УДК 517.952

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS

С.А. Алдашев
S.A. Aldashev

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахстан
Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

E-mail: Aldash51@mail.ru

Аннотация. Адамаром показоно, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение поведения колебающейся струны - некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как заметили А.В. Бицадзе, А.М. Нахушев задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гиперболических уравнений, где показана корректность этой задачи, существенно зависящия от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В работе используется метод, предложенный в работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений.

Resume. It has been shown by Hadamard that one of the fundamentalproblems of mathematicalphysics – the analysis of the behavior of oscillating string – is an ill-posedproblemwhen the boundary-value conditions are imposed on the entireboudary of the domain. As noted by A.V. Bitsadze and A.M. Nakhushev, the Dirichlet problemisill-posed not only for the waveequation but for hyperbolicPDEs in general. This author has earlierstudied the Dirichlet problem for multi-dimensionalhyperbolicPDEs, wherehe has shownthat the well-posedness of thisproblemcrucial-lydepends on the height of the analyzedcylindricdomain. This paper, using the methoddeveloped in the authorspreviouspapers, shows the unique solvability (and obtains an explicit form of the classical solution) of the Dirichlet problem in the cylindricdomain for degeneratemulti-dimensionalhyperbolic-parabolicequations.

Ключевые слова: корректность, задачи Дирихле, вырождающихся уравнения, критерия, функция Бесселя.

Key words: well-posedness, Dirichlet problems, degenerateequations, Bessel function.

1. Постановка задачи и результат

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений хорошо изучена ([1]). Их многомерные аналоги в обобщенных пространствах исследованы в ([2,3]).

Задача Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений изучена в ([4,5]).

В данной работе для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений доказано, однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задача Дирихле в цилиндрической области. В работе используется метод, предложенный в работах ([6,7]).

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\beta>0$и $t=\beta<0$ где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющее множество $\{t=0, 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$, рассмотрим вырождающихся многомерные гиперболо-параболические уравнения

$$0=\begin{cases} p(t)\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u, t>0 \\ q(t)\Delta_x u-u_t+\sum_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i}+e(x,t)u, t<0 \end{cases} \tag{1}$$

где $p(t)>0$ при $t>0, p(0)=0,$ $p(t)\in C([0,\alpha])\cap C^2((0,\alpha))$, $g(t)>0$ при $t>0$, $g(0)=0,$ $g(t)\in C([\beta,0])$, а Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x=(x_1,...,x_m)$, $m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1}, t,$ $r\geq 0, 0\leq\theta_i\leq\pi, i=1,2,...,m-2,$ $0\leq\theta<2\pi, \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap \tilde{N}^1(\overline{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha}=\varphi_1(r,\theta),\ u|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\ u|_{\sigma_\beta}=\varphi_2(r,\theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta), \varphi_2(1,0)=\psi_2(\beta,\theta), \psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\leq k\leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_\varepsilon)$, $l=0,1,\ldots$ - пространства Соболева.

Имеет место ([8])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием $p\leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$\left|f_0^1(r)\right| \le c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \le c_2, \quad c_1, c_2 = const..$$

Через $\widetilde{d}_{m}^{k}(r,t)$, $d_n^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\varphi_{1n}^k(t)$, $b_n^k(r,t)$, $\varphi_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций

$$d_i(r,\theta,t)\rho,\ d_i\frac{x_i}{r}\rho,\ e(r,\theta,t)\rho,\ d(r,\theta,t)\rho,\ \rho(\theta),\ i=1,\dots,m,\ \varphi_1(r,\theta),\ \varphi_2(r,\theta),\ \psi_1(t,\theta),\ \psi_2(t,\theta),$$

причем $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$, H- единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega}_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t), e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1,\dots,m,\ l \ge m+1,\ e(r,\theta,t) \le 0,\ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta),\ \varphi_2(r,\theta) \in W_2^p(S),\ \psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha),\ \psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$ и

$$\cos \mu_{s,n}\alpha' \ne 0, s = 1,2,\dots, \tag{5}$$

то задача 1 однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{g(\xi)}d\xi$.

2. Разрешимость задачи 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t)u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([8]), что спектр оператора δ состоит из собственных $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_β будем искать в виде

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по сфере H для $\overline{u}_n^k$ получим ([6,7])

$$
\begin{gathered}
g(t)\rho_0^1 u_{orr}^1 - \rho_0^1 u_{ott}^1 + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{io}^1\right) u_{or}^1 + e_0^1 u_{ot}^1 + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{ g(x)\rho_n^k \overline{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \overline{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right)\overline{u}_{nr}^k + \right. \\
\left. +\left[\widetilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} g(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{d}_{in-1}^k - n d_{in}^k\right)\right]\overline{u}_n^k \right\} = 0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$
g(t)\rho_0^1 \overline{u}_{orr}^1 - \rho_0^1 u_{ot}^1 + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_0^1 \overline{u}_{or}^1 = 0,, \tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
g(t)\rho_1^k \overline{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \overline{u}_{1t}^1 + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_1^k \overline{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k \overline{u}_1^k = \\
= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{io}^1 \overline{u}_{or}^1 + \widetilde{e}_o^1 \overline{u}_o^1\right), n=1, k=\overline{1,k_1},
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
g(t)\rho_n^k \overline{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \overline{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k \overline{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\rho_n^k \overline{u}_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k \overline{u}_{\alpha,n-1r}^k + \right. \\
\left. +\left[\widetilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k\right)\right] u_{n-1}^k \right\}, k=\overline{1,k_n}, n=2,3,\ldots\ .
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Суммируя уравнение (10) от 1 до k_1 а уравнение (11) - от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (9), приходим к уравнению (8).

Отсюда следует, что если $\{\overline{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,2,\ldots$ - решение системы (9) - (11),то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)-(11) можно представить ввиде

$$
g(t)\left(\overline{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k\right) - \overline{u}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{12}
$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_1^k(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (3) в силу (7), будем иметь

$$
\overline{u}_n^k(r,\beta) = \overline{\varphi}_{2n}^k(r), \overline{u}_n^k(1,t) = \psi_{2n}^k(t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots \tag{13}
$$

В (12), (13) произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t) = \overline{u}_n^k(r,t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$
g(t)\left(\overline{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{\upsilon}_n^k\right) - \overline{\upsilon}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{14}
$$

$$
\overline{\upsilon}_n^k(r,\beta) = \varphi_{2n}^k(r), \overline{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{15}
$$

$$f_n^k(r,t)=\bar{f}_n^k(r,t)+\psi_{2nt}^k+\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{2n}^k,\ \varphi_{2n}^k(r)=\overline{\varphi}_{2n}^k(r)-\psi_{2n}^k(\beta).$$

Произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (14), (15) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=\widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{16}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta)=\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{17}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\ \widetilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}f_n^k(r,t),\ \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (16), (17) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{18}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ - решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=\widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{19}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\beta)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{20}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ - решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{21}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\beta)=\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{22}$$

Решениевышеуказанныхзадачрассмотримввиде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{23}$$

при этом пусть

$$\widetilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\ \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{24}$$

Подставляя (23) в (19), (20), с учетом (24), получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \tag{25}$$

$$R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty, \tag{26}$$

$$T_{st}+\mu g(t)T_s=-a_{s,n}(t),\ \beta<t<0, \tag{27}$$

$$T_s(\beta)=0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (25), (26) является ([9])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{29}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (27), (28) является

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t g(\xi)d\xi \right)\right)\left(\int_t^\beta a_{s,n}(\xi)\left(\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1 \right)d\xi \right). \quad (30)$$

Подставляя (29) в (24) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \quad (31)$$

Ряды (31)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ([10]),если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (32)$$

$$b_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (33)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1,2,\ldots -$ положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23),(29),(30) получим решение задачи (19), (20)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (34)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (32).

Далее, подставляя (23) в (21), (22), с учетом (24), будем иметь задачу

$$T_{s,n} + \mu_{s,n}^2 g(t) T_s = 0,\ T_s(\beta) = b_{s,n}^k,\ \ \beta < t < 0,$$

решением, которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\mu_{s,n}^2 \int_t^\beta g(\xi)d\xi \right). \quad (35)$$

Из (29), (35) будем иметь

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} \left(\exp \mu_{s,n}^2 \int_t^\beta g(\xi)d\xi \right) J_\nu(\mu_{s,n} r) \quad (36)$$

где $b_{s,n}$ находятся из (33).

Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) (n=0), а затем(10), (13)(n=1) и т.д. найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (18), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (34) и (36).

Итак, в области Ω_β, имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \quad (37)$$

Пусть $f(\mathrm{r},\theta,\mathrm{t})=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 – плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$ – плотна в $L_2(H)$, $\mathrm{T(t)}\in \mathrm{V}_1, V_1$ – плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(\tau,\theta,t)\in V, V=V_0\otimes H\otimes V_1$ – плотна в $L_2(\Omega_\beta)$([11]).

Отсюда и из (37), следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)L_1 u d\Omega_\beta=0$$

и

$$Lu=0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta..$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (34), (36).

Учитывая формулу ([10]) $2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки([12,8])

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\nu\ge 0,$$

(39)

$$|k_n|\le c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j=\overline{1,m-1},q=0,1,\ldots,$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi_2(t,\theta)$, как в [4,5], можно доказать, что полученное решение (38)принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (34), (36),(38) $t\to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{40}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int\limits_0^\beta a_{s,n}(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\int\limits_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi+b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^2\int\limits_0^\beta g(\xi)d\xi\right)\right]J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (32)-(34), (36), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta)\in W_2^l(S), l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (40), мы получим в области Ω_β задачу Дирихле для уравнения

$$L_2 u \equiv p(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \qquad (41)$$

сданными

$$u\big|_S = \tau(r,\theta),\ , \ u\big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta),\ u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta). \qquad (42)$$

В [6] доказана следующая теорема

Теорема 2. Если $\tau(r,\theta),\ \varphi_1(r,\theta) \in W_2^l(S),\ \psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$ и выполняется соотношение (5), то задача (41),(42) в классе $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ однозначно разрешима.

Далее, используя теорему 2 приходим разрешимости задачи 1.

В [6] приводится явный вид решения задачи (41),(42) поэтому можно записать представления решения и для задачи 1.

3. Единственность решения задачи 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* u \equiv g(t)\Delta_x \upsilon + \upsilon_t - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = 0, \qquad (6^*)$$

с данными

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),\ \upsilon\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \qquad (43)$$

где $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_{ix_i}, \overline{\tau}_n^k(r) \in G, G -$ множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [11]. Решение задачи (6*), (43) будем искать в виде (7), где функции $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений вида(9)-(11), где $\tilde{d}_{in}^k, d_{in}^k$ заменены соответственно на $-\tilde{d}_{in}^k, -d_{in}^k$ а $\tilde{e}_n^k$, на $\tilde{d}_n^k$, $i = 1,\ldots,m, k = \overline{1,k_n}$, n=0,1,... .

Далее, из краевого условия (43), в силу (7), получим

$$\overline{\upsilon}_n^k(r,0) = \overline{\tau}_n^k(r),\ \overline{\upsilon}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ \text{n} = 0,1,\ldots\ . \qquad (44)$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (9)-(11) представимо в виде (12). Задачу (12),(44) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k \equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right) + \upsilon_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (45)$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t) = 0, \qquad (46)$$

$$\upsilon_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\overline{\upsilon}_n^k(r,t),\ \widetilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}f_n^k(r,t),\ \tau_n^k(r)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\overline{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (45), (46) будем искать в виде (18), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)-$ решение задачи для уравнения (19) с данными

$$\upsilon_{1n}^k(r,0)=0,\ \upsilon_{1n}^k(r,t)=0, \tag{47}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)-$ решение задачи для уравнения (21) с условием

$$\upsilon_{2n}^k(r,0)=\tau_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{48}$$

Решения задач (19), (47) и (21), (48), соответственно имеют вид

$$\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\left(\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^t g(\xi)d\xi\right)\right)\left(\int_0^t a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2\int_0^{\xi} g(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi\right)\right)J_\nu(\mu_s r),$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\tau_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^t g(\xi)d\xi\right)\right)J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

где

$$\tau_{s,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\,\tau_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (6*), (43) в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta),$$

построено, которая в силу (39) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

В результате интегрирования по области Ω_β тождество [13]

$$\upsilon L_1u-uL_1^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=g(t)\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos(N^\perp,x_i),\ Q=\cos(N^\perp,x_i)-\sum_{i=1}^m a_i\cos(N^\perp,x_i),$$

а $N^\perp$ - внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$, по формуле Грина, получим

$$\int_S\tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{49}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\overline{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S)$([11]),то из (49) заключаем, что $u(r,\theta,0)ds=0,\forall(r,\theta)\in S$. Стало быть, по принцип экстремума для параболического уравнения (6) [14] $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$.

Далее, используя теорему 2 получим единственность решения задачи 1.

Отметим, что доказанная теорема для модельного многомерного вырождающегося гиперболо-параболического уравнения получена в [15].

Список литературы

1. Нахушев А. М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука: 287.
Nakhushev, A.M. 2006. Problems with a Shift for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Врагов В. Н. 1983. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск, НГУ: 84.
Vragov, V.N. 1983. Boundary Value Problems for Non-classical Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk, NGU (in Russian): 84.
3. Каратопраклиев Г. Д. 1983. Краевые задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях. Partial Diffential Equations Banach center publications, 10: 261-269.
Karatoprakliev G.D. 1983. Boundary Value Problems for Mixed Type Equations in Multi-dimensional Domains. Partial Differential Equations Banach Center Publications, 10: 261-269 (in Russian).
4. Алдашев С. А. 2013. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений, Укр. матем. Вестник, 10: 147-157.
Aldashev, S.A. 2013. Well-posedness of Dirichlet problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations. Ukrainskii Matematicheskii Vestnik, 10(2): 147-157 (in Russian).
5. Aldashev S. A. 2013. Correctntss of the Dirichlet problem for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations. Journal of Mathematical Sciences, 194 (5): 491-498.
Aldashev S.A. 2013. Correctness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Hyperbolic-Parabolic Equations. Journal of Mathematical Sciences, 194(5): 491-498.
6. Алдашев С. А. 2012. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина, Научные ведомости БелГУ, Математика, физика, вып. 6. №5(124): 12-25.
Aldashev S. A. 2012. Correctness of Dirichlet's and Poincare's problems' in cylindrical domain for degenerated multidimensional hyperbolic equations with CHapligin's operator. Belgorod State University Scientific bulletin Mathematics & Physics, vol. 6. №5(124): 12-25(in Russian).
7. Алдашев С. А. 2013. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина. Владикавказский матем. журнал, т 15, вып.2 : 3-10.
Aldashev S.A. 2013. The well-posedness of the Dirichlet and Poincare problems in a cylindric domain for the multi-demensional CHapligin. Vladikavkaz Mathematical Journal, vol. 15(2) : 3-10 (in Russian).
8. Михлин С. Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз: 254 .
Mikhlin, S.G. 1962 . Multi-dimensional Singular Integrals and Integral Equations. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
9. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука: 703.
Kamke E. 1965. Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka (Russian translation).
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1974. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука: 297.
Bateman H., Erdelyi A. 1974. Higher Transcendental Functions, Vol. 2. Moscow: Nauka (Russian translation).
11. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука: 543.
Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
12. Тихонов А. Н., Самарский А.А. 1966. Уравнения математической физики, М.: Наука: 724.
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. 1977. Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka (in Russian).
13. Смирнов В. И. 1981. Курс высшей математики, Т.4, N.2, М.: Наука: 550.
Smirnov V.I. 1981. A Course of Higher Mathematics, Vol. 4, part 2. Moscow: Nauka (in Russian).
14. Фридман А. 1968. Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир: 527.
Fridman A. 1968. Hyperbolic Partial Differential Equations. Moscow: Mir (in Russian).
15. Алдашев С.А. 2014. Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. Владикавказский матем. журнал, т 16, вып.4: 3-8.
Aldashev S.A. 2014. Well-posedness of the Dirichlet problem for the degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations. Vladikavkaz Mathematical Journal, vol. 16(42): 3-8 (in Russian).