УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

THE CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR THREE-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER

Е.Т. Китайбеков
E.T. Kitaybekov

Казахский Национальный педагогический университет им. Абая, Алматы
Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty

E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Аннотация. В работе показана однозначная единственность классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболо – параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Resume. The paper shows the unique solvability of the classical Dirichlet problem in cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with degeneration type and order.

Ключевые слова: задача Дирихле, вырождение типа и порядка, разрешимость, функция Бесселя.
Key words: Dirichlet problem, degeneration of the type and order, solvability, Bessel function.

Введение

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо – параболических уравнений на плоскости изучены в [1].

Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [2]. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений установлены [3,4].

Разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка показано [5], а в данной работе доказывается ее единственность решения.

Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t), ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обазначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$ – а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ, лежащие в полупраспранствах $t > 0$ и $t < 0$, σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество в $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0,\ t > 0, \\ \sum_{i=1}^{2} g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum_{i=1}^{2} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0, p_i(0) = 0, g_j(t) > 0$ при $t > 0,$ и могут обращаются в нуль при $t = 0, p_i(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha)),\quad g_j(t) \in C([\beta,0]), i = 1,2,3., j = 1,2.$

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$, из класса $C^1(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = 0,\ \ u|_{\sigma_\beta} = 0. \tag{3}$$

Пусть

$$\frac{a_i(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{b(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{c(r,\theta,t)}{p_3(t)} \in C^1(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha), d_j(r,\theta,t), e(r,\theta,t) \in C^1(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta),$$

$i = 1,2,3, j = 1,2,\ e(r,\theta,t) \leq 0, \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$

Тогда справедлива

Теорема. Если выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \alpha' \neq 0,\ \ s = 1,2,\dots\ , \tag{4}$$

то решение задача 1 тривиальное, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z),\ \ \alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{k_1(\xi) + k_2(\xi)}{2k_3(\xi)}} d\xi,\ n = 0,1\dots.$

Доказательство теоремы

Рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем, что ее решение нулевое. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^*\upsilon \equiv \sum_{i=1}^{2} g_i(t)u_{x_i x_i} + \upsilon_t - \sum_{i=1}^{2} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = 0, \tag{5}$$

с данными

$$\upsilon|_S = \tau(r,\theta) = \tau_{10}(r), \quad \upsilon|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{6}$$

где $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{2} d_{ix_i}$, $\tau_{10}(r) \in G, G-$ множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$.

Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ ([6]).

Решение задачи (5), (6) в полярных координатах будем искать в виде

$$\upsilon(r,\theta,t) = \upsilon_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(\upsilon_{1n}(r,t)\cos n\theta + \upsilon_{2n}(r,t)\sin n\theta), \tag{7}$$

где $\upsilon_{10}(r,t)$, $\upsilon_{1n}(r,t), \upsilon_{2n}(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (7) в (5), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned}
L_1^*\upsilon &\equiv g_1(t)\left(\cos^2\theta\,\upsilon_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r}\upsilon_{10r}\right) + g_2(t)\left(\sin^2\theta\,\upsilon_{10r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\upsilon_{10r}\right) - \upsilon_{10t} - \\
&- d_1(r,\theta,t)\cos\theta\,\upsilon_{10r} - d_2(r,\theta,t)\sin\theta\,\upsilon_{10r} + d(r,\theta,t)\upsilon_{10} + \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\left\{ g_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nrr} + \sin n\theta\upsilon_{2nrr}) + \frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta\upsilon_{1nr} + \sin n\theta\upsilon_{2nr}) + \right.\right.\\
&+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta\upsilon_{1nr} - \cos n\theta\upsilon_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\cos n\theta\upsilon_{2n} - \sin n\theta\upsilon_{1n}) - \\
&\left. - \frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta\upsilon_{1n} + \sin n\theta\upsilon_{2n})\right] + g_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nrr} + \sin n\theta\upsilon_{2nrr}) + \right.\\
&+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta\upsilon_{2nr} - \sin n\theta\upsilon_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta\upsilon_{1nr} - \sin n\theta\upsilon_{2nr}) + \\
&\left. + \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta\upsilon_{1n} - \cos n\theta\upsilon_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta\upsilon_{1n} + \sin n\theta\upsilon_{2n})\right] - \upsilon_{1nt}\cos n\theta - \\
&- \upsilon_{2nt}\sin n\theta - d_1\left[\cos\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nr} + \sin n\theta\upsilon_{2nr}) + \frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta\upsilon_{1n} - \cos n\theta\upsilon_{2n})\right] - \\
&- d_2\left[\sin\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nr} + \sin n\theta\upsilon_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta\upsilon_{2n} - \sin n\theta\upsilon_{1n})\right] + \\
&\left. + d(\cos n\theta\upsilon_{1n} + \sin n\theta\upsilon_{2n})\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Теперь полученное выражение (8) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$ а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{10}\left(\upsilon_{10rr}+\frac{1}{r}\upsilon_{10r}\right)-\rho_{10}\upsilon_{10t}-\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{10}\left(\upsilon_{10rr}-\frac{1}{r}\upsilon_{10}\right)+$$
$$+a_{10}(r,t)\upsilon_{10r}+c_{10}(r,t)\upsilon_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{jn}\left(\upsilon_{jnrr}+\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\upsilon_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}\upsilon_{jn}\right)-\rho_{jn}\upsilon_{jnt}+\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{jn}\left(\upsilon_{jnrr}-\frac{1}{r}\upsilon_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}\upsilon_{jn}\right)+ \tag{9}$$
$$\left.\left.+\frac{(g_2-g_1)}{2}e_{jn}\left(\upsilon_{jnr}-\frac{\upsilon_{jn}}{2r}\right)+a_{jn}(r,t)\upsilon_{jnr}+c_{jn}(r,t)\upsilon_{jn}\right]\right\}=0,$$

$$\rho_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(\theta)cosn\theta d\theta,\rho_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,d_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho cos2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho cos2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,e_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta cosn\theta d\theta,$$

$$a_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(-d_1cos\theta-d_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho(-d_1cos\theta-d_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$c_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(-d_1\sin\theta+d_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r}+d\cos n\theta\right]d\theta,$$
$$c_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(-d_2\cos\theta+d_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r}+d\sin n\theta\right]d\theta,\ n=0,1,\dots\ .$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_{10}\left(\upsilon_{10rr}+\frac{1}{r}\upsilon_{10r}\right)-\rho_{10}\upsilon_{10t}=0,\ g(t)=\frac{g_1(t)+g_2(t)}{2}, \tag{10}$$

$$g(t)\rho_{j1}\left(\upsilon_{j1rr}+\frac{1}{r}\upsilon_{j1r}-\frac{\upsilon_{j1}}{r^2}\right)-\rho_{10}\upsilon_{j1t}=\frac{(g_2-g_1)d_{10}}{2}\left(\upsilon_{10rr}-\frac{\upsilon_{10r}}{r}\right)-a_{10}\upsilon_{10r}-c_{10}\upsilon_{10}, \tag{11}$$

$$g(t)\rho_{jn}\left(\upsilon_{jnrr}+\frac{1}{r}\upsilon_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}\upsilon_{jn}\right)-\rho_{jn}\upsilon_{jnt}=-\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{jn}\left(\upsilon_{jn-1r}-\frac{1}{r}\upsilon_{jn-1r}-\right.$$
$$\left.-\frac{(n-1)^2}{r^2}\upsilon_{jn-1}\right)-\frac{(g_2-g_1)(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(\upsilon_{jn-1r}-\frac{\upsilon_{jn-1}}{r}\right)-$$
$$-a_{jn-1}\upsilon_{jn-1r}-c_{jn-1},\ j=1,2,n=2,3,\dots\ .$$

Нетрудно показать, что если $\{\upsilon_{10},\upsilon_{jn}\}$, $j=1,2,\ n=1,2,\ \dots$ – решение системы (10), (11), то оно является и решением уравнения (9).

Далее, учитывая ортогональность ([6]) систем тригонометрических функций $\left\{\frac{1}{2},\cos n\theta,\right.$ $\left.\sin n\theta, n=1,2,\ \dots\right\}$ на отрезке $[0,2\pi]$ из краевого условия (6) в силу (7) будем иметь

$$\upsilon_{10}(r,\beta)=0,\ \upsilon_{10}(r,0)=\tau_{10}(r), \tag{12}$$

$$\upsilon_{jn}(r,\beta)=0,\ \upsilon_{jn}(r,0)=0,\ j=1,2,\ n=1,2,\dots . \tag{13}$$

Таким образом, задача (5), (6) сведена к системе задач для уравнений (10),(11) с данными (12) и (13). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10), (11) можно представить в виде

$$g(t)\left(\upsilon_{nrr}+\frac{1}{r}\upsilon_{nr}-\frac{n^2}{r^2}\upsilon_n\right)-\upsilon_{nt}=f_n(r,t), \tag{14}$$

где $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t)\equiv 0$.

В [7] показано, что краевые задачи для уравнения (14) с условиями (12) и (13) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (10), (12) $(j=1,\ n=0)$, а затем (11), (13) $(j=1,2,\ n=1)$ и т.д. найдем последовательно все $\upsilon_{10}(r,t),\ \upsilon_{jn}(r,t),\ j=1,2,\ n=1,2,\dots$.

Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi}\rho(\theta)L_1^*\upsilon d\theta=0. \tag{15}$$

Пусть $f(\mathrm{r},\theta,\mathrm{t})=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0,\ V_0$ – плотна в $L_2((0,1))$,

$\rho(\theta)\in C^\infty((0,2\pi))$ – плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $\mathrm{T(t)}\in \mathrm{V}_1, V_1$ – плотна в $L_2((0,\beta))$.. Тогда $f(\tau,\theta,t)\in V, V=V_0\otimes(0,2\pi)\otimes V_1$ – -плотна в $L_2(D_\beta)$ [6].

Отсюда и из (15) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)L_1^*\upsilon d\Omega_\beta=0$$

и

$$L_1^*\upsilon=0\,,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta\,.$$

Таким образом, решение задачи (5), (6) построено.

Аналогичным образом, строится решение этой задачи, если $\tau(r,\theta)=\tau_{1n}(r)\cos n\theta+\tau_{2n}(r)\sin n\theta,\ n=1,2,\dots$.

Из определения взаимно-сопряженных операторов L_1,L_1^*, ([7]) имеем

$$L_1\equiv\sum_{i=1}^{2}g_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}d_i\frac{\partial}{\partial x_i}+e,$$

$$L_1^*\equiv\sum_{i=1}^{2}g_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2}d_i\frac{\partial}{\partial x_i}+d,$$

$$\upsilon L_1 u-uL_1^*\upsilon\equiv-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где $P(u)=\sum_{i=1}^{2} g_i(t)u_{x_i}\cos\left(\mathrm{N}^{\perp},x_i\right), Q=\cos\left(\mathrm{N}^{\perp},t\right)-\sum_{i=1}^{2} d_i\cos\left(\mathrm{N}^{\perp},t\right)$, а $\mathrm{N}^{\perp}$ – внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$.

Отсюда, по формуле Грина, получим

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{16}$$

Поскольку система функций $\{1,\cos n\theta,\ \sin n\theta, n=1,2,\ \ldots\}$ плотна в $L_2((0,2\pi))$ ([6]), то из (16) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0,\ \forall(r,\theta)\in S$.

Сталь быть, по принципу экстремума для параболического уравнения решение задачи (1), (3) $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$ ([8]).

В [9] показано, что если выполняется условие (4), то решение задачи (1), (2) в $\overline{\Omega}_\alpha$ $u\equiv 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. Нахушев А. М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука: 287 .

Nakhushev A.M. 2006. Problems with a Shift for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka (in Russian).

2. Врагов В. Н. 1983. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ: 84.

Vragov, V.N. 1983. Boundary Value Problems for Non-classical Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk: NGU (in Russian).

3. Алдашев С. А. 1983. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина. Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика, Белгород: 2012, №5(124), вып. 6. -с.12-25.

Aldashev S. A. 2012. Correctness of Dirichlet's and Poincare's problems' in cylindrical domain for degenerated multi-dimensional hyperbolic equations with CHapligin's operator. Belgorod State University Scientific bulletin Mathematics & Physics, vol. 6. №5(124): 12-25 (in Russian).

4. Алдашев С. А. 2014. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений. Материалы IV межд. конференции "Математическая физика и ее приложения," СамГУ, Самара: 46

Aldashev S. A. 2014. Fourth international conference "Mathematical Physics and Its Applications" Samara state University, Samara: 46

5. Китайбеков Е. Т. 2016. Задача Дирихле для трехмерных гиперболо - параболических уравнений с вырождением типа и порядка. Вестник КазНУ им. Ал-Фараби. серия математика, механика, информатика. №1(88): 28-34.

Kitaybekov E. T. 2016. Dirichlet problem for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction. KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series, №1 (88): 28-34 (in Russian).

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука: 543 .

Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka (in Russian).

7. Смирнов В. И. 1981. Курс высшей математики, Т.4, № 2, М.: Наука: 550.

Smirnov V.I. 1981. A Course of Higher Mathematics. Vol. 4, part 2. Moscow: Nauka (in Russian).

8. Фридман А. 1968. Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир: 527.

Fridman A. 1968. Hyperbolic Partial Differential Equations. Moscow: Mir (in Russian).

9. Китайбеков Е. Т. 2016. Единственность решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка. Журнал “Вычислительной и прикладной математики”, Киев: КНУ им. Т. Шевченко, № 3(123): 27-32.

Kitaybekov E. T. 2016. The uniqueness of the solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic equations with type and order degeneration. The journal “Computational and applied mathematics”, Kiev: KNU them. T. Shevchenko. No. 3(123): 27-32 (in Russian).