УДК 519.21 + 537.86

# ПОТОК ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

# ELECTROMAGNETIC FIELD ENERGY FLUX IN STOCHASTIC MODEL OF HEAT RADIATION CONDUCTANCE IN DIELECTRIC SOLID MEDIUM

**Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко**
**Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko**

*Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85*
*BelgorodNationalResearchUniversity, 85PobedySt, Belgorod, 308015, Russia*

*E-mail: e-mail: lam_tan_phat1802@yahoo.com;*

*Аннотация.* Строится стохастическая модель для описания радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельной диэлектрической среде. Модель конструируется на основе представления о том, что перенос тепла в твердом теле осуществляется, как посредством присущей среде собственной теплопроводности, так и посредством переноса теплового электромагнитного излучения, которое порождается тепловыми флуктуациями атомов (ионов), составляющих твердый остов среды. Это позволяет сформулировать замкнутую стохастическую модель без учета флуктуаций ее электрической восприимчивости. В результате, на основе флуктуацинно-диссипационной теоремы, получается модель в виде бесконечномерного процесса Орнштейна-Уленбека. В рамках сконструированной модели вычисляется поток энергии флуктуационного электромагнитного поля в виде функционала от распределения температуры.

*Resume.* One-dimensional stochastic model that describes heat radiation transfer in dielectric medium is built. It is done on the basis of representation that heat transfer in solid is realized both by means of its heat conductivity and by means of the heat electromagnetic radiation which is generated by thermal fluctuations in the medium. It is supposed that electromagnetic fluctuations are caused by thermal vibrations of solid skeleton. It permits to formulate the stochastic model without using the supposition of susceptibility fluctuations. The mathematical model in the form of the infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck process is obtained using the classic fluctuation-dissipative theorem. In frameworks of the model, the energy flux of fluctuating electromagnetic field is calculated as the functional of local temperature distribution.

*Ключевые слова*: радиационно-кондуктивный теплообмен, флуктуации, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, поток энергии, распределение температуры.

*Key words*: heat radiation conductance, fluctuations, gaussian random field, Maxwell equations, energy flux, temperature distribution.

## Введение

Перенос тепла в твердотельной среде осуществляется посредством двух механизмов – теплопроводности и переноса электромагнитного излучения, которое порождается тепловыми флуктуациями ее локального термодинамического состояния. В соответствии с этим, эволюционное уравнение для распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ в момент времени $t$. феноменологически, записывается в виде (см., например, [1]- [3] )

$$\kappa\dot{T}(\mathbf{x},t) = щ\Delta T(\mathbf{x},t) - (\nabla,\mathbf{S})(\mathbf{x},t), \qquad (1)$$

$щ > 0$ – коэффициент теплопроводности среды, $\kappa$ – ее объемная теплоемкость, где считается, что эти величины не зависят от температуры. Векторное поле $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ представляет собой поток энергии электромагнитного излучения, связанный с флуктуациями зарядов и наведенных ими токов в среде. При этом считается, что величина $(\nabla,\mathbf{S}(\mathbf{x},t))$, умноженная на малый объём пространственной области среды, сосредоточенной около точки $\mathbf{x}$, равна части этого потока, которая тратится на нагрев этой области в момент времени $t$. Учет этого слагаемого при решении задач о переносе тепла оказывается существенным в оптически полупрозрачных средах с малой электрической проводимостью и при достаточно больших перепадах температур на характерных для рассматриваемой физической ситуации расстояниях. Для решения задач теплообмена в указанных случаях, необходимо получение замкнутого эволюционного уравнения для $T(\mathbf{x},t)$, а для этого необходим явный вид функционала $\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{S}[T(\mathbf{x},t)]$, который превращает уравнение (1) в самосогласованное.

Обычно, поток энергии $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ строится феноменологически, в рамках так называемой теории переноса излучения, используя законы геометрической оптики для тепловых лучей внутри среды и закона Кирхгофа об интенсивностях излучения и поглощения электромагнитного поля (см., например, [1]- [4]). Само тепловое электромагнитное поле в этих теоретических построениях отсутствует. Такое положение, на наш взгляд, является неудовлетворительным с теоретической точки зрения. Оно связано с отсутствием последовательной микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, которая должна быть основана на квантовой теории излучения и поглощения тепловых фотонов твердотельной среды и, по этой причине, должна носить статистический характер.

Мы не будем здесь останавливаться на подробном анализе тех проблем, с которыми связано построение микроскопической теории переноса излучения в рамках статистической физики (см. по этому поводу [5]- [7]). Укажем только на то, что начало развития статистического подхода в теории переноса излучения было положено в работах Рытова, которые суммированы в монографиях [8], [9]. В работах Рытова с сотрудниками (см., например, [8]- [9]), в связи со сложностью построения микроскопической теории переноса теплового излучения использован полуфеноменологический статистический подхода, в рамках которого в теорию вводится стохастическое электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла без конкретизации микроскопического механизма перехода его энергии в тепло. Это позволяет избежать квантового описания процессов излучения и поглощения, что разумно с теоретической точки зрения, так как перенос теплового излучения не является квантовым эффектом. Заметим, что стохастическое электромагнитное поле возникает вследствие тепловых флуктуаций зарядов и флуктуаций наведенных ими электрических токов, которые могут проявляться в средах даже с очень малой электропроводностью. Амплитуда таких флуктуаций возрастает с температурой так, что при достаточно большой ее величине тепловые колебания атомов (ионов) среды приводят даже в диэлектрической среде к флуктуациям электрических зарядов на масштабах порядка в межатомных расстояний, величина которых может оказаться существенной для учета, вызванного ими теплового излучения.

В настоящей работе мы строим, в рамках описанного полуфеноменологического подхода, стохастическую модель переноса теплового излучения. Она, в отличие от модели, предложенной ранее в [5]- [7], основана на явном статистическом описании тепловых флуктуаций зарядов и токов в среде, что является более последовательным с теоретической точки зрения. При этом мы ограничивается, ввиду сложности используемых математических конструкций, рассмотрением только случая неоднородного распределения температуры в ограниченной области безграничной среды.

## 2. Конструкция математической модели

Исходным положением при постановке задачи является то, что тепловое электромагнитное поле, определяемое парой $\{\mathbf{E}(\mathbf{x},t), \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\}$ в каждой пространственно-временной точке $\{\mathbf{x},t\}$, является стохастическим (здесь и далее мы отмечаем случайные функции знаком «тильда»). На основе этой пары определяется плотность потока энергии

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}](\mathbf{x},t), \tag{2}$$

$c$ – скорость света в вакууме, которая, таким образом, является случайной функций. Тепловое электромагнитное поле быстро изменяется на расстояниях порядка характерной длины волны ($\sim 10^{-4}$ см) теплового (красного) излучения и в течение отрезков времени порядка $\sim 10^{-14}$ сек, соответствующего указанным длинам волн. В то же время, характерная длина для процесса теплопроводности в кристаллических диэлектриках имеет порядок $10^{-2}$ см, а характерное время -- $10^{-1}$ сек. Поэтому плотность потока энергии (2) должна быть усреднена по пространственным областям имеющим масштаб, много больший, чем характерная длина волны стохастического электромагнитного поля, но много меньший, чем характерная длина для процесса теплопроводности. Кроме того, она также должна быть усреднена по временным отрезкам, которые имеют длительность, много большую чем характерный период колебаний теплового излучения, но много меньший, чем характерное время теплопроводности. Такое усреднение позволяет не учитывать малые быстрые изменения дивергенции плотности потока излучения $(\nabla,\tilde{S}(\mathbf{x},t))$ по пространству и времени, которые не имеют отношения к процессу переноса тепла. Указанное пространственно-временное усреднение, при наличии свойства *эргодичности* у пары случайных полей $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$, эквивалентна усреднению по распределению вероятностей электромагнитного поля. Таким образом, плотность потока энергии поля, которая используется в (1), определяется математическим ожиданием $\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t)\rangle$ (здесь угловые скобки обозначают усреднение по распределению вероятностей). Тогда, для формулировки замкнутой, с математической точки зрения, модели, описывающей перенос тепла излучением, нужно построить адекватную стохастическую модель теплового электромагнитного поля и, в ее рамках, вычислить математическое ожидание $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t)\rangle$.

Стохастическое электромагнитное поле представляются случайными реализациями $\{\mathbf{E}(\mathbf{x},t), \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\}$, которые удовлетворяют системе стохастических уравнений Максвелла в *сплошной* диэлектрической среде в пренебрежении дисперсией

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} = [\nabla,\mathbf{H}], \qquad && (\nabla,\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\rho}, \\ &\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -[\nabla,\tilde{\mathbf{E}}], && (\nabla,\mathbf{H}) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, порождаемого разогретой средой, теплового излучения. При этом $\varepsilon$ и $\mu$ – электрическая и магнитная проницаемости однородной диэлектрической среды, соответственно, которые мы считаем независящими от $\{\mathbf{x},t\}$.

Величины $\varepsilon$ и $\mu$, вообще говоря, зависят от температуры и эта зависимость может быть существенна при больших перепадах температуры на расстояниях порядка характерного масштаба рассматриваемого образца среды. Поэтому ее необходимо учитывать в задачах о переносе тепла излучением при наличии таких перепадов. Значения температуры в этих зависимостях должны полагаться локальной температуре $T(\mathbf{x},t)$ и, при учете такой зависимости, в уравнениях Максвелла должны появиться пространственные и временные производные от $\varepsilon(T(\mathbf{x},t))$ и $\mu(T(\mathbf{x},t))$. Однако, величина этих производных, в силу указанных медленных зависимостей по сравнению с масштабами длины и времени, характерных для теплового излучения, чрезвычайно мала. Поэтому эти производные не учтены в уравнениях (3).

Случайные реализации – решения системы уравнений (1) полностью определяются при заданных стохастических источниках $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\rho}$ – плотностей электрического тока и заряда, возникающих на микромасштабах порядка характерной длины волны вследствие тепловых флуктуаций, а также граничными и начальными условиями для полей, соответствующими изучаемой физической ситуации. Что касается граничных условий, которые оказываются очень важными (см. [5]-[7]), то в настоящей работе мы будем рассматривать простейшую с физической точки зрения ситуацию, когда изучается затухание локализованной тепловой неоднородности в безграничной среде, которая сосредоточена в ограниченной области пространства с линейным размером $L$ порядка $1 \div 10^2$ см, так, что при удалении радиус-вектора $\mathbf{x}$ на бесконечность температура среды стремится к постоянному значению. Что же касается источников, то в системе уравнений (3) плотности $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\rho}$ играют роль пространственно распределенных стохастических источников, вид которых определяется конструируемой нами моделью. При этом условие согласованности переполненной системы уравнений (3) приводит к *уравнению непрерывности*

$$\dot{\tilde{\rho}} + (\nabla, \tilde{\mathbf{j}}) = 0, \tag{4}$$

которому должны быть подчинены эти источники. По этой причине, для полного математического задания модели достаточно определить только поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$. Плотность тока $\tilde{\mathbf{j}}$ в нашей модели мыслится составленной из собственно стохастического источника электромагнитного поля, как внутренняя «электродвижущая сила» среды, которая возникает вследствие тепловых флуктуаций, и из плотности тока, наведенного электромагнитным полем, который мы положим в виде закона Ома $\sigma\mathbf{E}$. При этом заметим, что коэффициент $\sigma > 0$, играющий здесь роль проводимости, не является истинной макроскопической электропроводностью среды, которая предполагается очень малой в рассматриваемой физической ситуации, а выполняет роль «эффективной проводимости», отличие которой от нуля гарантируется так называемой *флуктуационно-диссипационной теоремой* (см., например, [9]). Ее наличие необходимо, с математической точки зрения, для присутствия регулярной диссипативной составляющей в системе стохастических эволюционных уравнений (1) с аддитивным шумом для существования у нее стационарного эволюционного режима.

В свою очередь, та часть плотности $\tilde{\mathbf{j}}$ флуктуационного тока, которая служит собственно стохастическим источником электромагнитного поля, несмотря на то, что процесс происходит в диэлектрике (или в высокоомном полупроводнике), обязательно, должна содержать, с вероятностью единица, вихревую часть $a(\mathbf{x},t;T)\boldsymbol{\varphi}$ (флуктуационные «токи Фуко»), где интенсивность $a(\mathbf{x},t;T)$ источника зависит функционально от локальной температуры $T=T(\mathbf{x},t)$ и поэтому может изменяться по пространству и времени, но гораздо медленнее по сравнению с изменением самого теплового электромагнитного поля. Именно с наличием вихревой части связано излучение переносящих тепло электромагнитных волн. В связи с диэлектрическим характером среды, флуктуационной ток (его корреляционная функция) сосредоточен на малых пространственных масштабах порядка межатомных расстояний. Таким образом, плотность $\tilde{\mathbf{j}}$ тока должна быть заменена в уравнениях (3) и (4) на $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)a(\mathbf{x},t;T)+\sigma\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$, где интенсивность $a(\mathbf{x},t;T)$ которая должна быть определена для завершения построения модели на основе статфизических соображений.

В результате такой замены, получаем первое из уравнений (3) в виде стохастического уравнения с аддитивным шумом $\boldsymbol{\varphi}$,

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\gamma\mathbf{E}+\frac{4\pi}{\varepsilon}a\boldsymbol{\varphi}=\frac{c}{\varepsilon}[\nabla,\mathbf{H}],\quad \gamma=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \tag{5}$$

а уравнение (4) – в виде

$$\dot{\tilde{\rho}}+\gamma\tilde{\rho}+(\nabla,a\boldsymbol{\varphi})=0, \tag{6}$$

где, как и выше, мы пренебрегли пространственными производными от распределения температуры. Коэффициент $\sigma$ здесь также может, в общем случае, зависеть от локальной температуры, которая медленно изменяется по $\mathbf{x}$ и $t$, но мы, по причинам, указанным выше, также будем пренебрегать этой зависимостью в стохастических уравнениях (5) и (6).

Случайное поле $\boldsymbol{\varphi}$ в уравнениях (5), (6), вследствие предполагаемой физически малости тепловых флуктуаций, будем считать гауссовским с нулевым средним значением $\langle\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)\rangle=0$ и при этом считаем, что $\langle\tilde{\rho}(\mathbf{x},t)\rangle=0$. Тогда гауссовское поле $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ полностью определяется своей парной корреляционной функцией $K_{j_1j_2}(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2)=\langle\tilde{\varphi}_{j_1}(\mathbf{x}_1,t_1)\tilde{\varphi}_{j_2}(\mathbf{x}_2,t_2)\rangle$. По физическим причинам, мы будем считать случайное поле $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ стохастически трансляционно инвариантным (однородным) по $\mathbf{x}$ и стационарным по $t$ в смысле теории случайных процессов. Кроме того, мы будем считать, что это поле стохастически изотропно и обратимо по времени. В этом случае корреляционная его функция представима в виде

$$K_{j_1j_2}(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2)=K(|\,\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\,|,|\,t_1-t_2\,|)\delta_{j_1,j_2}. \tag{7}$$

В этом случае, в пренебрежении медленными зависимостями локальной температуры от $\mathbf{x}$ и $t$, источник $a\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ в уравнениях (5), (6) является однородным по $\mathbf{x}$, стационарным по $t$ и изотропным полем.

Сделаем дополнительные предположения о свойствах функции $K(r,s)$, $r,s>0$. Эти свойства связаны с локальностью корреляционной функции $K_{j_1j_2}(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2)$. Так как случайное поле $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$, по физическим соображениям, должно обладать чрезвычайно малым временем корреляций, которые должны исчезать при *временны́х* длительностях порядка нескольких периодов колебаний стохастического электромагнитного поля в красной области спектра, то мы положим, что

$K(r,s) \sim \delta(s)$. В этом случае поле $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ превращается в обобщенное гауссовское векторное случайное поле типа «белого шума» по *временнóй* переменной. Корреляции поля $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ по пространственным переменным также являются сильно короткодействующими. Они исчезают на длине, равной нескольким межатомным расстояниям и поэтому длина корреляции является самым маленьким параметром размерности длины в конструируемой модели. Однако, по причинам, которые будут ясны из дальнейшего математического анализа, мы не сможем положить, что функция $K(r,s)$ пропорциональна $\delta(r)$, по аналогии с *временнóй* переменной. Поэтому мы принимаем, что имеет место следующее представление

$$K(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|,|t_1-t_2|)=K(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|)\delta(t_1-t_2), \tag{8}$$

где функция $K(r)$ положительная определена, что необходимо в силу теоремы Бохнера-Хинчина. В противоположность *временнóй* зависимости поля $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ как белого шума, относительно его зависимости от пространственных координат будем предполагать, что оно обладает корреляционной функцией $K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2)$, которая не является обобщенной, а напротив является абсолютно интегрируемой $\int_{\Pi^3}|K(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}<\infty$. Вместе с ее локализацией в окрестности нуля радиуса $r_0$ это позволяет нам положить, что имеет место представление $K(r)=r_0^{-3}Q(r^2/2r_0^2)$, где $r_0>0$ – малый параметр и $K=\int_0^\infty Q(\xi^2/2)d\xi<\infty$. Здесь функция $Q(r)$ сосредоточена в области с линейным порядка единицы.

После задания случайного процесса, описывающего стохастический источник $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ в системе стохастических дифференциальных уравнений (3), флуктуационное электромагнитное поле оказывается полностью определенным. При этом случайная функция $\tilde{S}(\mathbf{x},t)$ является определенным функционалом от распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ и его математическое ожидание

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t)\rangle=\frac{c}{4\pi}\langle[\mathbf{E},\mathbf{H}](\mathbf{x},t)\rangle \tag{9}$$

определяется распределением вероятностей флуктуационного поля $\boldsymbol{\varphi}$.

## 3. Малые параметры математической модели

Последовательный математический анализ случайного процесса, который порождается сконструированной математической моделью радиационно-кондуктивного теплообмена в указанной выше физической ситуации оказывается очень сложным. В частности, выполнение усреднений в результирующей формуле для плотности потока $S_j(\mathbf{x},t)$ энергии флуктуационного электромагнитного поля приводит к сложным выражениям, которые неудобны для практического применения при решении задач о переносе тепла электромагнитным излучением в полупрозрачной среде. Существенное упрощение этих выражений достигается при учете тех конкретных физических условий, в которых такие процессы переноса происходят. Учет этих условий приводит к выявлению ряда малых параметров в исследуемой задаче. Тогда естественная постановка математической задачи состоит в вычислении выражения для $S_j(\mathbf{x},t)$ в виде главного члена асимптотики при стремлении этих параметров к нулю.

Пусть $L$ – размер температурной неоднородности, который, в нашем случае, полагается равным линейному размеру области в начальный момент времени, в которой происходит изменение неоднородного распределения температуры $T(\mathbf{x},0)$. на один градус. Заметим, что характерное время, за которое происходит изменение распределения температуры за счет процессов теплопроводности существенно больше, чем время, за которое тепловое электромагнитное излучение преодолевает расстояние $L$ и выходит за пределы области $L/\bar{c}$ ($\sim 3\cdot 10^{-13}$ сек при $L\sim 10^{-2}$ см), в которой протекают указанные процессы теплопроводности, и поэтому, выйдя из системы часть излучения уже не оказывает влияния на тепловые процессы. Естественное время для процессов теплопроводности определяется отношением $L^2\kappa/\text{щ}$, которая в типичных физических ситуация с твердотельными высокоомными полупроводниковыми кристаллами определяется отношением $\text{щ}/\kappa$ равным по порядку величины $10^{-3}$ см$^2$/сек и, следовательно, типичное время $10^{-1}$ сек для распределений температуры в рассматриваемых нами задачах. В результате получаем малый параметр $(L/\bar{c})\big/(L^2\kappa/\text{щ}) = \text{щ}/L\bar{c}\kappa \ll 1$ по порядку величины равный $3\cdot 10^{-12}$, где $\bar{c}$ – скорость света в рассматриваемой среде, $\bar{c}^2 = c^2/\varepsilon\mu$.

Далее, будем считать, что среда, в которой происходит радиационно-кондуктивный теплообмен настолько полупрозрачна, что характерное расстояние, на котором происходит затухание излучения намного больше, чем введенный размер $L$. В этом случае возникает параметр $\gamma L/\bar{c}$, который для диэлектриков принимает значения в диапазоне $3\cdot(10^{-4}\div 10^{-17})\ll 1$, где $\gamma = 4\pi\sigma/\varepsilon$ имеет порядок $10^{6}\div 10^{-7}$ сек$^{-1}$ в том случае, если использовать их типичные значения удельной электропроводности. Для полупроводников параметр $\gamma L/\bar{c}$ изменяется в диапазоне $4\cdot(10^{-4}\div 10^{5})$.

Как уже было указано выше, имеется еще один естественный малый параметр, это отношение $r_0/L$ корреляционной длины $r_0$ к размеру $L$ области локализации тепловой неоднородности. Это отношение является малым, ввиду того, что $r_0\sim 10^{-8}$~см, а $L\sim 10$~см так, что $r_0/L\sim 10^{-9}$. На основе указанных типичных значений для параметров в нашей модели заключаем, что в случае диэлектриков выполняются следующие соотношения между введенными малыми параметрами $\text{щ}/L\bar{c}\kappa \ll \gamma L/\bar{c} \ll r_0/L$. Как видно из приведенных выше оценок, для полупроводников параметр $\gamma L/\bar{c}$ перестает быть малым. Таким образом, вычисление потока энергии флуктуационного электромагнитного поля будет нами выполнено в виде вычисления главного члена асимптотики при стремлении этих параметров к нулю.

Ввиду того, что переход к пределу осуществляется по нескольким параметрам, то для получается его определенного предельного значения необходимо уточнить его характер. Мы будем считать, что эти предельные переходы понимаются как повторные. В соответствие с указанными для них типичными физическими значениями, порядок перехода к пределу будет осуществляться в порядке их величины – от меньшей к большей. Таким образом, переход к пределу $r_0/L\to 0$ будет производиться на заключительном этапе вычислений. При этом для проведения таких вычислений будет необходимо явно ввести в соответствующие формулы параметр $L$, измеряя все величины размерности длины и размерности времени в нашей модели в единицах самого большого пространственного размера $L$ и самой большой временной длительности $L^2\kappa/$щ, соответственно.

## 4. Построение стационарного случайного процесса

Ввиду того, что типичное время теплопроводности является самым большим параметром размерности времени в нашей модели, то первым шагом при указанном выше переходе к пределу для вычисления асимптотики величины $S_j(\mathbf{x},t)$ является построение стационарного случайного процесса, на основе случайного процесса, который определяется стохастическими уравнениями (3) при фиксированном начальном распределении температуры. С этой целью введем в рассмотрение обобщенные Фурье-разложения случайных реализаций стохастических полей $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{k}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{k}. \tag{10}$$

Здесь $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$ и $\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ являются обобщенными случайными полями относительно $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$. Подставим разложения (10) в уравнения (3), (5), (6). Тогда, в силу однозначности их определения на основе Фурье-разложений, получаем для каждого $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$ конечную систему уравнений для обобщенных Фурье-образов

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) + \gamma\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) + \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t) = \frac{ic}{\varepsilon}[\mathbf{k},\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)], \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = -\frac{ic}{\mu}[\mathbf{k},\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)], \quad (\mathbf{k},\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t), \quad (\mathbf{k},\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)) = 0, \tag{12}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t) + \gamma\tilde{\rho}(\mathbf{k},t) + i(\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)) = 0, \tag{13}$$

где введен обобщенный образ Фурье для реализаций плотности распределения заряда

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{k}, \tag{14}$$

а также обобщенные образы Фурье $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ реализаций случайного поля $a(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$,

$$a(\mathbf{x},t;T)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{k}. \tag{15}$$

Поля $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$ являются комплекснозначными гауссовскими случайными полями, ввиду гауссовости поля $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$, и обладают нулевыми средними значениями $\langle\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)\rangle = 0$, $\langle\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)\rangle = 0$.

Ввиду вещественности поля $a(\mathbf{x},t;T)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$, реализации поля $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ обладают с вероятностью единица свойством $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(-\mathbf{k},t)$. Поэтому это поле полностью характеризуется корреляционной функцией $\overline{K}_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1,t_1;\mathbf{k}_2,t_2) = \langle\tilde{\tilde{\varphi}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\varphi}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, которая представляется положительной матриц-функцией от $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$ и $t$ и следующим образом связана с корреляционной функцией $K_{ll'}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')$:

$$\bar{K}_{ll'}(\mathbf{k},\omega,\mathbf{k}',\omega') = \frac{1}{(2\pi)^8}\int_{\mathbb{R}^8} \exp\Big[i(\omega' t' - \omega t) + i\big((\mathbf{k}',\mathbf{x}') - (\mathbf{k},\mathbf{x})\big)\Big] K_{ll'}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dtdt'. \tag{16}$$

или, принимая во внимание, свойства стохастической однородности по $\mathbf{x}$, стационарности по $t$ и изотропности поля $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$, эта корреляционная функция принимает вид

$$\bar{K}_{ll'}(\mathbf{k},\omega,\mathbf{k}',\omega') = \delta_{ll'}\bar{K}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta(\omega'-\omega), \tag{17}$$

$$\bar{K}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^6}\int_{\mathbb{R}^6} \exp\Big[i\big((\mathbf{k}',\mathbf{x}') - (\mathbf{k},\mathbf{x})\big)\Big] K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)d\mathbf{x}d\mathbf{x}'. \tag{18}$$

Так как система уравнений при каждом фиксированном $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ конечна, то она однозначно разрешима при заданных начальных условиях для реализаций обобщенных случайных полей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$. Это означает, что описанная в настоящем разделе стохастическая модель теплового электромагнитного поля замкнута с математической точки зрения.

В силу линейности системы уравнений, определяющих обобщенные поля $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$, электромагнитное поле является гауссовским случайным полем с нулевым средним значением, если среднее значение поля $\bar{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$ равно нулю.

Начальные условия для определения математических ожиданий всевозможных функций от полей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ и $\bar{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$ становятся несущественными по прошествии временного периода, много большего времени $щ / L\bar{c}\kappa$. (Заметим также, что этот временной период должен быть много больше, чем характерного времени $\tau$, связанное с тепловым излучением так, чтобы величина $\hbar\tau^{-1}$ имела порядок средней температуры среды). Тогда, так как поле $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)$ является стационарным по времени, то, при указанном переходе в асимптотическую область изменения переменной $t$ при пренебрежении зависимостью от времени распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ в амплитуде $a(\mathbf{x},t;T)$ и, тем самым, в источниках $\bar{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\rho}(\mathbf{k},t)$, стохастические поля $\{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t),\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\}$, подчиняющиеся уравнениям (11)–(13), можно также рассматривать как стационарные по времени. Такое пренебрежение временной зависимостью соответствует переходу в асимптотическую область $t \gg щ / L\bar{c}\kappa$.

В такой ситуации естественно перейти от эволюционных уравнений (11)–(13) к уравнениям для амплитуд спектрального разложения этих полей, которые являются обобщенными функциями от частоты $\omega$ (если не учитывать т.н. сингулярную составляющую спектральной меры см. [11], [12]),

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{19}$$

$$\bar{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{\imath}}(\mathbf{k},\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c}(\mathbf{k},\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{20}$$

где обобщенное случайное поле $\tilde{\imath}_l(\mathbf{k},\omega)$, определяющее спектральное разложение плотности флуктуационного тока, дается формулой

$$\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{4}\exp\Big(-i\omega t-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\Big)a(\mathbf{x},t;T)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}dt. \tag{21}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (11 – 13) и пользуясь однозначностью Фурье-образов, получаем для них замкнутую систему уравнений:

$$i\omega\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)+\gamma\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)+\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{ic}{\varepsilon}[\mathbf{k},\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)], \tag{22}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)=-\frac{c}{\mu\omega}[\mathbf{k},\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)],\quad (\mathbf{k},\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega))=-\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{c}(\mathbf{k},\omega),\quad (\mathbf{k},\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega))=0, \tag{23}$$

$$i\omega\tilde{c}(\mathbf{k},\omega)+\gamma\tilde{c}(\mathbf{k},\omega)+i(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega))=0, \tag{24}$$

Решениями этой системы уравнений для Фурье-образов полей $\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)$ являются:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)=i\frac{4\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\Big((\omega^2-i\omega\gamma)\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega)-\bar{c}^2(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega))\mathbf{k}\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)}, \tag{25}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)=-i\frac{4\pi c}{\varepsilon\mu}\cdot\frac{[\mathbf{k},\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega)]}{(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)}. \tag{26}$$

Здесь Фурье-образы $\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)$, $\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)$, $\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega))$, $\tilde{c}(\mathbf{k},\omega)$ являются обобщенными функциями на пространстве бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^4$.

## 5. Плотность потока энергии в стационарном режиме

Подсчитаем среднюю плотность потока излучения $S_j(\mathbf{x},t)$, $j=1,2,3$, каждая компонента которой, по определению, равна

$$S_j(\mathbf{x},t)=\frac{c}{4\pi}\langle[\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)]_j\rangle=\mathrm{T}_{jll'}\frac{c}{4\pi}\int_{8}\exp\Big[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{x})+i(\omega-\omega')t\Big]\Big\langle E_l(\mathbf{k},\omega)H^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\Big\rangle d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega', \tag{27}$$

где $\mathrm{T}_{jll'}$ – полностью антисимметричный псевдотензор в $\mathbb{R}^3$ (символ Леви-Чивита). Математическое ожидание в формуле (27) вычисляется на основе явных выражений (25) и (26) для случайных полей $\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega),\mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)$, которые являются гауссовскими, так как представляют собой линейные преобразования плотности флуктуационного тока $\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{x},t)$ – гауссовского случайного поля. Поэтому математическое ожидание

$$\Big\langle E_l(\mathbf{k},\omega)H^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\Big\rangle=-\frac{(4\pi)^2c}{\varepsilon^2\mu}\cdot\frac{\mathrm{T}_{l'mm'}k'_m\Big(\omega(\omega-i\gamma)\delta_{ln}-\bar{c}^2k_lk_n\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\langle\tilde{\mathbf{\iota}}_n(\mathbf{k},\omega)\tilde{\mathbf{\iota}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle \tag{28}$$

выражается через корреляционную функцию поля $\tilde{\mathbf{\iota}}(\mathbf{k},\omega)$,

$$\langle\tilde{\mathbf{\iota}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\mathbf{\iota}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle=\frac{\delta_{ll'}}{(2\pi)^7}\int_{7}a(\mathbf{x},t;T)a(\mathbf{x}',t;T)K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\exp\Big[i\Big((\mathbf{k}',\mathbf{x}')-(\mathbf{k},\mathbf{x})\Big)\Big]d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt. \tag{29}$$

Подставляя (27) в (28) и воспользовавшись тензорным тождеством $\mathrm{T}_{jll'}\mathrm{T}_{l'mn}=\delta_{jm}\delta_{ln}-\delta_{jn}\delta_{lm}$, учтем выражение (29) для корреляционной функции $\langle\tilde{\mathbf{\iota}}_n(\mathbf{k},\omega)\tilde{\mathbf{\iota}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle$ в случае стохастической изотропности флуктуаций плотности тока. В результате, приходим к следующему выражению для плотности потока энергии

$$S_j(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^7} R_j(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1, t-s; \mathbf{x}-\mathbf{y}_2, t-s) K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds, \quad (30)$$

где

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{\mathbb{R}^8} \bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega') \exp\left[i\left((\mathbf{k},\mathbf{x})-(\mathbf{k}',\mathbf{x}')\right)+i(\omega t-\omega' t')\right] d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'. \quad (31)$$

$$\bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega') = -R\frac{\left(k_j'(2\omega(\omega-i\gamma)-\bar{c}^2\mathbf{k}^2)+\bar{c}^2 k_j(k_m k_m')\right)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}, \quad (32)$$

$$R = 4\pi\bar{c}^2/\varepsilon. \quad (33)$$

Из (31) и (32) следует, что функция

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = -\frac{R}{(2\pi)^8}\int_{\mathbb{R}^8} \frac{\left(k_j'(2\omega(\omega-i\gamma)-\bar{c}^2\mathbf{k}^2)+\bar{c}^2 k_j(k_m k_m')\right)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\times$$
$$\times\exp\left[i\left((\mathbf{k},\mathbf{x})-(\mathbf{k}',\mathbf{x}')\right)+i(\omega t-\omega' t')\right] d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega',$$

определяющая вклады в плотность потока энергии в точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ из двух источников излучения (так как плотность потока энергии пропорциональна квадрату электромагнитного поля), которые находятся в различных пространственных точках с радиус-векторами $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$, представима в виде

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = -R\left[iU(\mathbf{x},t)\nabla_{j'}V^*(\mathbf{x}',t') + \dot{V}(\mathbf{x},t)\nabla_{j'}V^*(\mathbf{x}',t') - i\bar{c}^2\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x},t)\nabla_{m'}V^*(\mathbf{x}',t')\right], \quad (34)$$

где операторы $\nabla_j$ и $\nabla_{m'}$ обозначают градиенты по векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, соответственно, точка обозначает дифференцирование по $t$ и скалярные функции $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$, которые даются следующими интегральными представлениями, представляют собой обобщенные функции над пространством Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^3)$:

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{\omega-i\gamma} d\mathbf{k}d\omega, \quad (35)$$

$$V(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma} d\mathbf{k}d\omega, \quad (36)$$

$$W(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)} d\mathbf{k}d\omega. \quad (37)$$

При этом функции $U(\mathbf{x},t)$ и $W(\mathbf{x},t)$ принимает чисто мнимые значения, а функция $V(\mathbf{x},t)$ вещественнозначна.

В соответствии с формулой (34), плотность потока $S_j((\mathbf{x}),\mathbf{t})$ разобъем на три части:

$$S_j(\mathbf{x},t) = S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) + S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) + S_j^{(w)}(\mathbf{x},t), \quad (38)$$

где, согласно (30) и (34), каждое слагаемое имеет вид:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -iR\int_{\mathbb{R}^7} U(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s)\nabla_j V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s)K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds, \quad (39)$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -R\int_{\mathbb{R}^7} [\dot{V}(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s)][\nabla_j V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s)]K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds, \quad (40)$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = i\bar{c}^2 R\int_{\mathbb{R}^7} [\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s)][\nabla_m V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s)]K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds. \quad (41)$$

## 6. Асимптотики обобщенных функций *U, V, W*

В этом разделе мы найдем асимптотические формулы для обобщенных функций $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$, которые определяют вклады $S_j^{(p)}(\mathbf{x},t)$, $p\in\{u,v,w\}$ в плотность потока $S_j(\mathbf{x},t)$ при стремлении малого параметра $\gamma L/\bar{c}\to 0$. Такая процедура необходима, с одной стороны, в связи с тем, что функции $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ не вычисляются точно в терминах стандартных обобщенных функций, что вносит неадекватное усложнение формулы для $S_j(\mathbf{x},t)$, а, с другой стороны, нашей задачей в этой работе является вычисление величины $S_j(\mathbf{x},t)$ с целью использования ее в теории радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных полупроводниковых кристаллах.

Для обобщенной функции легко находится точное выражение

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{\delta(\mathbf{x})}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma}d\omega = i\Theta(t)\delta(\mathbf{x})e^{-\gamma t}, \quad (42)$$

где использовано интегральное представление для трехмерной $\delta$ -функции

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x}))d\mathbf{k}$$

и интегральное представление для $\Theta$ – функции Хевисайда.

Функции $V(\mathbf{x},t)$ и $W(\mathbf{x},t)$ не имеют такого простого явного представления. Поэтому мы найдем для них асимптотические представления при стремлении вспомогательного параметра $\gamma L/\bar{c}$, который является самым малым среди рассмотренных выше малых параметров задачи.

Обозначим $\omega(\mathbf{k}) = (\bar{c}^2\mathbf{k}^2 - (\gamma/2)^2)^{1/2}$. Для нахождения выражения обобщенной функции $V(\mathbf{x},t)$, выполним сначала интегрирование по $\omega$, используя полюса $\omega = i\gamma/2 \pm \omega(\mathbf{k})$ в определяющем ее интеграле, где оба полюса находятся в верхней полуплоскости вне зависимости от значения $\mathbf{k}^2$. В результате, получаем следующее представление

$$V(\mathbf{x},t) = -e^{-\gamma t/2}\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}d\mathbf{k}. \quad (43)$$

Вычисление же интеграла по углам в этом представлении приводит к выражению

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}d\mathbf{k} = \frac{2\pi}{r}\Big(v(-r,t)-v(r,t)\Big), \quad r=|\mathbf{x}|, \quad (44)$$

где

$$v(r,t) = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \sin(\omega(\mathbf{k})t + kr)\frac{dk}{\omega(\mathbf{k})}, \quad (45)$$

и вычислим асимптотику этой функции при стремлении $\gamma L/c\to 0$.

Разобьем интеграл на две части, согласно двум интервалам интегрирования $[0,\gamma/2\bar{c}]$ и $[\gamma/2\bar{c},\infty)$. Асимптотические значения интегралов по каждому из интервалов вычисляются различным образом.

В интеграле по $[\gamma/2\bar{c},\infty)$, после явного введения в подинтегральное выражение параметра $L$ посредством замены переменной интегрирования $k\Rightarrow k/L$, а затем $k\Rightarrow k+\gamma L/2\bar{c}$ возможно непосредственное вычисление асимптотики этого интеграла при переходе к пределу $\gamma L/\bar{c}\to 0$,

$$\lim_{\gamma L/\bar{c}\to 0}\int_{\gamma/2\bar{c}}^{\infty}\sin(\omega(\mathbf{k})t+kr)\frac{dk}{\omega(\mathbf{k})}=\bar{c}^{-1}\int_0^{\infty}\sin\Big[\frac{(\bar{c}t+r)k}{L}\Big]\frac{dk}{k}=\frac{\pi}{2\bar{c}}\mathrm{sgn}(\bar{c}t+r).$$

Для вычисления асимптотики интеграла по интервалу $[0,\gamma/2\bar{c}]$ при $\gamma L/\bar{c}\to 0$ совершим сначала замену переменной интегрирования $k=(\gamma\sin\xi)/2\bar{c}$,

$$\int_0^{\gamma/2\bar{c}}\sin(i\,|\omega(\mathbf{k})|\,t+kr)\frac{dk}{i\,|\omega(\mathbf{k})|}=-\frac{i}{\bar{c}}\int_0^{\pi/2}\sin\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\xi+i\frac{\gamma t}{2}\cos\xi\Big)d\xi$$

и сделаем $r$ и $t$ безразмерными, как было указано в предыдущем разделе. При этом в показателе экспоненты коэффициент в первом слагаемом стремится к нулю, а коэффициент при втором слагаемом $\sim\gamma L^2\kappa/щ$ имеет типичное значение порядка $10^{-8}\div 10^{5}$, согласно сказанному в разд.3. Однако точное значение этого интеграла становится несущественным, так как, в дальнейшем, необходима только производная по $r$

$$-\frac{i}{\bar{c}}\int_0^{\pi/2}\sin\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\xi+i\frac{\gamma t}{2}\cos\xi\Big)d\xi\sim\frac{1}{2\bar{c}}\int_0^{\pi/2}\exp\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\xi\Big)d\xi.$$

Подставляя в (45) найденные асимптотические выражения, находим

$$v(r,t)=\frac{\pi}{\bar{c}}\delta(\bar{c}t+r),$$

и поэтому после подстановки этого выражения в (44) и затем в (43), получаем

$$V(\mathbf{x},t)=\frac{\Theta(t)}{4\pi\bar{c}r}e^{-\gamma t/2}D_-(r,t),\quad D_\pm(r,t)=\delta(r+\bar{c}t)\pm\delta(r-\bar{c}t). \tag{46}$$

Найдем теперь явное выражение для обобщенной функции $W(\mathbf{x},t)$. Вычисляя интеграл по $\omega$ в формуле (37), используя полюса $\omega=i\gamma$, $\omega_\pm(\mathbf{k})=i\gamma/2\pm\omega(\mathbf{k})$, $\gamma>0$ аналитической подинтегральной функции, которые лежат в верхней полуплоскости, получим

$$W(\mathbf{x},t)=-i\frac{\Theta(t)}{4\pi}\Big[\frac{e^{-\gamma t}}{\bar{c}^2r}+\frac{e^{-\gamma t/2}}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\Big[\frac{e^{i\omega(\mathbf{k})t}}{\omega_-(\mathbf{k})}-\frac{e^{-i\omega(\mathbf{k})t}}{\omega_+(\mathbf{k})}\Big]\frac{d\mathbf{k}}{2\omega(\mathbf{k})}\Big],$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}}{\mathbf{k}^2}d\mathbf{k}=\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin kr}{k}dk=\frac{2\pi^2}{r}.$$

Преобразование подинтегрального выражения дает следующее представление для $W(\mathbf{x},t)$:

$$W(\mathbf{x},t)=-i\frac{\Theta(t)}{4\pi\bar{c}^2}\Big[\frac{e^{-\gamma t}}{r}+\frac{e^{-\gamma t/2}}{4\pi^2}\big(\gamma w(\mathbf{x},t)-2\dot{w}(\mathbf{x},t)\big)\Big], \tag{47}$$

где

$$w(\mathbf{x},t)=\int_{3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}\frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}. \qquad (48)$$

Для вычисления асимптотики функции $w(\mathbf{x},t)$ перейдем в интеграле к сферическим координатам

$$w(\mathbf{x},t)=\int_{\Pi^3}\frac{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}}{\mathbf{k}^2}\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}d\mathbf{k}=\frac{4\pi}{r}\int_0^\infty \sin kr\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}\frac{dk}{k} \qquad (49)$$

и, как при вычислении асимптотики $V(\mathbf{x},t)$, разобьем интервал интегрирования на две части $[0,\gamma/2\bar{c}]$ и $[\gamma/2\bar{c},\infty)$. При интегрировании по второму из этих интервалов заменим переменную интегрирования $k\Rightarrow k+\gamma/2\bar{c}$ и затем обезразмерим ее $k\Rightarrow k/L$. В результате в подинтегральном выражении появляется малый параметр $\gamma L/\bar{c}$, устремляя который к нулю, получаем следующее предельное выражение:

$$\int_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin kr\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}\frac{dk}{k}\to\bar{c}^{-1}\int_0^\infty \sin kr\cdot\sin(k\bar{c}t)\frac{dk}{k^2}=\frac{\pi}{4\bar{c}}[|r+\bar{c}t|-|r-\bar{c}t|]. \qquad (50)$$

Асимптотика интеграла по интервалу $[0,\gamma/2\bar{c}]$ находится таким же образом как и интеграла по этому же интервалу при вычислении асимптотики функции $v(\mathbf{x},t)$ – заменой переменной $k=(\gamma/2\bar{c})\sin\xi$,

$$\int_0^{\gamma/2\bar{c}}\sin kr\frac{\sin(\omega(\mathbf{k})t)}{\omega(\mathbf{k})}\frac{dk}{k}=\frac{2}{\gamma}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((\gamma r/2\bar{c})\sin\xi\big)}{\sin\xi}\mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\xi\Big)d\xi\sim\frac{r}{2\bar{c}}\int_0^{\pi/2}\exp\big[\gamma t\cos\xi/2\big]d\xi\sim\frac{r}{2\bar{c}}e^{\gamma t/2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}},$$

где использовано асимптотическое отношение $\sin((\gamma r/2\bar{c})\sin\xi)\sim(\gamma r/2\bar{c})\cdot\sin\xi$.

Принимая теперь во внимание полученные результаты – формулы (47) и (49), находим

$$w(\mathbf{x},t)=\frac{\pi^2}{r\bar{c}^2}\Big[|r+\bar{c}t|-|r-\bar{c}t|\Big]+\frac{2\pi}{\bar{c}}e^{\gamma t/2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}}$$

и, следовательно, явное выражение для обобщенной функции $W(\mathbf{x},t)$ имеет вид:

$$W(\mathbf{x},t)=-\frac{i\Theta(t)}{4\pi r\bar{c}^2}\Big[e^{-\gamma t}-\frac{1}{2}e^{-\gamma t/2}\Big(\mathrm{sgn}(r+\bar{c}t)+\mathrm{sgn}(r-\bar{c}t)-\frac{\gamma}{2\bar{c}}\Big[|r+\bar{c}t|-|r-\bar{c}t|\Big]\Big)+\frac{r}{2\bar{c}t}(\pi\gamma t)^{-1/2}\Big]. \qquad (51)$$

## 7. Интегральные представления $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$

В этом разделе мы получим асимптотические в смысле предельных переходов $\gamma L/\bar{c}\to 0$, а затем щ$/L\bar{c}\kappa\to 0$ интегральные представления для потоков $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$, не содержащие $\delta$-функционных особенностей.

Ниже мы будем использовать обозначение $\nabla^{(j)}$ для градиентов, соответственно, по переменным $\mathbf{y}_j$, $j=1,2$.

Так как во всех интегралах (39–41) в подинтегральных выражениях содержится градиент функции $V(\mathbf{x},t)$ с $\delta$-функционной особенностью, то выполним в них интегрирование по частям по переменной $\mathbf{y}_2$, перебрасывая градиент $\nabla^{(2)}$ на гладкие функции, с заменой пространственных переменных интегрирования $\mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y}_j$, $j=1,2$ и $s \Rightarrow t-s$, а затем вычисляем интеграл по $s$ посредством $\delta$-функции. При этом, ввиду того, что в $r+\bar{c}t>0$ при $t>0$, то из (40) следует, что при интегрировании для функции $V(\mathbf{x},t)$ нужно использовать следующее ее асимптотическое представление:

$$V(\mathbf{x},t)=-\frac{\Theta(t)}{4\pi\bar{c}r}e^{-\gamma t/2}\delta(r-\bar{c}t). \tag{52}$$

В результате указанных преобразований, получаем следующие формулы:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)=-i\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\nabla_j^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}\times$$
$$\times U(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2, \tag{53}$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)=-\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\nabla_j^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}\times$$
$$\times \dot{V}(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2, \tag{54}$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)=\frac{iR}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\nabla_j^{(1)}\nabla_m^{(1)}\nabla_m^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}\times$$
$$\times W(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2. \tag{55}$$

Для перехода к получения асимптотического поведения этих интегралов в пределе $щ/L\bar{c}\kappa \to 0$ будем предполагать, что распределение температуры $T(\mathbf{x},t)$, в силу выполнимости для него уравнения (1) обладает следующей асимптотикой

$$T(\mathbf{x},t-s)=T(\mathbf{x},t)\Big(1+\frac{щ}{\kappa L^2}sO(1)\Big).$$

Тогда, при переходе к указанному пределу в интегралах (53-55), нужно пренебречь временными сдвигами в функциях $a(\mathbf{x},t-s)=a(T(\mathbf{x},t-s))$, так как

$$a(\mathbf{x},t-s;T)=a(\mathbf{x},t;T)+\Big(\frac{da(T)}{dT}\Big)_{T(\mathbf{x},t)}(T(\mathbf{x},t-s)-T(\mathbf{x},t))+o\Big(\frac{щ}{\kappa L\bar{c}}\Big).$$

В результате, из формул (53-55) получаем окончательно следующие интегральные представления для вычисляемых нами плотностей потоков,

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)=-i\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\Big[\nabla_j^{(2)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\Big]U(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2, \tag{56}$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)=-\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\Big[\nabla_j^{(2)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\Big]\dot{V}(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2, \tag{57}$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)=\frac{R}{4\pi i}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\Big]W(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2. \tag{58}$$

## 8. Асимптотика функции $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/L \to 0$

Начиная с этого раздела мы займемся вычислением асимптотического выражения для плотности $S_j(\mathbf{x},t)$ потока энергии в виде главного члена асимптотики выражений (56-58) при стремлении радиуса корреляций $r_0/L \to 0$. Для осуществления такого предельного перехода нужно ввести явным образом параметр $r_0$ в эти выражения. Это достигается посредством замены в выражениях (56-58) корреляционной функции $K(|\mathbf{x}|) = r_0^{-3}Q(\mathbf{x}^2/2r_0^2)$, которая обеспечивает независимость от $r_0$ интеграла $\int K(|\mathbf{z}|)d\mathbf{z}$. Так как подинтегральная функция имеет особенности, то переход к пределу при $r_0/L \to 0$, невозможен посредством замены в подинтегральном выражении $K(|\mathbf{z}|)$ на $K\delta(\mathbf{z})$ с положительной постоянной $K$.

После введения в явном виде зависимости от $r_0$ в подинтегральные выражения в (56-58), произведем замены переменных $\mathbf{y}_1/r_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2/r_0 \Rightarrow \mathbf{y}_2$:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -i\frac{r_0R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\left[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)U(r_0\mathbf{y}_1,r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\right]\times$$
$$\times a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2, \qquad (59)$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\left[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)\dot{V}(r_0\mathbf{y}_1,r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\right]\times$$
$$\times a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2, \qquad (60)$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = -\frac{iR}{4\pi r_0}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\left[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)W(r_0\mathbf{y}_1,r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\right]\times$$
$$\times a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2. \qquad (61)$$

После этого, переходя к пределу $r_0 \to 0$, вычислим главные члены асимптотического разложения плотностей $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$, используя подстановки в подинтегральные выражения асимптотические значения функций $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ соответственно. При этом будет показано, что эти главные значения получаются в том случае, когда амплитуды $a(\mathbf{x},t;T)$ равно как и асимптотические значения функций $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ в подинтегральных выражениях не дифференцируются по пространственным аргументам.

В этом разделе мы находим асимптотическое поведение функции $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$. Для этой функции с учетом того, что для получения главного члена асимптотики нет необходимости в дифференцировании амплитуды $a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)$, получаем выражение

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -i\frac{r_0R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\left[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\right]a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)U(r_0\mathbf{y}_1,r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2. \qquad (62)$$

В результате, из (62), используя явное выражение (42) для функции $U(\mathbf{x},t)$, получаем асимптотическую формулу для первой из этих плотностей

$$S_j^{(u)} = a^2(\mathbf{x},t;T)\Big(\frac{r_0^{-2}R}{4\pi\bar{c}^2}\Big)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla_j Q(\mathbf{y}^2/2)}{|\mathbf{y}|}d\mathbf{y} + r_0^{-2}o(1), \tag{63}$$

где интеграл равен нулю ввиду сферической симметрии корреляционной функции. Таким образом, окончательно получаем $S_j^{(u)} = r_0^{-2}o(1)$ при $r_0 \to 0$.

## 9. Асимптотика функции $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/L \to 0$

Принимая замечание сделанное выше замечание об исключении из рассмотрения слагаемых с градиентами амплитуды $a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)$, запишем выражение для плотности $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, содержащий главный член асимптотики

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0R}{4\pi\bar{c}^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}\Big[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\Big]a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)\dot{V}(r_0\mathbf{y}_1,r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2, \tag{64}$$

Вычислим асимптотику этого интеграла, воспользовавшись асимптотикой (52) функции $V(\mathbf{x},t)$. При этом производная по времени этой асимптотики при $t>0$ равна

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = -\frac{\gamma}{2}V(\mathbf{x},t) + \frac{\Theta(t)}{4\pi r}e^{-\gamma t/2}\delta'(r-\bar{c}t). \tag{65}$$

Тогда, подставляя это выражение в (64), получаем

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)\Big[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\Big]\times$$

$$\times\Big(\frac{\gamma}{2\bar{c}}\delta(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)) + \delta'(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))\Big)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2. \tag{66}$$

где мы учли, что $\delta$ -функция $\delta(|\mathbf{y}_2|+|\mathbf{y}_1|)$ не дает вклада в интеграл.

После обезразмеривания переменных интегрирования, первое слагаемое будет пропорционально малому параметру $\gamma L/\bar{c}$. Однако, для того, чтобы им можно было пренебречь, нужно сначала выяснить какой порядок по $r_0^{-1}$ имеет соответствующий ему интеграл. Этот интеграл в сферических координатах записывается в виде

$$\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t)\Big[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\Big]\delta(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2 =$$

$$= r_0^{-1}\int_0^\infty \xi^3\exp\Big[-\gamma r_0\xi/\bar{c}\Big]d\xi\int_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1}a(\mathbf{x}-r_0\xi\mathbf{n}_1,t;T)a(\mathbf{x}-r_0\xi\mathbf{n}_2,t;T)(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)_jQ'(\xi^2|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|^2/2)d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2),$$

где введены интегрирования в $d\Omega(\mathbf{n}_1)$ и $d\Omega(\mathbf{n}_2)$ по телесным углам векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$. Последний интеграл равен нулю, так во внутреннем интеграле подинтегральное выражение антисимметрично относительно перестановки $\mathbf{n}_1 \Leftrightarrow \mathbf{n}_2$. Следовательно, для выяснения того, какому типу асимптотического поведения соответствует слагаемое в подинтегральном выражении в $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ при $r_0 \to 0$, рассмотрим асимптотику поправки к этому слагаемому, которая возникает вследствие дифференцирования амплитуды $a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)$. Эту поправку запишем в виде

$$\left(\frac{\gamma}{2\bar{c}}\right)\left(\frac{r_0 R}{(4\pi\bar{c})^2}\right)\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)\left[\nabla_j a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)\right]Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\delta(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2=$$

$$=\left(\frac{\gamma}{2\bar{c}}\right)\left(\frac{R}{(4\pi\bar{c})^2}\right)\int_0^\infty \xi^2 e^{-\gamma r_0\xi/\bar{c}}d\xi\int_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1}a(\mathbf{x}-r_0\xi\mathbf{n}_1,t;T)\left[\nabla_j a(\mathbf{x}-r_0\xi\mathbf{n}_2,t;T)\right]Q(\xi^2(\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1)^2/2)d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2)\sim$$

$$\sim\left[\nabla_j a^2(\mathbf{x},t;T)\right]\left(\frac{\gamma}{4\bar{c}}\right)\left(\frac{R}{(4\pi\bar{c})^2}\right)\int_0^\infty \xi^2 Q(\xi^2/2)d\xi\int_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1}\frac{\exp\left[-\dfrac{\gamma r_0\xi}{\bar{c}|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|}\right]}{|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|^3}d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2).$$

Так как внутренний интеграл равен

$$\int_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1}\frac{\exp\left[-\dfrac{\gamma r_0\xi}{\bar{c}|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|}\right]}{|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|^3}d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2)=4\pi^2\int_0^1\exp\left[-\gamma r_0\xi\eta/2\bar{c}\right]d\eta=4\pi^2$$

и, таким образом, искомая нами поправка имеет порядок $(\gamma L/\bar{c})O(1)$, ввиду сходимости интеграла $\int_0^\infty \xi^2 Q(\xi^2/2)d\xi$.

Вычислим теперь вклад в асимптотику функции $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ от интеграла с $\delta'(\cdot)$-функцией. Для вычисления этого вклада в этом интеграл удобно вернуться к переменным интегрирования $r_0\mathbf{y}_j\Rightarrow\mathbf{y}_j$, $j=1,2$, $\bar{R}=Rr_0^{-3}/(4\pi\bar{c})^2$,

$$-\bar{R}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\left[\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\right]\delta'(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2=$$

$$=-\frac{\bar{R}}{r_0^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)(\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)_j Q'((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\delta'(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2=$$

$$=r_0^{-2}\bar{R}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\left(C_{\parallel}(\mathbf{y}_2)\mathbf{n}+\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)\right)d\mathbf{y}_2, \qquad (67)$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{y}_2/|\mathbf{y}_2|$ и

$$C_{\parallel}(\mathbf{y}_2)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\mathbf{y}_2|-(\mathbf{n},\mathbf{y}_1)}{|\mathbf{y}_1|}Q'((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\delta'(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1,$$

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbf{y}_1-(\mathbf{y}_1,\mathbf{n})\mathbf{n}}{|\mathbf{y}_1|}Q'((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\delta'(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1$$

так, что $(\mathbf{C}_\perp,\mathbf{n})=0$.

Вычислим $C_{\parallel}(\mathbf{y}_2)$ в сферических координатах, вводя векторы $\mathbf{m}=\cos\theta\mathbf{n}+\sin\theta\mathbf{l}(\varphi)$, $\mathbf{l}(\varphi)=\mathbf{e}_1\cos\varphi+\mathbf{e}_2\sin\varphi$, $\mathbf{z}^2=\mathbf{y}_2^2+r^2-2r|\mathbf{y}_2|\cos\theta$

$$C_{\parallel}(\mathbf{y}_2)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^\infty r(|\mathbf{y}_2|-r\cos\theta)Q'\left(\mathbf{z}^2/2r_0^2\right)\delta'(r-|\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x}-r\mathbf{m},t;T)dr=$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} \frac{d}{dr}\Big[r(|\mathbf{y}_2| - r\xi)Q'\left(\mathbf{z}^2/2r_0^2\right)a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t;T)\Big]_{r=|\mathbf{y}_2|} d\xi =$$

$$= -r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2r_0^{-2}} \Big[\Big((2r_0^2\xi - 1)|\mathbf{y}_2| Q'(\mathbf{z}^2/2) + r_0^2\left(|\mathbf{y}_2|^3 \xi^2\right)Q''(\mathbf{z}^2/2)\Big)a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{m}, t;T) -$$

$$-r_0^2\mathbf{y}_2^2\xi(\mathbf{m},\nabla)a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{m}, t;T)Q'(\mathbf{z}^2/2)\Big]d\xi,$$

где произведена замена $(1-\xi)/r_0^2 \Rightarrow \xi$ и поэтому $\mathbf{m} = (1 - r_0^2\xi)\mathbf{n} + r_0(\xi(2 - r_0^2\xi))^{1/2}\mathbf{l}(\varphi)$, $\mathbf{z}^2 = 2\mathbf{y}_2^2\xi$. Переходя к пределу $r_0 \to 0$, в интеграле, находим $\mathbf{m} \to \mathbf{n}$,

$$C_{\neg}(\mathbf{y}_2) = 2\pi Q_0 r_0^2 a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t;T)(1 + O(r_0^2))|\mathbf{y}_2|^{-1}, \tag{68}$$

где предполагается, что $Q_0 = Q(0) < \infty$.

Вычислим теперь интеграл $\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)$, который в сферических координатах, используя $\delta'$-функцию, преобразуется к виду

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = \int_0^{2\pi} \mathbf{l}(\varphi)d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d}{dr}\Big[r^2 Q'\left(\mathbf{z}^2/2r_0^2\right)a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t;T)\Big]_{r=|\mathbf{y}_2|} \sin^2\theta d\theta,$$

где снова мы положили $\mathbf{z}^2 = \mathbf{y}_2^2 + r^2 - 2|\mathbf{y}_2| r\cos\theta$, $\mathbf{m} = \cos\theta\mathbf{n} + \sin\theta\mathbf{l}(\varphi)$. Используя сначала замену $\sin^2\theta d\theta = (1-\xi^2)^{1/2}d\xi$, посредством точно таких же дальнейших преобразований внутреннего интеграла по $\xi$, которые были применены при вычислении $C(\mathbf{y}_2)$, приходим к следующему выражению

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = r_0^3 \int_0^{2\pi} \mathbf{l}(\varphi)d\varphi \int_0^{2/r_0^2} \Big[\Big[2|\mathbf{y}_2|Q'\left(\mathbf{z}^2/2\right) + |\mathbf{y}_2|^3 \xi Q''\left(\mathbf{z}^2/2\right)\Big]a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{m}, t;T) -$$

$$-\mathbf{y}_2^2(\mathbf{m},\nabla)a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{m}, t;T)Q'\left(\mathbf{z}^2/2\right)\Big][\xi(2 - r_0^2\xi)]^{1/2}d\xi,$$

где $\mathbf{m} = (1 - r_0^2\xi)\mathbf{n} + r_0(\xi(2 - r_0^2\xi))^{1/2}\mathbf{l}(\varphi)$, $\mathbf{z}^2 = 2\mathbf{y}_2^2\xi$. Переходя к пределу $r_0 \to 0$, получаем асимптотическое выражение

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = r_0^3 \int_0^{2\pi} \mathbf{l}(\varphi)d\varphi \int_0^{\infty} \Big[\Big[2|\mathbf{y}_2|Q'\left(\mathbf{z}^2/2\right) + |\mathbf{y}_2|^3 \xi Q''\left(\mathbf{z}^2/2\right)\Big]a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t;T) -$$

$$-\mathbf{y}_2^2(\mathbf{n},\nabla)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t;T)Q'\left(\mathbf{z}^2/2\right)\Big][2\xi]^{1/2}d\xi = o(r_0^3),$$

так как во внутреннем интеграле исчезла зависимость от $\varphi$ и $\int_0^{2\pi} \mathbf{l}(\varphi)d\varphi = 0$.

Подставляя найденные асимптотические выражения $C(\mathbf{y}_2)$ и $\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)$ в (67), а затем в (66), находим окончательную асимптотическую формулу для $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$,

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0^{-3}RQ_0}{8\pi\overline{c}^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_j e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\overline{c}}}{|\mathbf{y}|^3} a^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t;T)d\mathbf{y}. \tag{69}$$

Полученная формула показывает, что при вычислении главного члена асимптотика плотности потока $S_j(\mathbf{x},t)$ той его частью, которая обозначена нами $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$ можно пренебречь.

### 10. Асимптотика функции $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/L\to 0$

Перейдем теперь к вычислению асимптотики функции $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$.

Подставляя асимптотическое выражение (51) для $W(\mathbf{x},t)$ в (58), а также произведя замены переменных интегрирования $r_0\mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}_j$, $j=1,2$, находим

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\times$$

$$\times\Big[e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}-\frac{1}{2}e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}\Big(1+\operatorname{sgn}(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)-\frac{\gamma}{2\bar{c}}\Big[|\mathbf{y}_1|+|\mathbf{y}_2|-||\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2||\Big]\Big)+\frac{|\mathbf{y}_1|}{2|\mathbf{y}_2|^{3/2}}\Big(\frac{\bar{c}}{\pi\gamma}\Big)^{1/2}\Big]d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2. \quad (70)$$

Несмотря на то, что как было уже указано последние слагаемые малы с точки зрения малых параметров $\gamma L/\bar{c}$, проверим, что они не приводят к более быстрой асимптотике при $r_0\to 0$. Что касается последнего слагаемого, то оно в указанном случае стремится к конечному пределу. В самом деле, заменой $\mathbf{y}_1/r_0\Rightarrow\mathbf{y}_1$ этот интеграл сводится к следующему

$$r_0^{-3}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|^{5/2}}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|^{5/2}}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_2\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q(\mathbf{y}_1^2/2)\Big]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2-r_0\mathbf{y}_1,t;T)d\mathbf{y}_1\to$$

$$\to\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|^{5/2}}a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_2\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q(\mathbf{y}_1^2/2)\Big]d\mathbf{y}_1.$$

Убедимся теперь в том, что можно пренебречь также предпоследним слагаемым в подинтегральном выражении (70). В самом деле, рассмотрим соответствующий интеграл, в котором сделаем такие же преобразования как и в интеграле, рассмотренном выше,

$$r_0^{-3}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q\Big((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2\Big)\Big]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\Big[|\mathbf{y}_1|+|\mathbf{y}_2|-||\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2||\Big]d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q\Big((\mathbf{y}_1^2/2\Big)}{|r_0\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2|}a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2-r_0\mathbf{y}_1,t;T)\times$$

$$\times\Big[|r_0\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2|+|\mathbf{y}_2|-||r_0\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2|-|\mathbf{y}_2||\Big]d\mathbf{y}_1\to$$

$$\to 2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2|}a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q\Big((\mathbf{y}_1^2/2\Big)d\mathbf{y}_1,$$

где последний интеграл равен нулю.

Таким образом, нам остается вычислить асимптотику, связанную с первыми двумя слагаемыми в (70). Рассмотрим первое слагаемое

$$S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)\equiv-\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-3\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2.$$

Заменим переменные интегрирования, согласно формулам $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)/2$, $\mathbf{z}=\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2$, согласно которым якобиан перехода равен 1, а затем заменим $\mathbf{z}/r_0 \Rightarrow \mathbf{z}$. В результате, получим

$$S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t) \equiv -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6} \frac{\exp\left[-3\gamma\,|\,\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2\,|\,/2\bar{c}\right]}{|\,\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2\,||\,\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2\,|}\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]\times$$

$$\times a(\mathbf{x}-\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2,t;T)d\mathbf{y}d\mathbf{z}.$$

Отсюда, переходя к пределу $r_0 \to 0$, найдем, что член асимптотики функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, пропорциональный $r_0^{-3}$ равен нулю, так как равно нулю предельное при $r_0 \to 0$ выражение интеграла,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-3\gamma|\mathbf{y}|/2\bar{c}}}{\mathbf{y}^2}a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]d\mathbf{z}=0,$$

ввиду того, что в последнем интеграле замена переменной интегрирования $\mathbf{z} \Rightarrow -\mathbf{z}$ в подинтегральном выражение изменяет его знак на обратный (при условии интегрируемости функции $\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]$).

Наконец, рассмотрим второе слагаемое в (70), которое, с учетом функции $[1+\mathrm{sgn}(|\,\mathbf{y}_1\,|-|\,\mathbf{y}_2\,|)]/2=\theta(|\,\mathbf{y}_1\,|-|\,\mathbf{y}_2\,|)$,

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6:|\mathbf{y}_1|>|\mathbf{y}_2|} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2\,||\,\mathbf{y}_1\,|}\left[\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\right]a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2.$$

Производя те же самые замены переменных интегрирования, что и при анализе функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, получим

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \equiv -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^6:(\mathbf{y},\mathbf{z})>0} \frac{\exp\left[-\gamma\,|\,\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2\,|\,/\bar{c}\right]}{|\,\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2\,||\,\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2\,|}\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]\times$$

$$\times a(\mathbf{x}-\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2,t;T)d\mathbf{y}d\mathbf{z}.$$

Далее, переходя к пределу $r_0 \to 0$, получим главный член асимптотики анализируемой функции в следующем виде:

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \equiv -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{\mathbf{y}^2}a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y}\int_{\mathbb{R}^3:(\mathbf{y},\mathbf{z})>0}\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]d\mathbf{z}. \qquad (71)$$

Преобразуем внутренний интеграл, используя формулу векторного анализа типа формулы Гаусса,

$$\int_{\mathbb{R}^3:(\mathbf{y},\mathbf{z})>0}\left[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\right]d\mathbf{z}=-\mathbf{n}_j\int_{\mathbb{R}^2}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)d\Sigma(\mathbf{z}), \qquad (72)$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{y}/|\,\mathbf{y}\,|$ и интегрирование производится по плоскости векторов $\mathbf{z}$, перпендикулярной $\mathbf{n}$ и проходящей через точку $\mathbf{z}=0$. При этом предполагается, что $\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)$ достаточно быстро стремится к нулю в $\mathbf{R}^3$ при $|\,\mathbf{z}\,|\to\infty$ так, чтобы обращался в нуль поверхностный интеграл по неограниченно расширяющейся цилиндрической поверхности в пространстве векторов $\mathbf{z}$ с основанием цилиндра на плоскости $z_3=0$.

Перейдем в последнем интеграле к полярным координатам $\langle \eta, \alpha \rangle$ в плоскости интегрирования. В результате, выполнив интегрирование по $\alpha \in [0, 2\pi]$, запишем

$$\int_{\Pi^2} \Delta^{(\mathbf{z})} Q(\mathbf{z}^2/2) d\Sigma(\mathbf{z}) = 2\pi \int_0^\infty \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \eta}\eta\frac{\partial}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\Big) Q\Big(\frac{\eta^2+z_3^2}{2}\Big)\Big]_{z_3=0} d\eta = 2\pi\int_0^\infty \eta Q'(\eta^2/2) d\eta = -\pi Q_0.$$

Подставляя это выражение в (72), а затем в (71) получим, с учетом обращения в нуль коэффициента при $r_0^{-3}$ в асимптотике функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, асимптотическое выражение для плотности потока

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0^{-3} R Q_0}{16\pi \bar{c}^2} \int_{\Pi^3} \frac{y_j e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}|^3} a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t; T) d\mathbf{y}. \qquad (73)$$

## Заключение

Сумма выражения (73) и главного члена асимптотики плотности $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ (69), который имеет тот же порядок при $r_0 \to 0$, находим, окончательное выражение для асимптотики плотности потока энергии флуктуационного электромагнитного поля

$$S_j(\mathbf{x},t) = -\frac{3 r_0^{-3} R Q_0}{16\pi \bar{c}^2} \int_{\Pi^3} \frac{y_j e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}|^3} a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t; T) d\mathbf{y}, \qquad (74)$$

которое решает поставленную в настоящей работе задачу.

Полученное выражение для плотности потока энергии, в принципе, может быть получено на основе рассуждений, используемых в теории переноса излучения в среде (см. [1]-[3]). В то же время, следует отметить, что имеется существенное отличие от формулы стандартной теории, в рамках которой плотность потока выводится на основе представлений геометрической оптики для тех физических условий, в рамках которых был получен результат настоящей работы. Оно связано с наличием веса $\mathbf{y}^{-2}$ в интегральном ядре формулы (74). Появление этого веса связано с наличием изотропного «рассеяния» излучения, испускаемого каждой пространственной точкой среды. Такой эффект не учитывается в рамках представлений геометрической оптики.

## Список литературы

1. Sparrow E.M., Cess R.D. 1972. Radiation heat transfer. Belmont: Brooks/Cole Publishing Company , 295.

2. Рубцов Н.А., 1984. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 278.

Rubtsov N.A., 1984. Heat conduction by irradiation in complex media. Novosibirsk: Nauka, Sibirian department, 278.

3. Петров В.А., Марченко Н.В., 1985. Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах. М: Наука, 190.

Petrov V.A., Marchenko N.V., 1985. Energy transition in partially transparent solid materials. M.: Nauka, 190.

4. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P., 2006. Analytic approach to the heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The large optical length approximation. Functional Materials, 13; 3: 372-380.

5. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А., 2009. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход. Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика, 5(60); 16: 47-67.

Virchenko Yu.P., Saprykin M.A., 2009. One-dimensional problem of heat radiative conductance. Fluctuation approach. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 2009. 5(60);16: 47-67.

6. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A., 2011. Nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in dielectric media. Functional Materials, 18; 4: 504-511.

7. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А., 2010. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена. Доповіді НАНУ, 12: 63-69.

Virchenko Yu.P., Saprykin M.A., 2010. Fluctuation approach in the heat radiative conductance theory. Dopovidi NANU, 12: 63-69.

8. Рытов С.М., 1953. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М.: Изд. АН СССР.

Rytov S.M., 1953. Theory of electrical fluctuations and heat irradiation. M.: USSR Academy of Science.

9. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А., 1978. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля. М.: Наука, 464.

Rytov S.M., Tatarskii V.I., Kravtsov Yu.A., 1978. Introduction to statistical radiophysics, P.2, Random fields. M.: Nauka, 464.

10. Гл. ред. Шаскольская М.П., 1982. Акустические кристаллы. Справочник. Москва: Наука, 632.

Ed. Shaskalskaya M.P., 1982. Acoustic crystals. Handbook. M.: Nauka, 632.

11. Яглом А.М., 1963. Спектральные представления для различных классов случайных функций. В кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, т. 1. Л.: Изд. Ленинградского ута, 250—273.

Yaglom A.M., 1963. Spectral representation of different classes of random functions. In: Transactions of 4-th USSR Mathematical Congress , V.1. Leningrad: Leningrad University, 250-273.

12. Гихман И. И., Скороход А. В., 1971. Теория случайных процессов, т.1. М.: Наука, 664.

Gikhman I.I., Skorokhod A.V., 1971. Theory of random processes. V.1. M.: Nauka, 664.