УДК 517.95

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

ON AN APPROXIMATE METHOD OF SOLVING A NONLOKAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HALLAIRE EQUATION

Р.Х. Макаова
R.KH. Makaova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89-а
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89-a Shortanova St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

Аннотация. В данной работе приводится описание одного приближенного метода решения нелокальной краевой задачи для уравнения Аллера, основанный на редукции к нагруженному уравнению.
Abstract. In this paper we provide a description of one approximate method of solving of nonlocal boundary value problem for the Hallaire equation. This method is based on a reduction to the loaded equation.

Ключевые слова: уравнение Аллера; нелокальная краевая задача; приближенное решение.
Key words: Hallaire equation; nonlocal boundary value problem; approximate solution.

Введение

В прямоугольной области $\Omega=\{(x,y): 0<x<r, 0<y<T\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y},\tag{1}$$

где a, b - заданные положительные числа; $u=u(x,y)$ - значение искомой функции в точке x в момент времени y.

Известно [1, с. 73], что при определенных физических допущениях уравнение (1) описывает одномерное движение почвенной влаги. В работе [2] уравнение такого вида называется модифицированным уравнением влагопереноса.

Уравнение (1) является уравнением в частных производных третьего порядка гиперболического типа, хотя по определению R. E. Showalter, T. W. Ting [3] его принято называть уравнением псевдопараболического типа. Краевые задачи для различных уравнений третьего порядка псевдопараболического типа исследовались в работах [2] - [6], в частности для уравнения влагопереноса [7] - [9].

В данной работе приводится описание одного приближенного метода решения нелокальной краевой задачи для уравнения Аллера (1), основанный на редукции к нагруженному уравнению [10].

Постановка задачи и полученные результаты

Регулярным в области Ω *решением уравнения* (1) *назовем функцию* $u=u(x,y)$ *такую, что* $u\in C(\overline{\Omega})$, u_{xx}, $u_{xxy}\in C(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u=u(x,y)$ *уравнения* (1) *из класса* $u\in C^1(\Omega\cup\{x=0\})$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le r,\tag{2}$$

$$u_x(0,y)=\nu(y), \quad 0\le y\le T, \tag{3}$$

$$u(0,y)=\alpha u(r,y), \quad 0\le y\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)\in C^1[0,r]$, $\nu(y)\in C[0,T]$, $\alpha=const>0$.

Обозначим через

$$\delta(y)=\bar{u}=\frac{1}{r}\int_0^r u(x,y)dx \tag{5}$$

- интегральное среднее значение $u(x,y)$ по переменной x на сегменте $[0,r]$.

В левой части уравнения (1) произведем замену производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ его средним значением $\delta'(y)=\frac{1}{r}\int_0^r u_y(x,y)dx$. Тогда уравнение (1) заменяется аппроксимирующим уравнением

$$\delta'(y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[au(x,y)+b\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]. \tag{6}$$

Функцию $\tilde{u}=\tilde{u}(x,y)$ *назовем приближенным решением задачи* (2) - (4) *для уравнения* (1), *если оно будет точным решением задачи* (2) - (4) *для аппроксимирующего уравнения* (6).

Перепишем уравнение (6) в виде

$$u_y(x,y)+\frac{a}{b}u(x,y)=\frac{x^2}{2b}\delta'(y)+xC_1(y)+C_2(y), \tag{7}$$

где $C_1(y)$, $C_2(y)$ - пока неизвестные, непрерывные для всех $y\in[0,T]$, функции.

Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо в виде

$$u(x,y)=\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\left[\frac{x^2}{2b}\delta'(\eta)+xC_1(\eta)+C_2(\eta)\right]d\eta+\varphi(x)e^{-\frac{a}{b}y}. \tag{8}$$

Удовлетворяя (8) условию (3) и соотношению (5), будем иметь

$$\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}C_1(\eta)d\eta=\nu(y)-\varphi'(0)e^{-\frac{a}{b}y}, \tag{9}$$

$$\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}C_2(\eta)d\eta=\delta(y)-\frac{r^2}{6b}\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\delta'(\eta)d\eta-\frac{r}{2}\left[\nu(y)-\varphi'(0)e^{-\frac{a}{b}y}\right]-\overline{\varphi}e^{-\frac{a}{b}y}. \tag{10}$$

С учетом (9) и (10), представление (8) перепишется в следующей форме

$$u(x,y)=\left(1+\frac{3x^2-r^2}{6b}\right)\delta(y)-\frac{(3x^2-r^2)a}{6b^2}\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\delta(\eta)d\eta-$$

$$-\left(1+\frac{3x^2-r^2}{6b}\right)\overline{\varphi}e^{-\frac{a}{b}y}+\left(x-\frac{r}{2}\right)\left[\nu(y)-\varphi'(0)e^{-\frac{a}{b}y}\right]+\varphi(x)e^{-\frac{a}{b}y}, \tag{11}$$

где $\overline{\varphi}=\frac{1}{r}\int_0^r u(x,0)dx$.

Удовлетворяя (11) нелокальному условию (4), получаем

$$A_\alpha\delta(y)-B_\alpha\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\delta(\eta)d\eta=f_\alpha(y), \tag{12}$$

где

$$A_\alpha=\alpha-1+(2\alpha+1)\frac{r^2}{6b}, \quad B_\alpha=(2\alpha+1)\frac{ar^2}{6b^2}>0,$$

$$f_\alpha(y)=A_\alpha\overline{\varphi}e^{-\frac{a}{b}y}-(\alpha+1)\frac{r}{2}\left[\nu(y)-\varphi'(0)e^{-\frac{a}{b}y}\right]+[\varphi(0)-\alpha\varphi(r)]e^{-\frac{a}{b}y}.$$

При $A_\alpha\neq 0$, уравнение (12) относительно функции $\delta(y)$ представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $K(y-\eta)=e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}$, единственное решение которого выписывается в виде

$$\delta(y)=f(y)+\lambda\int_0^y e^{\left(-\frac{a}{b}+\lambda\right)(y-\eta)}f(\eta)d\eta, \quad (13)$$

где $\lambda=\frac{B_\alpha}{A_\alpha}$, $f(y)=\frac{f_\alpha(y)}{A_\alpha}$.

Если $A_\alpha=0$, то уравнение (12) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода

$$\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\delta(\eta)d\eta=-\frac{f_\alpha(y)}{B_\alpha}. \quad (14)$$

Дифференцируя обе части по y, из (14) переходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\delta(y)=\frac{a}{b}\int_0^y e^{-\frac{a}{b}(y-\eta)}\delta(\eta)d\eta+g(y),$$

где

$$g(y)=-\frac{f'_\alpha(y)}{B_\alpha},$$

решение которого выписывается в виде

$$B_\alpha\delta(y)=\frac{a}{b}[f_\alpha(0)-f_\alpha(y)]-f'_\alpha(y),\ A_\alpha=0. \quad (15)$$

С учетом (13) и (15), из формулы (11) получаем точное решение задачи (2) - (4) для аппроксимирующего уравнения (6).

Список литературы

1. Нахушев А.М. 2012. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 232.

Nakhushev A.M. 2012. Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka, 232. (In Russian)

2. V.A. Yangarber. 1967. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 8 (1): 62-64.

3. R.E. Showalter, T.W. Ting. 1970. Pseudoparabolic partial differential equations. SIAM J. Math. Anal, 1 (1): 1-26.

4. G.I. Barenblatt, Iu.P. Zheltov, I.N. Kochina. 1960. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. PMM, 24 (5): 852-864.

5. D. Colton. 1972. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable. Journal of Differ. Equations, 12 (3): 559-565.

6. Шхануков М.Х. 1982. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах. Журнал Дифференц. уравнения, 18 (4): 689-699.

Shkhanukov M.Kh. 1982. O nekotoryh kraevyh zadachah dlya uravnenij tretego poryadka voznikayushchih pri modelirovanii filtracii zhidkosti v poristyh sredah [Some boundary value problems for a third order differential equations that arise in the simulation of fluid flow in porous media]. Journal of Differ. Equations, 18 (4): 689-699. (In Russian)

7. B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel. 1965. Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation $u_t=u_{xx}-u_{xtx}$ on a Strip. Arch. Rat. Mech. Anal, 19: 100-116.

8. A.I. Kozhanov. 2004. On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation. Journal of Differ. Equations, 40 (6): 815-826.

9. Макаова Р.Х. 2015. Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук, 17 (1): 22-24.

Makaova R.Kh. 2015. Zadacha Trikomi dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa [Tricomi problem for mixed type equation]. Reports Adyghe (Circassian) International Academy of sciences, 17 (1): 22-24. (In Russian)

10. Нахушев А.М. 1982. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод. Журнал Дифференц. уравнения, 18 (1): 72-81.

Nakhushev A.M. 1982. Ob odnom priblizhennom metode resheniya kraevyh zadach dlya differencialnyh uravnenij i ego prilozheniya k dinamike pochvennoj vlagi i gruntovyh vod [On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of soil moisture and groundwater]. Journal of Differ. Equations, 18 (1): 72-81. (In Russian)