УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

GELLERSTEDT'S TASK FOR THE NONLINEAR FUNCTIONAL AND DIFFERENTIAL EQUATION OF THE MIXED TYPE

Е.В. Чаплыгина, А.Н. Зарубин
E.V. Chaplygina, A.N. Zarubin

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

FSBEI "Orel state University named after I. S. Turgenev", Russia, 302026, Orel, Komsomolskaya str., 95

E-mail: lena260581@yandex.ru; aleks_zarubin@mail.ru

Аннотация. Исследуется краевая задача для нелинейного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе и функциональным запаздыванием, опережением. Построено общее решение уравнения. Задача однозначно разрешима. Найдены в явном виде интегральные представления решений.

Resume. The regional task for the nonlinear equation of the mixed type with Lavrentyev-Bitsadze's operator and functional delay, an advancing is investigated. The common decision of the equation is constructed. The task is unambiguously solvable. Integrated submissions of decisions are found in an explicit form.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, разностные уравнения, функция Римана, задача Коши, задача Дирихле..

Key words: equation of mixed type, difference equations, function of Riman, Cauchy problem, Dirichlet problem.

Постановка задачи

Уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + \mathrm{sgn}(y)u_{yy}(x,y) = u(\ln x, y)u(e^x, y), \tag{1}$$

рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,y): x_0 < x < x_2, 0 < y < h\} = D_0^+ \cup D_1^+ \cup J$ $(0 < h \equiv const)$,

$D^- = D_0^- \cup D_1^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$D_k^+ = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}$ $(k = -1,0,1,2)$,

$D_k^- = \{(x,y): -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\}$ $(k = -1,0,1,2)$,

$I = \{(x,y): x_0 < x < x_2, y = 0\}$, $J = \{(x,y): x = x_1, 0 < y < h\}$,

$\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x) = e^x$, $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x) = \ln(x)$, $\alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x)) = \ln(\ln(x))$

и $x_{-1} = -\infty, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = e, x_3 = e^e$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$ $(k = -1,0,1,2)$. Тип функционального запаздывания и опережения следует из представлений

$$u(\ln x, y) = u(x - (x - \ln x), y) = u(x - \tau_1(x), y),$$

$$u(e^x, y) = u(x + (e^x - x), y) = u(x + \tau_2(x), y),$$

где

$$\tau_1(x) = x - \ln x > 0, \quad \tau_2(x) = e^x - x > 0.$$

Задача G. Найти в области D функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\setminus J)\cap C^2(D\setminus(I\cup J))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(x,h)=\varphi(x), x_0\le x\le x_2, \qquad (2)$$

$$u(x,-x)=\psi_0(x), x_0\le x\le x_1/2, \qquad (3)$$

$$u(x,\ln x-x_1)=\psi_1(x), e^{x_1/2}\le x\le x_2, \qquad (4)$$

$$u(x_0,y)=u(x_2,y)=0,\ 0\le y\le h, \qquad (5)$$

$$u(x,y)=\cos(e^x+y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)})\cos(e^x-y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}),(x,y)\in\overline{D}_1, \qquad (6)$$

$$u(x,y)=\cos(\ln(\ln x)+y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)})\cos(\ln(\ln x)-y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}),(x,y)\in\overline{D}_2, \qquad (7)$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-)=u(x,0+)=\omega(x), x_0\le x\le x_2, \qquad (8)$$

$$u_y(x,0-)=u_y(x,0+)=\nu(x), x_0<x<x_2, x\ne x_1, \qquad (9)$$

условиям согласования

$$\varphi(x_0)=\varphi(x_2)=\psi_0(x_0)=\psi_1(x_2)=0, \qquad (10)$$

где $\varphi(x),\psi_k(x)$ $(k=0,1)$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Общее решение уравнения (1)

Уравнение (1) в терминах функций

$$u_k^{\pm}(x,y)=u(x,y),(x,y)\in D_k^{\pm}\ (k=0,1), \qquad (11)$$

с учетом (6) и (7), можно записать в форме системы

$$L\overline{u}^{\pm}(x,y)=\cos(x+y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)})\cos(x-y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)})A\overline{u}^{\pm}(x,y),\ (x,y)\in D_0^{\pm}, \qquad (12)$$

где

$$\overline{u}^{\pm}(x,y)=(u_0^{\pm}(x,y),u_1^{\pm}(e^x,y))^T,\ A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

которая в характеристических переменных

$$\xi=x+y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)},\ \eta=x-y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)} \qquad (14)$$

будет иметь вид матричного уравнения

$$4\overline{u}_{\xi\eta}^{\pm}(\xi,\eta)=\cos\xi\cos\eta A\overline{u}^{\pm}(\xi,\eta). \qquad (15)$$

Используя известную [1] для уравнения (15) функцию Римана

$$R(t,q;\xi,\eta)=J_0(i\sqrt{A\sigma(t,q;\xi,\eta)}),$$

где

$$\sigma(t,q;\xi,\eta)=\int_t^{\xi}\cos r dr\int_q^{\eta}\cos s ds=(\sin\xi-\sin t)(\sin\eta-\sin q), \qquad (16)$$

согласно [2, с.43] можно записать общее решение уравнения (15) в форме

$$\overline{u}^{\pm}(\xi,\eta)=J_0(i\sqrt{A\sigma(0,0;\xi,\eta)})\overline{u}^{\pm}(0,0)+$$
$$+\int_0^{\xi}J_0(i\sqrt{A\sigma(t,0;\xi,\eta)})\overline{\phi}_1^{\pm}(t)dt+\int_0^{\eta}J_0(i\sqrt{A\sigma(0,q;\xi,\eta)})\overline{\phi}_2^{\pm}(q)dq, \qquad (17)$$

где $\overline{\phi}_1^{\pm}(t),\overline{\phi}_2^{\pm}(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции; $i=\sqrt{-1}$, $J_0(z)$ – функция Бесселя [3, с.727] первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (13) имеет различные собственные значения $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$, то она приводима к диагональному виду, т.е. существует матрица T_A $(|T_A|\ne 0)$ такая, что $T_A^{-1}AT_A=\Lambda_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$, причем $T_A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, а $T_A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Значит,

$$J_0(i\sqrt{A\sigma}) = J_0(i\sqrt{T_A\Lambda_A T_A^{-1}\sigma}) = T_A J_0(i\sqrt{\Lambda_A\sigma})T_A^{-1} =$$

$$= T_A\begin{pmatrix} J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) & 0 \\ 0 & J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma}) \end{pmatrix} T_A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \gamma_1(\sigma) & \gamma_2(\sigma) \\ \gamma_2(\sigma) & \gamma_1(\sigma) \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

где

$$\gamma_n(\sigma) = J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) - (-1)^n J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma})\ (n=1,2). \qquad (19)$$

Поэтому из равенства (17), в силу (18), (19), (11) и возвращения к старым переменным по формулам (14), найдем общее решение уравнения в форме

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = \int_0^{z_0^{\pm}} \phi_1^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sigma(t,0;z_0^{\pm},\bar{z}_0^{\pm})})dt +$$

$$+\int_0^{\bar{z}_0^{\pm}} \phi_2^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sigma(0,t;z_0^{\pm},\bar{z}_0^{\pm})})dt,\ (x,y)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1) \qquad (20)$$

или

$$u_k^{\pm}(x, y) = \int_0^{z_k^{\pm}} \phi_1^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sigma(t,0;z_k^{\pm},\bar{z}_k^{\pm})})dt +$$

$$+\int_0^{\bar{z}_k^{\pm}} \phi_2^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sigma(0,t;z_k^{\pm},\bar{z}_k^{\pm})})dt,\ (x,y)\in D_k^{\pm}\ (k=0,1), \qquad (20')$$

где $\alpha_2^0(x) = x,\ \alpha_2^1(x) = \alpha_2(x) = e^x$; $\phi_1^{\pm}(t), \phi_2^{\pm}(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции; $z_k^{+} = \alpha_1^k(x) + iy$, $\bar{z}_k^{+} = \alpha_1^k(x) - iy$, $z_k^{-} = \alpha_1^k(x) + y$, $\bar{z}_k^{-} = \alpha_1^k(x) - y$ $(k=0,1)$, причем $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x) = \ln x$ и

$$u_0^{\pm}(x_1-0,y) = u_1^{\pm}(x_1+0,y) = 0,\ 0\le y\le h,\ \frac{\partial}{\partial x}(u_0^{\pm}(x_1-0,y)) \ne \frac{\partial}{\partial x}(u_1^{\pm}(x_1+0,y)),\ 0<y<h. \qquad (21)$$

В равенствах (20), (20') учтено, что $\bar{u}^{\pm}(0,0)$ из (17), т.е. в старых переменных $\bar{u}^{\pm}(0,0) = 0$ в силу условий (5) и (21).

На основании (16) равенство (20) можно записать в форме

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = \int_0^{z_0^{\pm}} \phi_1^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sin\bar{z}_0^{\pm}(\sin z_0^{\pm} - \sin t)})dt +$$

$$+\int_0^{\bar{z}_0^{\pm}} \phi_2^{\pm}(t) J_0(i\sqrt{\sin z_0^{\pm}(\sin\bar{z}_0^{\pm} - \sin t)})dt,\ (x,y)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1)$$

или, после интегрирования по частям и соответствующих замен, в виде

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = M_0(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm}) -$$

$$-\int_0^1 M_0(s\cdot\sin z_0^{\pm}, s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm})\frac{\partial}{\partial s}J_0(i\sqrt{(1-s)\sin z_0^{\pm}\sin\bar{z}_0^{\pm}})ds,\ (x,y)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1). \qquad (22)$$

Для уравнения (22) имеет место формула обращения

$$M_0(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm}) = u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y)[\textit{или}\, u_k^{\pm}(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm})] + \qquad (23)$$

$$+\frac{i\sqrt{\sin z_0^{\pm}\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm}}}{2}\int_0^1 \frac{u_k^{\pm}(s\cdot\sin z_0^{\pm}, s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm})}{\sqrt{s(1-s)}} I_1(i\sqrt{s(1-s)\sin z_0^{\pm}\sin\bar{z}_0^{\pm}})ds,\ (x,y)\in D_0^{\pm},$$

где

$$M_0(s\cdot\sin z_0^{\pm}, s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm}) = \int_0^{\arcsin(s\cdot\sin z_0^{\pm})} \phi_1^{\pm}(r)dr + \int_0^{\arcsin(s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm})} \phi_2^{\pm}(r)dr, \qquad (24)$$

$$u_k^{\pm}(s\cdot\sin z_0^{\pm}, s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm}) = u_k^{\pm}\left(\alpha_2^k\left(\frac{1}{2}\left[\arcsin(s\cdot\sin z_0^{\pm}) + \arcsin(s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm})\right]\right),\right.$$

$$\left.\frac{\mp i^{(1\pm1)/2}}{2}\left[\arcsin(s\cdot\sin z_0^{\pm}) - \arcsin(s\cdot\sin\bar{z}_0^{\pm})\right]\right)\,(k=0,1), \tag{25}$$

причем при $s=1$ из (24), (25) получим

$$M_0(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm}) = \int_0^{z_0^{\pm}}\phi_1^{\pm}(r)dr + \int_0^{\bar{z}_0^{\pm}}\phi_2^{\pm}(r)dr,$$

$$u_k^{\pm}(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm}) = u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y);$$

$I_1(s) = \dfrac{d}{ds}I_0(s)$; $I_0(s)$, $I_1(s)$ – модифицированные функции Бесселя [3, с.730] первого рода нулевого и первого порядка.

При $y=0$ выражения (22), (23) после преобразований представимы равенствами

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),0) = \overline{M}_0^{\pm}(x,0) -$$
$$-\int_0^x \overline{M}_0^{\pm}(t,0)\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)})dt,\ 0<x<x_1, \tag{26}$$

$$\overline{M}_0^{\pm}(x,0) = u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),0) +$$
$$+\int_0^x u_k^{\pm}(\alpha_2^k(t),0)\frac{\sin x\cdot\cos t}{\sin t\cdot\cos x}\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x - \sin t)})dt,\ 0<x<x_1, \tag{27}$$

где

$$\overline{M}_0^{\pm}(x,0) = M_0(\sin x, \sin x) = \int_0^x[\phi_1^{\pm}(r) + \phi_2^{\pm}(r)]dr. \tag{28}$$

Кроме того, из (22), (23) можно получить следующие формулы взаимного обращения

$$u_{ky}^{\pm}(\alpha_2^k(x),0) = \overline{M}_{0y}^{\pm}(x,0) -$$
$$-\int_0^x \overline{M}_{0y}^{\pm}(t,0)\frac{\cos x\cdot\sin t}{\sin x\cdot\cos t}\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)})dt,\ 0<x<x_1, \tag{29}$$

$$\overline{M}_{0y}^{\pm}(x,0) = u_{ky}^{\pm}(\alpha_2^k(x),0) +$$
$$+\int_0^x u_{0y}^{\pm}(\alpha_2^k(t),0)\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x - \sin t)})dt,\ 0<x<x_1, \tag{30}$$

где

$$\overline{M}_{0y}^{\pm}(x,0) = M_{0y}(\sin z_0^{\pm}, \sin\bar{z}_0^{\pm})\Big|_{y=0} = i^{(1\pm1)/2}[\phi_1^{\pm}(x) - \phi_2^{\pm}(x)]. \tag{31}$$

Однозначная разрешимость задачи G

Теорема 1. Если $\varphi(x)\in C[x_0,x_2]\cap C^2(x_0,x_2)$, $\psi_0(x)\in C[x_0,x_1/2]\cap C^2(x_0,x_1/2)$, $\psi_1(x)\in C[e^{x_1/2},x_2]\cap C^2(e^{x_1/2},x_2)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках, $\varphi(x_0)=\varphi(x_2)=\psi_0(x_0)=\psi_1(x_2)=0$ и $\psi_0'(x)$ при $x\to x_0$, $\psi_1'(x)$ при $x\to x_2$, допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение $u(x,y)$ задачи G.

Единственность решения задачи G следует из утверждений.

Лемма 1. Если $u(x,y)$ - решение уравнения (1) в области $D^- = D_0^- \cup D_1^-$ из класса $C(\overline{D}^-) \cap C^2(D^-)$, обращающееся в нуль на $y=-x,\ x_0<x<x_1/2,\ y=\ln x - x_1,\ e^{x_1/2}<x<x_2$ и в $\overline{D}_{-1}^-$, $\overline{D}_2^-$, то

$$\beta = \int_{x_0}^{x_2} \omega(x)\nu(x)dx \ge 0.$$

Доказательство леммы аналогично [5, с. 128-130].

Лемма 2. Если $u(x,y)$ - решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D}^+) \cap C^2(D^+ \setminus J)$, обращающееся в нуль при $x=x_k$ $(0\le y\le h)$ $(k=0,2)$, $y=h$ $(x_0\le x\le x_2)$ и в областях $\overline{D}_{-1}^+$, $\overline{D}_2^+$, то $\beta\le 0$ и

$$\beta + \iint_{D^+} [u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)]dxdy = 0.$$

Доказательство леммы аналогично [6].

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D=D_0\cup D_1\cup J$ связан с построением в $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ $(k=0,1)$ на основании общих решений (20) функций $u_k^{\pm}(x,y), (x,y)\in D_k^{\pm}$ $(k=0,1)$, удовлетворяющих условиям (2)-(10), (11), (21) в которых $\varphi(x), \psi_k(x)$ $(k=0,1)$ заданы, а $\omega(x), \nu(x)$ подлежат определению. Поскольку условие (21) на $x=x_1$ $(0\le y\le h)$ известно, то достаточно решить задачу G для уравнения (1) в областях D_0 и D_1, то есть найти функции $u_0^{\pm}(x,y), (x,y)\in D_0^{\pm}$ и $u_1^{\pm}(x,y), (x,y)\in D_1^{\pm}$ (или $u_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), (x,y)\in D_0^{\pm}$).

Проведем построение решения задачи G для уравнения (1) в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$, то есть найдем функции $u_0^{\pm}(x,y), (x,y)\in D_0^{\pm}$ при условиях (2)-(10), (11):

$$u_0^+(x,h)=\varphi(x),\ x_0\le x\le x_1, \tag{32}$$

$$u_0^+(x_0,y)=u_0^+(x_1,y)=0,\ 0\le y\le h, \tag{33}$$

$$u_0^-(x,-x)=\psi_0(x),\ x_0\le x\le x_1/2, \tag{34}$$

$$u_0^-(x,0-)=u_0^+(x,0+)=\omega(x),\ x_0\le x\le x_1, \tag{35}$$

$$u_{0y}^-(x,0-)=u_{0y}^+(x,0+)=\nu(x),\ x_0<x<x_1, \tag{36}$$

$$\omega(x_0)=\omega(x_1)=\psi_0(x_0)=0,\ \varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0.$$

Задача Коши. Найти в области D_0^- решение $u_0^-(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_0^-) \cap C^2(D_0^-)$, удовлетворяющее условиям (35), (36), то есть

$$u_0^-(x,0-)=\omega(x),\ x_0\le x\le x_1,\ u_{0y}^-(x,0-)=\nu(x),\ x_0<x<x_1,$$

где $\omega(x),\nu(x)$ – непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(x_0)=\omega(x_1)=0$.

Теорема 2. Если $\omega(x)\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$, $\nu(x)\in C^1(x_0,x_1)$, $\omega(x_0)=\omega(x_1)=0$, то существует единственное решение задачи Коши $u_0^-(x,y)\in C(\overline{D}_0^-)\cap C^2(D_0^-)$ вида

$$u_0^-(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{z_0^-} J_0(i\sqrt{(\sin z_0^- - \sin t)\sin \overline{z}_0^-})[p'(t)+r(t)]dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{z}_0^-} J_0(i\sqrt{\sin z_0^-(\sin \overline{z}_0^- - \sin t)})[p'(t)-r(t)]dt,\ (x,y)\in D_0^-, \tag{37}$$

где

$$p(x)=\omega(x)+\int_0^x \omega(t)\frac{\sin x\cdot\cos t}{\sin t\cdot\cos x}\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x-\sin t)})dt, \qquad (38)$$

$$r(x)=\nu(x)+\int_0^x \nu(t)\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x-\sin t)})dt. \qquad (39)$$

Доказательство следует из (20) $(k=0)$. Действительно, для определения произвольных функций $\phi_1^-(t),\phi_2^-(t)$ учтем в общем решении (20) $(k=0)$ (или (22)) уравнения (1) в области D_0^- условия (35), (36) задачи Коши. Тогда

$$\omega(x)=\overline{M}_0^-(x,0)-\int_0^x \overline{M}_0^-(t,0)\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x-\sin t)})dt,\ 0=x_0<x<x_1,$$

$$\nu(x)=\overline{M}_{0y}^-(x,0)-\int_0^x \overline{M}_{0y}^-(t,0)\frac{\cos x\cdot\sin t}{\sin x\cdot\cos t}\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x-\sin t)})dt,\ 0=x_0<x<x_1.$$

На основании (27) и (30) имеем $\overline{M}_0^-(x,0)=p(x),\ \overline{M}_{0y}^-(x,0)=r(x),\ x_0<x<x_1$, то есть, в силу (28), (31), дифференцируя первое равенство, приходим к системе

$$\begin{cases}\phi_1^-(x)+\phi_2^-(x)=p'(x),\\ \phi_1^-(x)-\phi_2^-(x)=r(x).\end{cases}$$

Из этой системы уравнений найдем функции $\phi_1^-(x),\phi_2^-(x)$, подставляя которые в (20) (или (20')) $(k=0)$, получаем решение $u_0^-(x,y)$ задачи Коши (37) в области D_0^-.

Функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D_0^- на линию изменения типа уравнения (1) $y=0, x_0<x<x_1$, получим из (37), полагая $y=-x$ и учитывая условие (34) задачи G:

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2}\int_0^{2x}[p'(t)-r(t)]dt,\ 0=x_0\le x\le x_1/2,$$

то есть, после замены x на $x/2$ и дифференцирования,

$$p'(x)=r(x)+\psi'_0(x/2),\ 0=x_0<x<x_1. \qquad (40)$$

Выражение (40) является искомым функциональным соотношением.

Задача Дирихле. В области D_0^+ найти решение $u_0^+(x,y)\in C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (32), (33), (35), то есть

$$u_0^+(x,0+)=\omega(x),\ u_0^+(x,h)=\varphi(x),\ x_0\le x\le x_1,$$

$$u_0^+(x_0,y)=u_0^+(x_1,y)=0,\ 0\le y\le h,$$

где $\varphi(x),\omega(x)-$непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(x_0)=\omega(x_1)=\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$.

Теорема 3. Если $\varphi(x),\omega(x)\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$ и $\omega(x_0)=\omega(x_1)=\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$, то существует единственное решение $u_0^+(x,y)\in C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+)$ задачи Дирихле вида

$$u_0^+(x,y)=\int_0^{z_0^+}J_0(i\sqrt{(\sin z_0^+-\sin t)\sin\overline{z}_0^+})[p'(t)-\sum_{k=0}^{+\infty}R_t^{2ikh}(p'(t)-R_t^{ih}\beta'(t))]dt+$$

$$+\int_0^{\overline{z}_0^+}J_0(i\sqrt{\sin z_0^+(\sin\overline{z}_0^+-\sin t)})[\sum_{k=0}^{+\infty}R_t^{2ihk}(p'(t)-R_t^{ih}\beta'(t))]dt,\ (x,y)\in D_0^+, \qquad (41)$$

где R_x^{Θ} – оператор сдвига по x: $R_x^{\Theta} q(x) = q(x-\Theta)$,

$$\beta(x) = \varphi(x) + \left[\frac{i\sqrt{\sin z_0^+ \cdot \sin \bar{z}_0^+}}{2} \int_0^1 \frac{u_0^+(s \cdot \sin z_0^+, s \cdot \sin \bar{z}_0^+)}{\sqrt{s(1-s)}} I_1(i\sqrt{s(1-s) \cdot \sin z_0^+ \cdot \sin \bar{z}_0^+}) ds \right]\Bigg|_{y=h}, \quad (42)$$

а $p(x)$ определяется равенством (38).

Доказательство следует из (20) $(k=0)$. Действительно, для определения произвольных функций $\phi_1^+(t), \phi_2^+(t)$ учтем в общем решении (20) $(k=0)$ (или (22)) уравнения (1) в области D_0^+ условия (32), (35) задачи Дирихле.

Используя формулы обращения (23), (27), придем к системе

$$\begin{cases} \overline{M}_0^+(x,0) = p(x), 0 = x_0 < x < x_1, \\ \overline{M}_0^+(\sin z_0^+, \sin \bar{z}_0^+)\big|_{y=h} = \beta(x), 0 = x_0 < x < x_1, \end{cases}$$

которая, в силу (24), (28) и дифференцирования, примет вид

$$\begin{cases} \phi_1^+(x) + \phi_2^+(x) = p'(x), \\ \phi_1^+(x) + R_x^{2ih} \phi_2^+(x) = R_x^{ih} \beta'(x). \end{cases} \quad (43)$$

Подставляя из первого уравнения

$$\phi_1^+(x) = p'(x) - \phi_2^+(x), 0 = x_0 < x < x_1, \quad (44)$$

во второе уравнение системы (43), приходим к разностному уравнению

$$\phi_2^+(x) = R_x^{2ih} \phi_2^+(x) + \gamma(x), 0 = x_0 < x < x_1, \quad (45)$$

где

$$\gamma(x) = p'(x) - R_x^{ih} \beta'(x), \quad (46)$$

решение [7] которого

$$\phi_2^+(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{2ikh} \gamma(x), \quad (47)$$

а, в силу (44),

$$\phi_1^+(x) = p'(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{2ikh} \gamma(x). \quad (48)$$

Учитывая выражения (47), (48) в (20) (или (20')) $(k=0)$, приходим к требуемому представлению (41) решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области D_0^+.

Найдем **функциональное соотношение** между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D_0^+ на линию изменения типа $y=0, 0=x_0<x<x_1$.

Подставляя в равенство (20) (или (22)) $(k=0)$ условие (36), согласно (29) получим уравнение

$$\nu(x) = \overline{M}_{0y}^+(x,0) - \int_0^x \overline{M}_{0y}^+(t,0) \frac{\cos x \cdot \sin t}{\sin x \cdot \cos t} \frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)}) dt, 0 = x_0 < x < x_1,$$

обращая которое относительно $\overline{M}_{0y}^+(x,0)$ аналогично (30), в силу (31), придем к равенству $\phi_1^+(x) - \phi_2^+(x) = -ir(x)$, т.е., на основании (47), (48), (46), к выражению

$$r(x) = ip'(x) - 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{2ikh} p'(x) + 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{ih(2k+1)} \beta'(x),$$

представимому в виде

$$(1 - R_x^{2ih}) r(x) = -i(1 + R_x^{2ih}) p'(x) + 2iR_x^{ih} \beta'(x), 0 = x_0 < x < x_1. \quad (49)$$

Выражение (49) является искомым функциональным соотношением.

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (40), (49), то есть к разностному уравнению

$$(1+iR_x^{2ih})r(x) = \alpha(x) \equiv -\frac{1}{2}(i+1)(1+R_x^{2ih})\psi'_0(x/2)+(i+1)R_x^{ih}\beta'(x),\ 0 = x_0 < x < x_1. \quad (50)$$

Решение [7] разностного уравнения (50), аналогично (45), можно записать в виде

$$r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2inh}\alpha(x). \quad (51)$$

Интегральное представление (51) можно [8] найти, поскольку [9, с.7] финитная на промежутке $[0, x_1]$ непрерывная функция

$$\alpha(x) = (\alpha(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int_0^{x_1}\alpha(\xi)[\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)]d\xi,$$

где $\delta(z) = \dfrac{1}{2x_1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda_m z)$ – дельта-функция [4,с.711-714] Дирака, а $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{x_1}$.

Таким образом, учитывая (51) в (39), применяя формулы взаимного обращения (29), (30) получим

$$\nu(x) = r(x) - \int_0^x r(t)\frac{\cos x \cdot \sin t}{\sin x \cdot \cos t}\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)})dt,\ 0 = x_0 < x < x_1. \quad (52)$$

На основании свойств функций $\varphi(x), \psi_0(x)$, входящих в (42), (50), из (52) следует, что $\nu(x) \in C^1(x_0, x_1)$.

Очевидно, интегрируя (40), подставляя $p(x), r(x)$ из (38), (51) и применяя формулы взаимного обращения (26), (27), найдем $\omega(x) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$.

Подстановка функций $\omega(x)$ и $\nu(x)$ в формулы (37), (41) приводит к окончательному виду решения задачи Коши и задачи Дирихле в областях D_0^- и D_0^+, то есть в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$.

Список литературы

1. Чуриков Ф.С., Кокинасидии П.Д. 1976. О построении функции Римана для компактных уравнений методом промежуточного аргумента. Труды Кубинского университета, Т. 222: 5-12.
Churikov F. S., Kokinasidiya P. D. 1976. About creation of function of Riman for the compact equations by method of an intermediate argument. Works of the Cuban university, T. 222: 5-12.
2. Векуа И.Н. 1948. Новые методы решения эллиптических уравнений, ОГИЗ, М.-Л.: 296.
Vekua I.N. New methods of the solution of the elliptic equations. – OGIZ, M.-L., 1948. 296 pp.
3. Прудников А.Н., Брычков Ю.А., Маричев О.И. 1983. Интегралы и ряды. Специальные функции. Москва: Наука : 750.
Prudnikov A. N., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1983. Integrals and ranks. Special functions. Moscow: Science: 750.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. 1988. Курс математического анализа. Москва: Наука: 816.
Ter-Krikorov A. M., Shabunin M. I. 1988. Kurs of the mathematical analysis. Moscow: Science: 816.
5. Зарубин А.Н. 1999. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: издательство ОГУ: 225.
Zarubin A.N. 1999. The equations of the mixed type with the late argument. Orel: 225.
6. Зарубин А.Н. 2014. Краевая задача для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения. Дифференциальные уравнения, Т. 50, №10: 1362-1372.
Zarubin A.N. 2014. A regional task for the operezhayushche-late equation of the mixed type with the rough line of degeneration. Differential equations, T. 50, No. 10: 1362-1372.
7. Зарубин А.Н. 2012. Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом. Дифференциальные уравнения, Т. 48, №10: 1401-1411.
Zarubin A.N. 2012. A regional task for the equation of the mixed type with the operezhayushche-late argument. Differential equations, T. 48, No. 10: 1401-1411.
8. Зарубин А.Н. 2015. Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с замкнутой линией вырождения. Дифференциальные уравнения, Т. 51, №10: 1315-1327.
Zarubin A. N. 2015. Zadacha Trikomi for the operezhayushche-late equation of the mixed type with the closed line of degeneration. Differential equations, T. 51, №10: 1315-1327.
9. Агранович М.С. 2008. Обобщенные функции, Москва: МЦНМО: 128.
Agranovich M. S. 2008. The generalized functions. Moscow: MCNMO: 128.