсутствия диссипативных механизмов, управляющих динамикой, должна быть руководящим принципом при построении этих уравнений в тех случаях, когда локальное мгновенное состояние среды характеризуется набором параметров, не имеющих простой геометрической интерпретации так, что их изменение при малом изменении времени довольно затруднительно описать «естественным образом» руководствуясь только феноменологическими соображениями (см., например, [7, 8]). Вместе с тем, при дальнейшем развитии этого направления теоретических исследований физических систем было установлено, что требование гамильтоновости (лагранжевости) формы эволюционных уравнений является, все-таки, довольно стеснительным и не позволяет сконструировать адекватные уравнения для описания динамики нематических жидких кристаллов [9], не говоря уже о более сложных по внутреннему устройству жидкокристаллических средах: смектических и холестерических. В связи с этим нами была выдвинуто предложение [10], расширить разумным образом класс тех динамических систем - объектов изучения аналитической механики, на основе которых могли бы

конструироваться эволюционные уравнения в указанных случаях. В настоящей работе мы предлагаем результаты изучения, с математической точки зрения, простейших свойств класса динамических систем, которые мы назвали *симплектическими*. Этот класс является довольно естественным расширением класса гамильтоновых систем, которое было предложено в уже процитированной работе [9].

Симплектические системы

Любая гамильтонова система размерности **2n** с набором динамических координат $X = \langle P, Q\rangle \in R^{2n}$, определяемых наборами обобщенных импульсов $P = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ и обобщенных координат $Q = \langle q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle$, которые составляют пары $\langle p_1, q_1\rangle, \ldots, \langle p_n, q_n\rangle$ *канонических сопряженных пар* переменных, и с гамильтонианом $H(X) = H(P, Q)$ представляется системой **2n** обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \; \dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \tag{1}$$

определяющих изменение со временем этих динамических переменных. Она эквивалентна соответствующей ей невырожденной лагранжжевой системе из **n**

уравнений второго порядка при условии отличия от нуля детерминанта

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{i,j=1\div n} \neq 0 \tag{2}$$

Вводя матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

система (1) записывается в терминах **2n**-мерного вектора **X** динамических координат

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H(X)}{\partial x_j}, \tag{3}$$

где здесь и далее используется соглашение о повторяющихся индексах, принятое в тензорной алгебре. Система (3) кратко записывается в виде

$\dot{X} = (J,\nabla)H(X)$, где $\nabla = \langle \partial / \partial x_j ; j = 1 \div 2\mathrm{n} \rangle$, и эту запись мы будем в дальнейшем

использовать. Невырожденные замены переменных $Y = R(X)$, которые не изменяют вида динамической системы (3), то есть такие, при которых динамическая система

$$\dot{y}_i = J_{\mathrm{ij}} \frac{\partial \overline{H}(Y)}{\partial y_j}, \quad \{\overline{H}(R(X)) = H(X)$$

снова является гамильтоновой системой,

$$\dot{x}_i = (S^{-1}(X))_{\mathrm{ik}} J_{\mathrm{kl}} (S(X))_{\mathrm{lj}} \left(\frac{\partial \overline{H}(Y)}{\partial y_j} \right)_{Y=R(X)}, \quad S = \frac{\partial R(X)}{\partial X},$$

называются *каноническими преобразованиями*.

Матрица J обладает очень важными алгебраическими свойствами $J^2 = -1$, $J^T = -J$. Наличие этих свойств дало повод к следующему расширению класса гамильтоновых систем.

Прежде всего введем в рассмотрение класс произвольных матриц-функций $I : R^{2\mathrm{n}} \to R^{2\mathrm{n}} \times R^{2\mathrm{n}}$, заданных на *фазовом пространстве* систем вида (3), таких, что все их значения -

матрицы $I(X), X \in R^{2\mathrm{n}}$ обладают алгебраическими свойствами, аналогичными указанным выше свойствам матрицы J,

$$I^2(X) = -1, \quad I^T(X) = -I(X) \tag{4}$$

Такие матрицы называются *симплектическими*. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой симплектической матрицы I существует такая ортогональная матрица U, $UU^T = U^T U = 1$, что матрица I представляется формулой $I = UIU^T$.

Введем, далее, в рассмотрение на пространстве дифференцируемых функций $f : R^{2\mathrm{n}} \to R$, заданных на фазовом пространстве $R^{2\mathrm{n}}$ бинарную алгебраическую операцию, которую мы, следуя традиции, будем обозначать посредством фигурных скобок $\{.,.\}$ и называть *скобкой Пуассона*. А именно, для каждой упорядоченной пары функций f и g из указанного класса результат применения этой операции будем обозначать посредством $\{f,g\}$. Скобка Пуассона обладает, по определению, следующими алгебраическими свойствами. Она антисимметрична, то есть для любой пары $\langle f,g \rangle$ имеет место

$$\{f,g\} = -\{g,f\}. \tag{5}$$

Она линейна по первому аргументу и, автоматически, в силу антисимметрии, по второму аргументу,

$$\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\} = \alpha_1 \{f_1, g\} + \alpha_2 \{f_2, g\}. \tag{6}$$

Она удовлетворяет тождеству Лейбница относительно произведения функций по первому аргументу и, автоматически, в силу антисимметрии, по второму аргументу,

$$\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}. \tag{7}$$

Наконец, она удовлетворяет тождеству Якоби для любой тройки дифференцируемых функций f, g и h,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0. \tag{8}$$

Наличие свойств (5), (6) и (8) указывает на то, что скобка Пуассона определяет на пространстве дифференцируемых функций, заданных на R^{2n}, бесконечномерную алгебру Ли. Наличие же дополнительного алгебраического свойства (7) позволяет говорить о специальном типе алгебр Ли, которые называются *пуассоновыми алгебрами*. Посредством операции скобки Пуассона определяются динамические системы

$$\dot{X} = \{X, \mathrm{H}(X)\}. \tag{9}$$

Каждая из таких систем может быть преобразована в гамильтонову систему посредством некоторого невырожденного преобразования $\mathrm{R} : R^{2n} \to R^{2n}$. Это утверждение составляет содержание теоремы Дарбу [11], которая утверждает, что:

Для любой операции скобки Пуассона, обладающей свойствами (5-8), найдется такой диффеоморфизм R, который переводит систему уравнений (9) в гамильтонову систему.

Естественно, если система вида (9) не является гамильтоновой и, на основании теоремы Дарбу, посредством преобразования R переводится в гамильтонову, то преобразование R, согласно данному выше определению, не является каноническим. Поэтому динамические системы вида (9), строго говоря, не являются гамильтоновыми и составляют более широкий класс динамических систем по сравнению с классом гамильтоновых систем. Мы называем такие системы *пуассоновыми*. Однако, в процитированных выше работах [7, 8], посвященных их применению при конструировании эволюционных уравнений механики сплошных сред, они также называются гамильтоновыми системами.

Определим теперь класс динамических систем, который является еще более обширным по сравнению с классом пуассоновских систем и который является объектом изучения настоящей работы. Системы этого класса мы называем симплектическими системами.

Определение. Динамическую систему $\dot{X} = F(X)$, определяемую диффеоморфизмом $\mathrm{F}: R^{2n} \to R^{2n}$, будем называть симплектической, если она является четномерной и отображение F определяется посредством формулы

$$F(X) = (I(X), \nabla)H(X). \tag{10}$$

на основе некоторой дифференцируемой функции $\mathrm{H}: R^{2n} \to R$ и симплектической матриц-функцией $I: R^{2n} \to R^{2n} \times R^{2n}$, значения которой являются симплектическими матрицами, $I^2(X) = -1, \quad I^T(X) = -I(X)$.

В следующем разделе мы изучим простейшие свойства симплектических динамических систем.

Основные свойства симплектических динамических систем

Пусть имеется матриц-функция $I(X), X \in R^{2n}$. Определим бинарную алгебраическую операцию на пространстве дифференцируемых функций, которую будем обозначать посредством $\{.,.\}$. Эту операцию определим сначала на константах и функциях - образующих алгебры $x_j, j = 1 \div 2n$ посредством следующих формул

$$[1, X] = [1,1] = 0, \quad [x_i, x_j] = I_{ij}(X). \tag{11}$$

При применении к этим функциям операция обладает свойством антисимметрии, так как матрицы $I_{ij}(X)$ антисимметричны при всех $X \in R^{2n}$.

Далее распространим это определение на произвольные мономы

$$f(X) = X^m,\ m = \langle m_1,...,m_{2n} \rangle,\ X^m \equiv x_1^{m_1} ... x_{2n}^{m_{2n}},\ g(X) = X^l,\ l = \langle l_1,...,l_{2n} \rangle,\ X^l \equiv x_1^{l_1} ... x_{2n}^{l_{2n}}$$

так, чтобы выполнялось тождество Лейбница (7). А именно, положим, индукцией по степени мономов **l** и **m**, положив $X^l = x_{i_1},...,x_{i_{|l|}}$

$$[x_i, X^m] = I_{ij_1} x_{j_2} ... x_{j_{|m|}} + ... + x_{j_1} ... x_{j_{|m|-1}} I_{ij_{|m|}} = I_{ij}(X) \nabla_k X^m$$

где $|m| = m_1 + ... + m_{2n}$. За счет антисимметрии операции $\{.,.\}$ это правило распространяется на выражения $[X^l, x_j]$. Тогда

имеет место

$$[X^l, X^m] = I_{ij}(X)(\nabla_i X^l)(\nabla_j X^m), \tag{12}$$

которое содержит в себе, в частности, значения (11) при $|\mathbf{l}| = 0$.

Пусть теперь функции f и g определяются рядами

$$f=\sum_l \frac{a_l}{l!}X^l,\quad g=\sum_m \frac{b_m}{m!}X^m,$$

где $l!=l_1!...l_{2n}!$, $m!=m_1!...m_{2n}!$, $a_l\equiv a_{l_1,...,l_{2n}}$, $a_l b_{m_1,...,m_{2n}}$. Продолжим определение операции $\{.,.\}$ на функции f и g по линейности

$$[f,g]=\sum_{l,m}\frac{a_l b_m}{l!\,m!}[X^l,X^m]=\sum_{l,m}\frac{a_l b_m}{l!\,m!}I_{ij}(X)(\nabla_i X^l)(\nabla_j X^m)=$$

$$=I_{ij}(X)(\nabla_i\sum_l\frac{a_l}{l!}X^l)(\nabla_j\sum_m\frac{b_m}{m!}X^m)=I_{ij}(X)(\nabla_i f)(\nabla_j g).$$

Таким образом, нами получена формула

$$[f,g]=I_{ij}(X)(\nabla_i f)(\nabla_j g),\tag{13}$$

которая позволяет явным образом применять операцию $\{.,.\}$ к произвольным аналитическим функциям. Затем посредством замыкания продолжаем эту операцию на произвольные дифференцируемые функции f и g. Операция, определяемая формулой (13), обладает свойствами (5-7). Например, для произвольных функций f, g_1, g_2, имеем

$$[f,g_1g_2]=I_{ij}(X)(\nabla_i f)(\nabla_j g_1g_2)=I_{ij}(X)(g_2(\nabla_i f)(\nabla_j g_1)+g_1(\nabla_i f)(\nabla_j g_2)).$$

Введение операции $\{.,.\}$ (симплектической скобки) позволяет записать с ее помощью симплектическую динамическую систему (10) в виде

$$\dot X=[X,\mathrm{H}(X)].\tag{14}$$

Операция $\{.,.\}$ превращается в скобку Пуассона, если для нее дополнительно выполняется тождество Якоби. Следующая теорема устанавливает критерий для матриц-функции $I(X)$, выполнение которого превращает симплектическую скобку в скобку Пуассона.

Теорема 1. Если матриц-функция $I(X)$ удовлетворяет тождеству

$$I_{il}(X)\nabla_l I_{jk}(X)+I_{jl}(X)\nabla_l I_{ki}(X)+I_{kl}(X)\nabla_l I_{ij}(X)=0,\tag{15}$$

то операция $\{.,.\}$, определенная посредством этой матриц-функции, удовлетворяет тождеству Якоби.

Возьмем произвольные три дифференцируемые функции f,g,h и рассмотрим выражение

$$[f,[g,h]]+[h,[f,g]]+[g,[h,f]]=$$
$$=[f,I_{ij}(X)(\nabla_i g)(\nabla_j h)]+[h,I_{ij}(X)(\nabla_i f)(\nabla_j g)]+[g,I_{ij}(X)(\nabla_i h)(\nabla_j f)]=$$
$$=I_{kl}(X)[(\nabla_k f)\nabla_l(I_{ij}(X)(\nabla_i g)(\nabla_j h))+$$
$$+(\nabla_k h)\nabla_l(I_{ij}(X)(\nabla_i f)(\nabla_j g))+$$

$$+(\nabla_k g)\nabla_l (I_{ij}(X)(\nabla_i h)(\nabla_j f))]$$

$$=\left(I_{kl}(X)\nabla_l I_{ij}(X)\right)\left[(\nabla_k f)(\nabla_i g)(\nabla_j h)+(\nabla_k g)(\nabla_i h)(\nabla_j f)+(\nabla_k h)(\nabla_i f)(\nabla_j g)\right]+$$
$$\left(I_{kl}(X)I_{ij}(X)\right)\left[(\nabla_k f)(\nabla_l(\nabla_i g)(\nabla_j h))+(\nabla_k g)(\nabla_l(\nabla_i h)(\nabla_j f))+(\nabla_k h)(\nabla_l(\nabla_i f)(\nabla_j g))\right]$$

Заменой индексов суммирования первые три слагаемых приводятся к виду

$$(\nabla_k f)(\nabla_i g)(\nabla_j h)\left((I_{kl}(X)\nabla_l I_{ij}(X))+(I_{il}(X)\nabla_l I_{jk}(X))+(I_{jl}(X)\nabla_l I_{ki}(X))\right)=0,$$

согласно условию теоремы. Остальные слагаемые записываются в виде

$$\left(I_{kl}(X)I_{ij}(X)\right)\left[(\nabla_k f)(\nabla_l(\nabla_i g)(\nabla_j h))+(\nabla_k g)(\nabla_l(\nabla_i h)(\nabla_j f))+(\nabla_k h)(\nabla_l(\nabla_i f)(\nabla_j g))\right]=$$
$$=\left(I_{kl}(X)I_{ij}(X)\right)[(\nabla_k f)(\nabla_i g)(\nabla_l\nabla_j h)+(\nabla_k f)(\nabla_j h)(\nabla_l\nabla_i g)+$$
$$+(\nabla_k g)(\nabla_i h)(\nabla_l\nabla_j f)+(\nabla_k g)(\nabla_j f)(\nabla_l\nabla_i h)+$$
$$+(\nabla_k h)(\nabla_i f)(\nabla_l\nabla_j g)+(\nabla_k h)(\nabla_j g)(\nabla_l\nabla_i f)].$$

После замены индексов суммирования, например, для третьего слагаемого $i \Leftrightarrow j$, и по такому же принципу для пятого и шестого слагаемых, в результате, получим

$$I_{kl}(X)I_{ij}(X)((\nabla_l\nabla_j h)\left[(\nabla_k f)(\nabla_i g)-(\nabla_i f)(\nabla_k g)\right]+$$
$$+(\nabla_l\nabla_j g)\left[(\nabla_k h)(\nabla_i f)-(\nabla_i h)(\nabla_k f)\right]+$$
$$+(\nabla_l\nabla_j f)\left[(\nabla_k g)(\nabla_i h)-(\nabla_i g)(\nabla_k h)\right]).$$

Затем заменим $i \Leftrightarrow k$, $j \Leftrightarrow l$ и при этом каждая из квадратных скобок меняет знак, а остальные составляющие этого выражения остаются неизменными. Это означает,
что это выражение равно нулю.

Очевидно, что класс симплектических систем, хотя и является более широким по сравнению с классом гамильтоновых систем. Существенно, что среди симплектических систем существуют такие, которые приводятся некоторым преобразованием фазового пространства, связанным с системой, к гамильтоновым системам. Такие симплектические системы будем называть приводимыми.

Найдем критерий приводимости симплектической системы.

Теорема 2. Если матриц-функция $I(X)$, порождающая симплектическую систему представима в виде

$$I(X)=S^T(X)J(X)S(X), \tag{16}$$

где матрицы $S(X)$ ортогональны при любом $X\in R^{2n}$ и для матриц функции $S(X)$ выполняется условие

$$\frac{\partial S_{ij}(X)}{\partial x_k}=\frac{\partial S_{ik}(X)}{\partial x_j}, \tag{17}$$

то такая симплектическая система является приводимой.

На основе матриц-функции $S(X)$ определим преобразование $R(X)$ фазового пространства R^{2n} на себя такое, которое является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial R(X)}{\partial X} = S(X) \tag{18}$$

и начального условия $R(0) = 0$. Ввиду выполнимости условия (17), это уравнение разрешимо, так как при каждом значении $i = 1 \div 2n$ правая часть $S_{ij}(X)$ представляет собой потенциальное поле относительно векторного индекса $j = 1 \div 2n$.

Используя (16) и условие ортогональности матриц $S(X)$, $S(X)S^T(X) = 1$, подсчитаем значение симплектической скобки

$$\left[R_i(X), R_j(X)\right] = I_{mn}(X)\frac{\partial R_i(X)}{\partial x_m}\frac{\partial R_j(X)}{\partial x_n} = I_{mn}(X)S_{im}(X)S_{jn}(X) =$$

$$= \left(S(X)I(X)S^T(X)\right)_{ij} = I_{ij}.$$

Вычислим теперь производную по времени для вектора $Y = R(X)$. Согласно определению, имеем

$$\dot{Y} = S(X)\dot{X} = \left(S(X)I(X), \nabla_X\right)H(X).$$

Так как $\nabla_X = \left(S^T(X), \nabla_Y\right)H(R^{-1}(Y))$, то, определив $\overline{H}(Y) = H(R^{-1}(Y))$, получим $\dot{Y} = \left(S(X)I(X), \nabla_Y\right)\overline{H}(Y) = \left(J, \nabla_Y\right)\overline{H}(Y)$.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / М.: Наука, 1989. – 472 с.
Arnold V.I. Matematicheskie metody klassicheskoi mekhniki / M.: Nauka, 1989. - 472s.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике / М.: Наука, 1966. – 300 с.
Gantmakher F.R. Lektsii po analiticheskoi mekhanike / M.: Nauka, 1966.- 300s.
3. Тирринг В. Курс математической и теоретической физики. Часть 1.
Классические динамические системы / Киев: TIMPANI, 2004. – 264 с.
4. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ. - 1971. - 13, № 6. -С.1668-1678.
Volkov D.V., Zheltukhin A.A., Bliokh Yu.P. Fenomenologicheskii lagranzhian spinovikh voln //FTT, - 1971. - 13. № 6.- P.1668-1678.
5. Волков Д.В., Желтухин А.А. Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ФНТ. - 1979. - 5, №11. - С.1359-1363.
Volkov D.V., Zheltukhin A.A., Fenomenologicheskii lagranzhian spinovikh voln v prostranstvenno-neuporiadochenykh sredakh // FNT. - 1979.- 5, № 11. - P.1359-1363.
6. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. - 1980. - 130, № 1. - С.37-63.
Andreev A.F., Marchenko V.I. Symmetria I makroskopicheskaya dinamika magnetikov // UFN. - 1980.- 130, №1. - P.37-63.
7. Dsyaloshinskii I.E., Volovick G.E. Poisson brackets in condensed matter physics// Ann. Phys. - 1980. - 125:1. - P.67–97.
8. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред // ТМФ. - 1995. - 102:2. - С.283–296.
Isayev A.A., Kovalevskii M.Yu., Peletminskii S.V. O gamiltonovom podkhode k dinamike sploshnykh sred // TMF. - 1995. - 102: 2. - P.283-296.
9. Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов / М.: Наука, 1988.
Kats E.I., Lebedev V.V. Dinamika zhidkikh kristallov / M.: Nauka, 1988.
10. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О понятии обратимости динамических систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics \& Physics. - 2015. - \No5(202); 38. - С.138-147.
11. Дарбу Ж.Г. Избранное по механике / Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2012. - 256 с.